中華民國三十三年五月十三日
教育部批准發行

漢譯

葛氏平面三角術

斯密二氏改訂

新亞書店印行

葛氏平面三角術

Granville: Plane Trigonometry

Revised by

P. F. Smith and J. S. Mikesh

虞詩舟譯述　　吳靜山校訂

新亞書店印行

漢譯葛氏平面三角術

定價國幣

(外埠酌加寄費)

譯述者	虞詩舟
校訂者	吳靜山
發行者	陳邦楨
印刷者	新亞書店
發行所	新亞書店
	上海河南路一五九號

中華民國二十三年三月十版

改版序言

葛氏平面三角術一書,說理簡淨暢達,例示豐富詳明,習題種類繁多,應用範圍廣大,以是風行一時,各學校師生咸樂於採用.今茲之改訂,對於以上諸優點,仍儘量予以保持,惟於書中着重之點,酌量爲之變更,務求其更適於實用而已.研究三角術,三角函數最爲重要,原書以三角函數與直角三角形合爲一章,茲特分別論之,俾三角函數之功用尤覺簡單明瞭.至於三角函數之應用,詳見第四第五兩章,附之以對數算法之練習.再後一章爲三角術之解析,內容亦多改變,藉增讀者之所好,而尤注意於三角恆等式與三角方程式之改訂.依此改訂之後,讀者未研究三角解析法之前,即足以實地應用矣.

本書之附錄仍爲四位數字表,與葛氏原書同.其不同者,僅在增加表四與表五,備載正弦餘弦及正切餘切之眞數,並加用表法之說明耳.凡此諸表,在計算中可得四位準確數字,亦與原書無異.惟此處又着重說明所加之表,其數値皆爲四位有效數字,或如何求得四位有效數字之方法.

本書所列之問題亦與原書同,角之大小均以度與分,及度與度之小數表示之.至於角之量法可留待教者自行選擇之,好在所附諸表足供任何問題之用也.

Percey F. Smith,

James S. Mikesh.

目　　次

第一章　三角函數

第二章　基本關係;簡化公式

第三章 線之定義與圖解

第四章 應用

第五章 對數之理論與用途

第六章 三角術之解析

第七章 近於0°或90°之銳角

第八章 公式之複述

平面三角術

第一章

三角函數

1. 三角術 三角術爲研究三角函數之算學.本章之目的乃在解釋此等函數之定義,並詳論其初步之應用.

2. 變數;常數 凡問題中所包含之數量,有爲變數者,亦有爲常數者,故二者之區別,當先確切明瞭.所謂變數,卽在問題中之一數量,其值可以多至無限者,通常每以 x, y, z 等末數字母表示之.

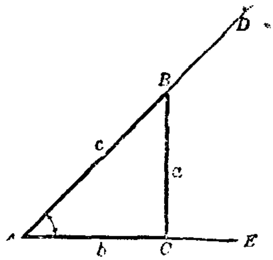
所謂常數,卽在問題中之數量,其值乃固定不變者.如 2, 5, $\sqrt{7}$, π 等,在一切問題中,常保持同一之值而絕不改變者,謂之數字常數,亦稱絕對常數.另有所謂不定常數者,其值雖任意選定,但在特定問題中,其值亦係固定不變.常數每以英文 a, b, c 等首數字母表示之.

3. 函數 一變數之函數爲一數量,其值視變數之值如何而定.例如正方形之面積爲其邊長之函數,球之體積爲其直徑之函數.同理,三項式 x^2-7x-6 爲 x 之函數,因此式之值

視 x 之值而定也.在三角函數中,變數卽爲角之度量,而函數之值卽視角之大小而定.現時先以度數爲單位,計量角之大小,以後尙須論及第二種量角之方法.

4. 銳角之三角函數 學者旣於平面幾何學中獲有二線相交成角之概念,茲先就銳角討論之.

設 EAD 爲一小於 90° 之銳角.由此角一邊之任一點 B 作垂直於另一邊之直線,而成一直角三角形 ABC.今以 A, B, C 表此直角三角形之各角,以 a,b,c 表此直角三角形各角對邊之長度.*吾人在幾何學中,已知三角形之邊與角有相互之關係.今於三角術中,卽將應用各邊之比,顯示此種關係之正確性質.此各邊之比稱爲**三角函數**.



任一銳角均有六種三角函數,茲以 A 爲例,表之如下:

$\sin A$	讀如 A 之正弦 (sine of A);
$\cos A$	讀如 A 之餘弦 (cosine of A);
$\tan A$	讀如 A 之正切 (tangent of A);
$\csc A$	讀如 A 之餘割 (cosecant of A);
$\sec A$	讀如 A 之正割 (secant of A);
$\cot A$	讀如 A 之餘切 (cotangent of A).

此等三角函數(比)之定義如下(見上圖):

* 以後,若無其他說明,凡直角三角形之斜邊,以小楷 c 表之,直角則以大楷 C 表之.

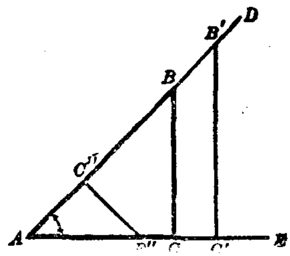
(1) $\sin A=\dfrac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}\left(=\dfrac{a}{c}\right)$;　　(4) $\csc A=\dfrac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}\left(=\dfrac{c}{a}\right)$;

(2) $\cos A=\dfrac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}\left(=\dfrac{b}{c}\right)$;　　(5) $\sec A=\dfrac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}}\left(=\dfrac{c}{b}\right)$;

(3) $\tan A=\dfrac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}\left(=\dfrac{a}{b}\right)$;　　(6) $\cot A=\dfrac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}\left(=\dfrac{b}{a}\right)$.

最應注意者,任一函數之數值,僅視 A 角之大小而定,與所取垂線起點 B 之位置無關.證之如次:

設 B' 爲 AD 上之任一點, B'' 爲 AE 上之任一點.作 $B'C'$ 垂直於 AE,作 $B''C''$ 垂直於 AD.則三角形 ABC, $AB'C'$ 及 $AB''C''$ 三者,因各有一角爲直角,且有一公共角 A,故互相等角,而爲相似三角形.於是



$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''}.$$

凡此諸比,皆爲 A 角的正弦.同理,可證其他函數亦具此種性質.由此可見角之函數與直角三角形之大小無關,所重要者則在三角形各邊之相互關係,而非各邊之眞正長度.

學者更應注意,若 A 角之大小改變時,則上列六比之比值將隨同改變.

此等函數(比)爲研究三角術之基本要素.假若對此六種函數,不能徹底瞭解,卽無法再作進一步之研究.惟此等函數極易記憶,學者祇須注意第一行內之三函數各爲第二行內三函數之倒數.因

$$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{1}{\frac{c}{a}}=\frac{1}{\csc A};\qquad \csc A=\frac{c}{a}=\frac{1}{\frac{a}{c}}=\frac{1}{\sin A}.$$

$$\cos A=\frac{b}{c}=\frac{1}{\frac{c}{b}}=\frac{1}{\sec A};\qquad \sec A=\frac{c}{b}=\frac{1}{\frac{b}{c}}=\frac{1}{\cos A};$$

$$\tan A=\frac{a}{b}=\frac{1}{\frac{b}{a}}=\frac{1}{\cot A};\qquad \cot A=\frac{b}{a}=\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{1}{\tan A}.$$

設將定義(1)至(6)應用於前圖之銳角B. 則對邊$=AC=b$, 鄰邊$=BC=a$, 故

$$\sin B=\frac{b}{c};\qquad \cos B=\frac{a}{c};\qquad \tan B=\frac{b}{a};$$

$$\csc B=\frac{c}{b};\qquad \sec B=\frac{c}{a};\qquad \cot B=\frac{a}{b}.$$

再與A角之函數比較,則得

$$\sin A=\cos B;\qquad \cos A=\sin B;\qquad \tan A=\cot B;$$

$$\csc A=\sec B;\qquad \sec A=\csc B;\qquad \cot A=\tan B.$$

因$A+B=90^\circ$(即A與B互為餘角),故以上結果可歸納如下:

定理　一銳角之函數等於其餘角之餘函數.*

上述定理用式表之如下:

$$\sin A=\cos(90^\circ-A);\qquad \csc A=\sec(90^\circ-A);$$

$$\cos A=\sin(90^\circ-A);\qquad \sec A=\csc(90^\circ-A);$$

$$\tan A=\cot(90^\circ-A);\qquad \cot A=\tan(90^\circ-A).$$

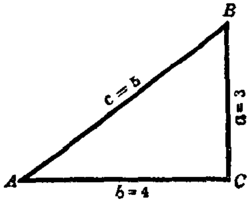
例 1.　在一直角三角形中, $a=3$, $b=4$. 求A角之諸函數.

解　$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$

應用(1)至(6)諸式,得

---

* 正弦與餘弦互稱為餘函數. 同樣正切與餘切, 正割與餘割, 亦互稱為餘函數.



$$\sin A=\frac{3}{5};\qquad \csc A=\frac{5}{3};$$

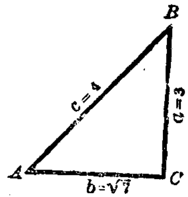
$$\cos A=\frac{4}{5};\qquad \sec A=\frac{5}{4};$$

$$\tan A=\frac{3}{4};\qquad \cot A=\frac{4}{3}.$$

再求 B 角之諸函數,並比較其結果.

例 2.　在一直角三角形中,$a=3$, $c=4$. 求 B 角之諸函數.

解　$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$.



$$\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4}=0.66;\qquad \csc B=\frac{4}{\sqrt{7}}=\frac{4\sqrt{7}}{7}=1.51;$$

$$\cos B=\frac{3}{4}=0.75;\qquad \sec B=\frac{4}{3}=1.33;$$

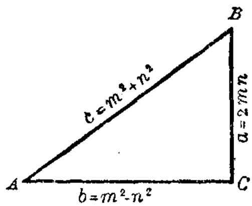
$$\tan B=\frac{\sqrt{7}}{3}=0.88;\qquad \cot B=\frac{3}{\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{7}=1.14.$$

再求 A 角之諸函數,並比較其結果.

例 3.　在一直角三角形中,$a=2mn$, $b=m^2-n^2$. 求 A 角之諸函數.

解　$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4m^2n^2+m^4-2m^2n^2+n^4}$

$=\sqrt{m^4+2m^2n^2+n^4}=m^2+n^2$.



$$\sin A=\frac{2mn}{m^2+n^2};\qquad \csc A=\frac{m^2+n^2}{2mn};$$

$$\cos A=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2};\qquad \sec A=\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2};$$

$$\tan A=\frac{2mn}{m^2-n^2};\qquad \cot A=\frac{m^2-n^2}{2mn}.$$

例 4.　在一直角三角形中,已知 $\sin A=\frac{4}{5}$ 及 $a=80$; 求 c.

解　由(1)式可知　　$\sin A=\frac{a}{c}$.

以 $\sin A$ 及 a 之值代入,得　　$\frac{4}{5}=\frac{80}{c}$;

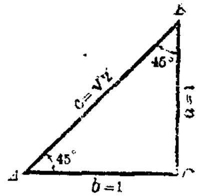
解之　　$c=100$.　(答)

5. 45°, 30°, 60° 之函數　此等銳角常發見於用三角術計算之習題中,故須求得其三角函數值而熟記之.

(a) 求 45° 之函數　作一等腰直角三角形 ABC. 則

$$\angle A=\angle B=45^\circ.$$

因三角函數重在各邊之比,而與各邊之眞正長度無涉,故可以任何長度給與等腰直角三角形之二邊,祇須二長度相等即可.



設最短邊之長為1,即 $a=1$, 及 $b=1$.

則 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$, 得

$$\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad \csc 45^\circ=\sqrt{2};$$

$$\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad \sec 45^\circ=\sqrt{2};$$

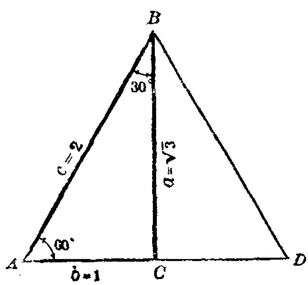
$$\tan 45^\circ=1; \qquad \cot 45^\circ=1.$$

(b) **求30°及60°之函數** 作一等邊三角形,如 ABD. 自 B 作垂線 BC 至 AD, 即得三角形 ABC, 其中 $\angle A=60^\circ$, $\angle ABC=30^\circ$.

再設最短之一邊為一,即命 $b=1$.

則 $c=AB=AD=2AC=2b=2$,

及 $a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$. 故



$$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \csc 60^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$; $\sec 60^\circ=2$;

$\tan 60^\circ=\sqrt{3}$; $\cot 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

同理,由此同一三角形得

$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$; $\csc 30^\circ=2$;

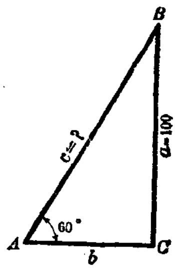
$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sec 30^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$;

$\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\cot 30^\circ=\sqrt{3}$.

茲將以上結果列表於下:*

角	sin	cos	tan	cot	sec	csc
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

學者對於45°, 30°, 及60°直角三角形應極熟習,即不記上表,亦可直接由心中意像之直角三角形,求得各函數之值.



例 在一直角三角形中,已知$A=60^\circ$, $a=100$; 求c.

解 因A角已知,即A角之任何函數亦爲已知,但僅A角之餘割含有已知數a及未知數c,故可用公式(4)以求c.

$$\csc A=\frac{c}{a}.$$

* 記憶時,當注意第一行(即正弦)各數,係$\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 各除以2.
第二行(即餘弦)各數,係顚倒排列第一行各數之次序而得.
第三行(即正切)各數,係第一行各數各以第二行之各數除之而得.

以 $a=100$ 及由上表得 $\csc A=\csc 60^\circ=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 代入上式,則得

$$c=\frac{200\sqrt{3}}{3}=111.5.\quad (答)$$

B 角之值爲何?並依上法求證 $b=57.7$.

習題

下列各題,均限於直角三角形.答案則依正弦,餘弦,正切之次序排列之.

1. 已知 $a=8$, $b=15$; 求 A 角諸函數.

(答) $\sin A=\frac{8}{17}$, $\cos A=\frac{15}{17}$, $\tan A=\frac{8}{15}$, 等.

2. 已知 $b=5$, $c=13$; 求 B 角諸函數.

3. 已知 $a=0.6$, $b=0.8$; 求 B 角諸函數.

(答) $\sin B=0.8$, $\cos B=0.6$, $\tan B=1.3$, 等.

4. 已知 $b=2$, $c=\sqrt{11}$; 求 A 角諸函數.

5. 已知 $a=5$, $c=7$; 求 B 角諸函數. (答) $\frac{2\sqrt{6}}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{2\sqrt{6}}{5}$, 等.

6. 已知 $a=p$, $b=q$; 求 A 角諸函數.

7. 已知 $a=\sqrt{m^2+mn}$, $c=m+n$; 求 A 角諸函數.

(答) $\frac{\sqrt{m^2+mn}}{m+n}$, $\frac{\sqrt{mn+n^2}}{m+n}$, $\frac{1}{n}\sqrt{mn}$, 等.

8. 已知 $\sin A=\frac{3}{5}$, $c=200.5$; 求 a.

9. 已知 $\cos A=0.44$, $c=30.5$; 求 b. (答) 13.42.

10. 已知 $\tan A=\frac{11}{3}$, $b=\frac{27}{11}$; 求 c.

11. 已知 $\tan B=k$, $a=r$; 求 c. (答) $r\sqrt{k^2+1}$.

12. 設 $b=2a$, 求 A 之函數.問答案中何以旣無 a 又無 b?

13. 一直角三角形之斜邊,三倍於其一腰之長;求此腰對角之諸函數.問答案何以與此腰之長度無關? (答) $\frac{1}{3}$, $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\frac{\sqrt{2}}{4}$, 等.

14. 設直角三角形之一腰爲 16, 其對角之餘切爲 $\frac{3}{4}$, 求他一腰之長.

15　已知 $A=30°$, $a=25$; 求 c, B, 及 b.　(答) $c=50$, $B=60°$, $b=25\sqrt{3}$.

16.　已知 $B=30°$, $c=48$; 求 b, A, 及 a.

17.　已知 $B=45°$, $b=20$; 求 c, A, 及 a,　(答) $c=20\sqrt{2}$, $A=45°$, $a=20$.

18.　設一直角三角形之一腰,爲另一腰之 $\sqrt{3}$ 倍,則此三角形之兩銳角各爲若干?

19.　一直角三角形之斜邊,$\sqrt{2}$ 倍於一腰之長,則此三角形之兩銳角各爲若干?　(答) $45°$, $45°$.

20.　設 $\sec B=\frac{2}{3}\sqrt{3}$ 及 $c=480$, 求 B, A, a, 及 b.

21.　設 $A=30°$; $45°$; $60°$; 求 $\sin^2 A+\cos^2 A$ 之值.　(答) 1.

22.　求證 $\cos 60°=2\cos^2 30°-1$.

23.　求證 $\tan 30°=\dfrac{\sec 60°}{(\sec 60°+1)\csc 60°}$

24.　試將下列各函數以其餘角之函數表之:

(a)　$\tan 30°$.

(b)　$\cos 20°$.

(c)　$\sec 81°$.

(d)　$\sin 33° 33'$.

(e)　$\csc 72° 17.3'$.

25　試證以下各題:

(a)　$\sin 32°-\cos 58°=0$.

(b)　$\csc 12°+\sec 78°=2\csc 12°=2\sec 78°$.

26　設 $\sin 2A=\cos 3A$; 求此直角三角形之銳角 A 及 B.

27.　若 $\tan(30°-x)$ 等於 $\cot(30°+3x)$, 則銳角 x 之值應如何?　(答) $15°$.

6. 作圖;量角器　初學三角之學者,對於問題中之圖形繪畫愈精確愈佳.此不僅便利於習題本身之瞭解,且可使三角函數之意義更覺清楚,並可大略檢核所得結果之是否準確.作圖所需之儀器,爲一刻度尺,及一量角器.量角器乃計量角度大小之儀器,爲繪角必需之用具.

7. 三角函數之數值表　$30°$, $45°$, 及 $60°$ 角之函數,已詳第5節.至其他銳角函數計算之法,見程度較深之書中,茲不贅.