

中華民國三十三年五月十三日
教育部批准發行

漢 譯

葛氏平面三角術

斯密二氏改訂

新亞書店印行

葛氏平面三角術

Granville: Plane Trigonometry

Revised by

P. F. Smith and J. S. Mikesch

虞詩舟譯述 吳靜山校訂

新亞書店印行

漢譯葛氏平面三角術

定價國幣

(外埠酌加寄費)

譯述者

虞詩舟

校訂者

吳靜山

發行者

陳邦楨

印刷者

新亞書店

發行所

新亞書店

上海河南路一五九號

中華民國二十三年三月十版

改 版 序 言

葛氏平面三角術一書，說理簡淨暢達，例示豐富詳明，習題種類繁多，應用範圍廣大，以是風行一時，各學校師生咸樂於採用。今茲之改訂，對於以上諸優點，仍儘量予以保持，惟於書中着重之點，酌量爲之變更，務求其更適於實用而已。研究三角術，三角函數最爲重要，原書以三角函數與直角三角形合爲一章，茲特分別論之，俾三角函數之功用尤覺簡單明瞭。至於三角函數之應用，詳見第四第五兩章，附之以對數算法之練習。再後一章爲三角術之解析，內容亦多改變，藉增讀者之所好，而尤注意於三角恆等式與三角方程式之改訂。依此改訂之後，讀者未研究三角解析法之前，即足以實地應用矣。

本書之附錄仍爲四位數字表，與葛氏原書同。其不同者，僅在增加表四與表五，備載正弦餘弦及正切餘切之真數，並加用表法之說明耳。凡此諸表，在計算中可得四位準確數字，亦與原書無異。惟此處又着重說明所加之表，其數值皆爲四位有效數字，或如何求得四位有效數字之方法。

本書所列之問題亦與原書同，角之大小均以度與分，及度與度之小數表示之。至於角之量法可留待教者自行選擇之，好在所附諸表足供任何問題之用也。

Percey F. Smith,

James S. Milkesh.

目次

第一章 三角函數

節	頁
1. 三角術	1
2. 變數;常數	1
3. 函數	1
4. 銳角之三角函數	2
5. $45^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ 之函數	5
6. 作圖;量角器	9
7. 三角函數之數值表	9
8. 角之構成	12
9. 正角與負角	12
10. 任意大小之角	13
11. 四象限	13
12. 平面上一點之直角坐標	14
13. 任意角之三角函數	16
14. 三角函數之代數符號	18
15. 應用	19
16. 以一函數表其他五函數法	26

第二章 基本關係;簡化公式

17. 基本關係	29
18. 任一函數以其餘五函數表示之法	32
19. 以零除之;無限大	36
20. $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ 之函數	37
21. 角之量法	38
22. 弧度法	39
23. 化三角函數爲銳角之函數法	44
24. 餘角之函數	44
25. 化第二象限內角之公式	45

26. 化第三象限內角之公式	49
27. 化第四象限內角之公式	51
28. 負角函數之化法	54
29. 化任何角函數爲銳角函數之通則	56

第三章 線之定義與圖解

30. 三角函數之線之定義	61
31. 角變時函數值之變化	63
32. 函數之圖解	66
33. 三角函數之圖解	68
34. 三角函數之周期性	70
35. 用單位圓作三角函數之圖解	71

第四章 應用

36. 本章之目的;用近似數之計算	75
37. 關於直角三角形之問題	77
38. 正弦與餘弦之數值表;補間法	83
39. 正切與餘切之數值表	85
40. 三角應用題中習見之名詞	86
41. 斜三角形之解法	91
42. 正弦定律	92
43. 已知兩邊及一對角時之兩可問題	94
44. 正切定律	99
45. 餘弦定律	102
46. 以三角形三邊表其半角之三角函數	106
47. 求斜三角形面積之公式	111
48. 結論	113

第五章 對數之理論與用途

49. 三角術中對數之需要	114
50. 對數之定理	117
51. 常用對數	119
52. 決定常用對數指標之規則	121

53. 對數表	123
54. 由真數求對數法	124
55. 由對數求真數法	128
56. 用對數演算法	129
57. 餘對數	131
58. 對數底之改變	134
59. 指數方程式	135
60. 三角函數之對數表	137
61. 表 II 之用法, 其已知角或所求角以度及分表示者	138
62. 求一角函數之對數其角係以度及分表示者	139
63. 已知函數之對數, 求角之度數及分數法	140
64. 表 III 之用法, 已知角或所求角以度及度之小數表示者	144
65. 用對數解直角三角形法	147
66. 用對數解斜三角形法	153
67. 用對數求斜三角形面積法	166
68. 測量地積法	169
68. 平行航海術	170
70. 平面航海術	172
71. 中緯線航海術	173

第六章 三角術之解析

72. 兩角之和與差之函數	176
73. 兩角之和之正弦與餘弦	176
74. 兩角之差之正弦與餘弦	180
75. 兩角之和與差之正切與餘切	182
76. 以一角之函數表其二倍角之函數	185
77. 倍角之函數	185
78. 以半角之函數表其角之函數	187
79. 以一角之餘弦表其半角之函數	188
80. 函數之和及差	189
81. 三角恆等式	193
82. 三角方程式	197
83. 三角方程式解法之指示	198

84. 已知一函數求其角之普遍公式	202
85. 反三角函數	205

第七章 近於 0° 或 90° 之銳角

86. 極小角之弧度略等於其正弦與正切	211
87. 近於 0° 及 90° 正銳角之函數	212
88. 求近於 0° 之銳角函數之法則	213
89. 求近於 90° 之銳角函數之法則	214
90. 求近於 0° 及 90° 角之函數對數之法則	215

第八章 公式之複述

平面三角術公式表	223
直角三角形	223
函數間之基本關係	223
正弦定律	224
正切定律	224
餘弦定律	224
以三角形三邊表其半角之函數	224
三角形之面積	225
兩角和與差之函數	225
二倍角之函數	225
一角之函數以其半角之函數表示者	225
半角之函數	226
函數之和與差	226
索引	227

平面三角術

第一章

三角函數

1. 三角術 三角術爲研究三角函數之算學。本章之目的乃在解釋此等函數之定義，並詳論其初步之應用。

2. 變數；常數 凡問題中所包含之數量，有爲變數者，亦有爲常數者，故二者之區別，當先確切明瞭。所謂變數，即在問題中之一數量，其值可以多至無限者，通常每以 x, y, z 等末數字母表示之。

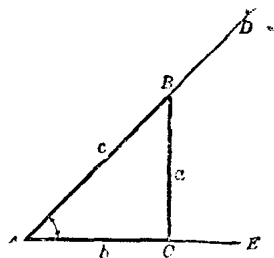
所謂常數，即在問題中之數量，其值乃固定不變者。如 $2, 5, \sqrt{7}, \pi$ 等，在一切問題中，常保持同一之值而絕不改變者，謂之數字常數，亦稱絕對常數。另有所謂不定常數者，其值雖任意選定，但在特定問題中，其值亦係固定不變。常數每以英文 a, b, c 等首數字母表示之。

3. 函數 一變數之函數爲一數量，其值視變數之值如何而定。例如正方形之面積爲其邊長之函數，球之體積爲其直徑之函數。同理，三項式 $x^2 - 7x - 6$ 爲 x 之函數，因此式之值

視 x 之值而定也。在三角函數中，變數即為角之度量，而函數之值即視角之大小而定。現時先以度數為單位，計量角之大小，以後尚須論及第二種量角之方法。

4. 銳角之三角函數 學者既於平面幾何學中獲有二線相交成角之概念，茲先就銳角討論之。

設 EAD 為一小於 90° 之銳角，由此角一邊之任一點 B 作垂直於另一邊之直線，而成一直角三角形 ABC 。今以 A, B, C 表此直角三角形之各角，以 a, b, c 表此直角三角形各角對邊之長度。^{*}吾人在幾何學中，已知三角形之邊與角有相互之關係。今於三角術中，即將應用各邊之比，顯示此種關係之正確性質。此各邊之比稱為三角函數。任一銳角均有六種三角函數，茲以 A 為例，表之如下：



- $\sin A$ 讀如 A 之正弦 (sine of A);
- $\cos A$ 讀如 A 之餘弦 (cosine of A);
- $\tan A$ 讀如 A 之正切 (tangent of A);
- $\csc A$ 讀如 A 之餘割 (cosecant of A);
- $\sec A$ 讀如 A 之正割 (secant of A);
- $\cot A$ 讀如 A 之餘切 (cotangent of A).

此等三角函數(比)之定義如下(見上圖):

^{*} 以後，若無其他說明，凡直角三角形之斜邊，以小楷 c 表之，直角則以大楷 C 表之。

$$(1) \sin A = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}} \left(= \frac{a}{c} \right); \quad (4) \csc A = \frac{\text{斜邊}}{\text{對邊}} \left(= \frac{c}{a} \right);$$

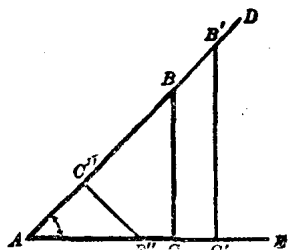
$$(2) \cos A = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}} \left(= \frac{b}{c} \right); \quad (5) \sec A = \frac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}} \left(= \frac{c}{b} \right);$$

$$(3) \tan A = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}} \left(= \frac{a}{b} \right); \quad (6) \cot A = \frac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}} \left(= \frac{b}{a} \right).$$

最應注意者，任一函數之數值，僅視 A 角之大小而定，與所取垂線起點 B 之位置無關。證之如次：

設 B' 為 AD 上之任一點， B'' 為 AE 上之任一點，作 $B'C'$ 垂直於 AE ，作 $B''C''$ 垂直於 AD 。則三角形 ABC ， $AB'C'$ 及 $AB''C''$ 三者，因各有一角為直角，且有一公共角 A ，故互相等角，而為相似三角形。於是

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'} = \frac{B''C''}{AB''}.$$



凡此諸比，皆為 A 角的正弦。同理，可證其他函數亦具此種性質。由此可見角之函數與直角三角形之大小無關，所重要者則在三角形各邊之相互關係，而非各邊之真正長度。

學者更應注意，若 A 角之大小改變時，則上列六比之比值將隨同改變。

此等函數(比)為研究三角術之基本要素。假若對此六種函數，不能徹底瞭解，即無法再作進一步之研究。惟此等函數極易記憶，學者祇須注意第一行內之三函數各為第二行內三函數之倒數。因

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{1}{\csc A};$$

$$\csc A = \frac{c}{a} = \frac{1}{\frac{a}{c}} = \frac{1}{\sin A};$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{1}{\frac{c}{b}} = \frac{1}{\sec A};$$

$$\sec A = \frac{c}{b} = \frac{1}{\frac{b}{c}} = \frac{1}{\cos A};$$

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{\cot A};$$

$$\cot A = \frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{\tan A}.$$

設將定義(1)至(6)應用於前圖之銳角 B . 則對邊 $= AC = b$,
鄰邊 $= BC = a$, 故

$$\sin B = \frac{b}{c}; \quad \cos B = \frac{a}{c}; \quad \tan B = \frac{b}{a};$$

$$\csc B = \frac{c}{b}; \quad \sec B = \frac{c}{a}; \quad \cot B = \frac{a}{b}.$$

再與 A 角之函數比較, 則得

$$\sin A = \cos B; \quad \cos A = \sin B; \quad \tan A = \cot B;$$

$$\csc A = \sec B; \quad \sec A = \csc B; \quad \cot A = \tan B.$$

因 $A + B = 90^\circ$ (即 A 與 B 互為餘角), 故以上結果可歸納如下:

定理 一銳角之函數等於其餘角之餘函數.*

上述定理用式表之如下:

$$\sin A = \cos(90^\circ - A); \quad \csc A = \sec(90^\circ - A);$$

$$\cos A = \sin(90^\circ - A); \quad \sec A = \csc(90^\circ - A);$$

$$\tan A = \cot(90^\circ - A); \quad \cot A = \tan(90^\circ - A).$$

例 1. 在一直角三角形中, $a=3$, $b=4$. 求 A 角之諸函數.

解 $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$

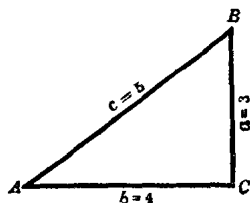
應用(1)至(6)諸式, 得

* 正弦與餘弦互稱為餘函數. 同樣正切與餘切, 正割與餘割, 亦互稱為餘函數.

$$\sin A = \frac{3}{5}; \quad \csc A = \frac{5}{3};$$

$$\cos A = \frac{4}{5}; \quad \sec A = \frac{5}{4};$$

$$\tan A = \frac{3}{4}; \quad \cot A = \frac{4}{3}.$$



再求 B 角之諸函數，並比較其結果。

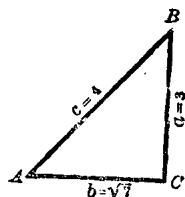
例 2. 在一直角三角形中， $a=3$ ， $c=4$ 。求 B 角之諸函數。

解 $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$ 。

$$\sin B = \frac{\sqrt{7}}{4} = 0.66; \quad \csc B = \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7} = 1.51;$$

$$\cos B = \frac{3}{4} = 0.75; \quad \sec B = \frac{4}{3} = 1.33;$$

$$\tan B = \frac{\sqrt{7}}{3} = 0.88; \quad \cot B = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7} = 1.14.$$



再求 A 角之諸函數，並比較其結果。

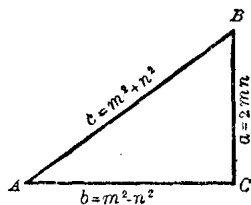
例 3. 在一直角三角形中， $a=2mn$ ， $b=m^2-n^2$ 。求 A 角之諸函數。

解 $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4m^2n^2 + m^4 - 2m^2n^2 + n^4}$
 $= \sqrt{m^4 + 2m^2n^2 + n^4} = m^2 + n^2.$

$$\sin A = \frac{2mn}{m^2 + n^2}; \quad \csc A = \frac{m^2 + n^2}{2mn};$$

$$\cos A = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}; \quad \sec A = \frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2};$$

$$\tan A = \frac{2mn}{m^2 - n^2}; \quad \cot A = \frac{m^2 - n^2}{2mn}.$$



例 4. 在一直角三角形中，已知 $\sin A = \frac{4}{5}$ 及 $a=80$ ；求 c 。

解 由 (1) 式可知 $\sin A = \frac{a}{c}$ 。

以 $\sin A$ 及 a 之值代入，得 $\frac{4}{5} = \frac{80}{c}$ ；

解之 $c=100$ 。(答)

5. 45° , 30° , 60° 之函數 此等銳角常發見於用三角術計算之習題中，故須求得其三角函數值而熟記之。

(a) 求 45° 之函數 作一等腰直角三角形 ABC 。則

$$\angle A = \angle B = 45^\circ.$$

因三角函數重在各邊之比，而與各邊之真正長度與涉，故可以任何長度給與等腰直角三角形之二邊，祇須二長度相等即可。

• 設最短邊之長為 1，即 $a=1$ ，及 $b=1$ 。

則 $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$ ，得

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

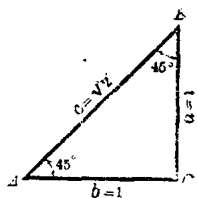
$$\csc 45^\circ = \sqrt{2};$$

$$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\sec 45^\circ = \sqrt{2};$$

$$\tan 45^\circ = 1;$$

$$\cot 45^\circ = 1.$$

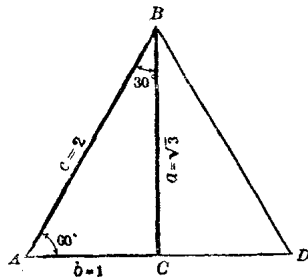


(b) 求 30° 及 60° 之函數 作一等邊三角形，如 ABD 。自 B 作垂線 BC 至 AD ，即得三角形 ABC ，其中 $\angle A = 60^\circ$ ， $\angle ABC = 30^\circ$ 。

再設最短之一邊為一，即命 $b=1$ 。

則 $c = AB = AD = 2AC = 2b = 2$ ，

及 $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$ 。故



$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\sec 60^\circ = 2;$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3};$$

$$\cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

同理,由此同一三角形得

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\csc 30^\circ = 2;$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\cot 30^\circ = \sqrt{3}.$$

茲將以上結果列表於下:*

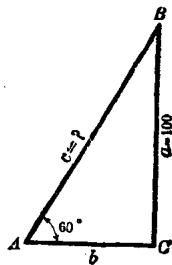
角	sin	cos	tan	cot	sec	csc
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

學者對於 45°, 30°, 及 60° 直角三角形應極熟習, 即不記上表, 亦可直接由心中意像之直角三角形, 求得各函數之值.

例 在一直角三角形中, 已知 $A=60^\circ$, $a=100$; 求 c .

解 因 A 角已知, 即 A 角之任何函數亦為已知, 但僅 A 角之餘割含有已知數 a 及未知數 c , 故可用公式 (4) 以求 c .

$$\csc A = \frac{c}{a}.$$



* 記憶時, 當注意第一行(即正弦)各數, 係 $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 各除以 2.

第二行(即餘弦)各數, 係顛倒排列第一行各數之次序而得.

第三行(即正切)各數, 係第一行各數各以第二行之各數除之而得.

以 $a=100$ 及由上表得 $\csc A = \csc 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 代入上式, 則得

$$c = \frac{200\sqrt{3}}{3} = 111.5. \quad (\text{答})$$

B 角之值為何? 並依上法求證 $b=57.7$.

習 題

下列各題, 均限於直角三角形, 答案則依正弦, 餘弦, 正切之次序排列之。

1. 已知 $a=8$, $b=15$; 求 A 角諸函數。

$$(\text{答}) \sin A = \frac{8}{17}, \cos A = \frac{15}{17}, \tan A = \frac{8}{15}, \text{等}.$$

2. 已知 $b=5$, $c=13$; 求 B 角諸函數。

3. 已知 $a=0.6$, $b=0.8$; 求 B 角諸函數。

$$(\text{答}) \sin B = 0.8, \cos B = 0.6, \tan B = 1.3, \text{等}.$$

4. 已知 $b=2$, $c=\sqrt{11}$; 求 A 角諸函數。

5. 已知 $a=5$, $c=7$; 求 B 角諸函數。

$$(\text{答}) \frac{2\sqrt{6}}{7}, \frac{5}{7}, \frac{2\sqrt{6}}{5}, \text{等}.$$

6. 已知 $a=p$, $b=q$; 求 A 角諸函數。

7. 已知 $a=\sqrt{m^2+mn}$, $c=m+n$; 求 A 角諸函數。

$$(\text{答}) \frac{\sqrt{m^2+mn}}{m+n}, \frac{\sqrt{mn+n^2}}{m+n}, \frac{1}{n}\sqrt{mn}, \text{等}.$$

8. 已知 $\sin A = \frac{3}{5}$, $c=200.5$; 求 a 。

9. 已知 $\cos A = 0.44$, $c=30.5$; 求 b 。

$$(\text{答}) 13.42.$$

10. 已知 $\tan A = \frac{11}{3}$, $b = \frac{27}{11}$; 求 c 。

11. 已知 $\tan B = k$, $a=r$; 求 c 。

$$(\text{答}) r\sqrt{k^2+1}.$$

12. 設 $b=2a$, 求 A 之函數, 問答案中何以既無 a 又無 b ?

13. 一直角三角形之斜邊, 三倍於其一腰之長; 求此腰對角之諸函數。

問答案何以與此腰之長度無關?

$$(\text{答}) \frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \text{等}.$$

14. 設直角三角形之一腰為 16, 其對角之餘切為 $\frac{3}{4}$, 求他一腰之長。

15. 已知 $A=30^\circ$, $a=25$; 求 c , B , 及 b . (答) $c=50$, $B=60^\circ$, $b=25\sqrt{3}$.

16. 已知 $B=30^\circ$, $c=48$; 求 b , A , 及 a .

17. 已知 $B=45^\circ$, $b=20$; 求 c , A , 及 a , (答) $c=20\sqrt{2}$, $A=45^\circ$, $a=20$.

18. 設一直角三角形之一腰, 爲另一腰之 $\sqrt{3}$ 倍, 則此三角形之兩銳角各爲若干?

19. 一直角三角形之斜邊, $\sqrt{2}$ 倍於一腰之長, 則此三角形之兩銳角各爲若干? (答) 45° , 45° .

20. 設 $\sec B = \frac{2}{3}\sqrt{8}$ 及 $c=48$, 求 B , A , a , 及 b .

21. 設 $A=30^\circ$; 45° ; 60° ; 求 $\sin^2 A + \cos^2 A$ 之值. (答) 1.

22. 求證 $\cos 60^\circ = 2 \cos^2 30^\circ - 1$.

23. 求證 $\tan 30^\circ = \frac{\sec 60^\circ}{(\sec 60^\circ + 1) \csc 60^\circ}$

24. 試將下列各函數以其餘角之函數表之:

(a) $\tan 30^\circ$.

(d) $\sin 33^\circ 33'$.

(b) $\cos 20^\circ$.

(e) $\csc 72^\circ 17.3'$.

(c) $\sec 81^\circ$.

25. 試證以下各題:

(a) $\sin 32^\circ - \cos 58^\circ = 0$.

(b) $\csc 12^\circ + \sec 78^\circ = 2 \csc 12^\circ = 2 \sec 78^\circ$.

26. 設 $\sin 2A = \cos 3A$; 求此直角三角形之銳角 A 及 B .

27. 若 $\tan(30^\circ - x)$ 等於 $\cot(30^\circ + 3x)$, 則銳角 x 之值應如何? (答) 15° .

6. 作圖;量角器 初學三角之學者,對於問題中之圖形繪畫愈精確愈佳.此不僅便利於習題本身之瞭解,且可使三角函數之意義更覺清楚,並可大略檢核所得結果之是否準確.作圖所需之儀器,爲一刻度尺,及一量角器.量角器乃計量角度大小之儀器,爲繪角必需之用具.

7. 三角函數之數值表 30° , 45° , 及 60° 角之函數,已詳第5節.至其他銳角函數計算之法,見程度較深之書中,茲不贅.