·内部教材·

# 高等代数教程

（下　　册）

中国人民解放军工程技术学院

1977年8月

# 目　录

# 第五章　多项式

## §1．一元多项式及其运算

**定义**：设$a_0$，$a_1$，$a_2$，……，$a_n$为域$P$中的元素（$n$是非负整数），表达式：

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_0 \quad (x\text{表示未知数})$$

叫做域$P$上的**一元多项式**。

$a_0$，$a_1$，……，$a_n$叫做多项式$f(x)$的**系数**，$a_i x^i$叫做**i次项**，零次项$a_0$又叫做**常做项**，当$a_n \neq 0$时，$n$叫做多项式$f(x)$的**次数**，记做$\partial[f(x)]=n$。

系数全等于零的多项式叫做**零多项式**，记做0；零多项式的次数没有意义。只含非零常数的多项式，叫做**零次多项式**。

如果两个多项式$f(x)$，$g(x)$的同次项系数皆相等，那么就叫做多项式$f(x)$与$g(x)$相等，记做$f(x)=g(x)$。

使多项式为零的$x$的值，叫做该多项式的根，例如$x=-2$是多项式$x^3+3x^2-2x-8$的根。

在模2域上的多项式，各项系数只能是零或1，例如模2域上三次项、五次项为零的多项式为：

$$x^7+x^6+x^4+x^2+x+1$$

**一．多项式的运算**：

域$P$上的任意两个一元多项式都可以相加、相减、相乘，其结果仍为域$P$上的一个一元多项式，具体算法如下：

**1°加（减）法**：**两个多项式相加（或相减），把它们的同次**

**项系数相加(或相减)。**

**例 1.** 在有理数域上，设：

$$f(x)=x^3+8x^2-3x-7$$

$$g(x)=2x^4-3x^2+2x-1$$

则：

$$f(x)+g(x)=2x^4+x^3+5x^2-x-8$$

$$f(x)-g(x)=-2x^4+x^3+11x^2-5x-6$$

由加减法的运算不难看出：**两个多项式的和(或差)的次数，不超过这两个多项式的最高次数。即：**

$$\partial[f(x)\pm g(x)]\leqslant\max\{\partial[f(x)],\ \partial[g(x)]\}$$

**其中max表后面括号中最大的一个。**

在模 2 域上，作减法和作加法没有区别，因此两个模 2 域上的多项式作减法时，也改为作加法。

**例 2.** 设模 2 域上二多项式为：

$$f(x)=x^5+x^4+x^2+x+1$$

$$g(x)=x^4+x^3+x^2+1$$

则：

$$f(x)+g(x)=f(x)-g(x)=x^5+x^3+x$$

用竖式表示可写为：

$$\begin{array}{rcccccc}
 & x^5 & +x^4 & +0 & +x^2 & +x & +1 \\
+) & & x^4 & +x^3 & +x^2 & +0 & +1 \\
\hline
 & x^5 & +0 & +x^3 & +0 & +x & +0
\end{array}$$

为方便起见，在竖式中，可以省去文字$x$不写，只写出系数，但一定要把 0 系数补全，如例 2 可写为：

$$\begin{array}{rcccccc}
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
+) & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}$$

即得：$f(x)+g(x)=x^5+0+x^3+0+x+0$

$$=x^5+x^3+x \qquad \text{（模 2 域）}$$

**$2^\circ$乘法：两个多项式相乘，用一个乘式的各项逐一乘另一乘式的各项，然后，再合并同类项。**

**例 3**：在有理数域上，设：$f(x)=3x^2+2x-1$，$g(x)=2x-3$，求 $fg$。

**解**：
$$\begin{aligned} fg &= (3x^2+2x-1)(2x-3) \\ &=6x^3+4x^2-2x-9x^2-6x+3 \\ &=6x^3-5x^2-8x+3 \end{aligned}$$

用竖式计算：

$$\begin{array}{rrrr} & & 3x^2+2x-1 \\ \times) & & 2x-3 \\ \hline & 6x^3+4x^2-2x & \\ & -9x^2-6x+3 & \\ \hline & 6x^3-5x^2-8x+3 & \end{array}$$

所以 $fg=6x^3-5x^2-8x+3$

在模 2 域上，计算两多项式相乘时，方法基本一样，用竖式计算时，仍可省去$x$不写。

**例 4**．在模 2 域上，设：$f(x)=x^5+x^3+x^2+1$，$g(x)=x^3+x$，求 $fg$。

**解**：
$$\begin{aligned} fg &= (x^5+x^3+x^2+1)(x^3+x) \\ &=x^8+x^6+x^5+x^3+x^6+x^4+x^3+x \\ &=x^8+x^5+x^4+x \end{aligned}$$

用竖式计算：

$$
\begin{array}{rcccccccc}
 & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\times) & & & & & 1 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \\
+) & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & & & \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 &
\end{array}
$$

所以： $f\ g=x^8+x^5+x^4+x$

关于乘积的次数与二乘式次数间的关系有：

**定理5.1** 当 $f(x)\neq 0$，$g(x)\neq 0$ 时，其乘积 $f(x)g(x)$ 也不为零，且它的次数等于 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的次数和。即：

$$\partial[f(x)\ g(x)]=\partial[f(x)]+\partial[g(x)]$$

**证：** 设：$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$

$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots\cdots+b_1x+b_0$$

因为 $f(x)\neq 0$，$g(x)\neq 0$，所以不妨设 $a_n\neq 0$，$b_m\neq 0$，于是 $f(x)\,g(x)$ 的最高次项为： $a_nb_mx^{n+m}$

当然 $a_nb_m\neq 0$，所以 $f(x)g(x)\neq 0$，且其次数为 $n+m$，即：

$$\partial[fg]=\partial[f]+\partial[g]$$

**推论：多项式乘积的最高次项系数，等于二乘式最高次项系数的乘积。**

综上，在域 $P$ 上的两个一元多项式，其和、差、积仍为域 $P$ 上的一元多项式。换句话说，即域 $P$ 上的一元多项式对加、减、乘法是封闭的。我们规定：

**定义：** 所有系数在域 $P$ 上的一元多项式的全体，并考虑到它们的加、减、乘三种运算，称为域 $P$ 上的**一元多项式环**，记数 $P[x]$。

3° **除法**：同两个整数相除一样，两个多项式相除，并不一定总能够得到一个多项式，往往带有余式，举例如下：

**例 5**．在有理数域上，求：$(2x^4+3x^2-2x+1)\div(x^2-x+5)$

**解**：用竖式：

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2+2x-5 \\
\cline{2-2}
x^2-x+5 & 2x^4+0+3x^2-2x+1 \\
 & \underline{2x^4-2x^3+10x^2} \\
 & \quad 2x^3-7x^2-2x \\
 & \quad \underline{2x^3-2x^2+10x} \\
 & \qquad -5x^2-12x+1 \\
 & \qquad \underline{-5x^2+5x-25} \\
 & \qquad\qquad -17x+26
\end{array}
$$

所以：$(2x^4+3x^2-2x+1)\div(x^2-x+5)$

$=2x^2+2x-5\cdots-17x+26$

两个模 2 域上的多项式相除时，运算方法和例 5 基本一样，在用竖式计算时，文字$x$也可略去不写。

**例 6**．在模 2 域上，求：

$$(x^4+x^2+x+1)\div(x^3+x^2+1)$$

**解**：用竖式：

$$
\begin{array}{r|ccccc}
 & & & & 1 & 1 \\
\cline{2-6}
1\ 1\ 0\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 & 1 & 1 & 0 & 1 & \\
\cline{2-6}
 & & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\cline{2-6}
 & & & & & 0
\end{array}
$$

所以， $(x^4+x^2+x+1)\div(x^3+x^2+1)=x+1$ （模2域）

**例7．在模2域上，求：**

$$(x^5+x^4+x^2+x+1)\div(x^3+x^2+x)$$

**解：**用竖式：

```
                     1  0  1
            ____________________
1 1 1 0    |  1  1  0  1  1  1
              1  1  1  0
             ____________________
                    1  1  1  1
                    1  1  1  0
             ____________________
                             1
```

所以：$(x^5+x^4+x^2+x+1)\div(x^3+x^2+x)$

$=x^2+1\cdots1$ （模2域）

同整数带余除法一样，我们有：

**定理5．2 对环P〔x〕中任意两个多项式f(x)，g(x)（其中g(x)≠0），在P〔x〕中一定有多项式q(x)，r(x)存在，使得：**

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x) \qquad (1)$$

**成立，其中或者r(x)的次数小于g(x)的次数，或者r(x)＝0，并且这样的q(x)，r(x)是唯一的。**

**证：**

1）当$f(x)=0$时，可取$q(x)=r(x)=0$ 即：

$$f(x)=0\cdot g(x)+0$$

定理成立。

2）当$f(x)\neq0$时，

设$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_0 \qquad (a_n\neq0)$

$$g(x)=b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots\cdots+b_0 \qquad (b_m\neq 0)$$

如果$n<m$，则可取$q(x)=0$，$r(x)=f(x)$，即有：

$$f(x)=0\cdot g(x)+r(x)$$

定理成立。如果$n\geqslant m$，则对$f(x)$的次数$n$作第二数学归纳法：当$n=0$时，$m=0$，定理显然成立。假设当$f(x)$的次数小于$n$时，定理已经成立，现在证明当$f(x)$的次数为$n$时，定理也成立。

我们用$g(x)$试除一下$f(x)$：

$$\begin{array}{r|l}
 & \dfrac{a_n}{b_m}x^{n-m} \\
b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0 & \overline{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0} \\
 & a_n x^n+\cdots\cdots\leftarrow\dfrac{a_n}{b_m}x^{n-m}g(x)
\end{array}$$

显然，商的最高次项应为$\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$，而$\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}g(x)$与$f(x)$的最高次项相同，我们令：

$$f(x)-\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}g(x)=f_1(x) \qquad (2)$$

那么，多项式$f_1(x)$的次数小于$n$，根据归纳法假设，对于$f_1(x)$和$g(x)$有$q_1(x)$，$r_1(x)$存在，使得：

$$f_1(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)$$

其中$\partial[r_1(x)]<\partial[g(x)]$或$r_1(x)=0$。

把$f_1(x)$代入式（2）：

$$f(x)-\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}g(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)$$

即：
$$f(x)=q_1(x)g(x)+\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}g(x)+r_1(x)$$

$$=\left[q_1(x)+\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}\right]g(x)+r_1(x)$$

令：$q_1(x)+\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}=q(x)$，$r_1(x)=r(x)$

于是有：$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$，其中$\partial[r(x)]<\partial[g(x)]$，或$r(x)=0$。定理5.2的存在性得证。

下面证明唯一性：设另有多项式$q'(x)$，$r'(x)$，使：

$$f(x)=q'(x)g(x)+r'(x)$$

其中$\partial[r'(x)]<\partial[g(x)]$或$r'(x)=0$

因为$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$，又$f(x)=q'(x)g(x)+r'(x)$

所以：$q(x)g(x)+r(x)=q'(x)g(x)+r'(x)$

于是：$[q(x)-q'(x)]g(x)=r'(x)-r(x)$

如果$r'(x)\neq r(x)$，即$r'(x)-r(x)\neq 0$又$g(x)\neq 0$，故$q(x)-q'(x)\neq 0$，比较上式两边的次数，根据二多项式相乘次数相加的性质，应有：

$$\partial[q'(x)-q(x)]+\partial[g(x)]=\partial[r'(x)-r(x)]$$

但因：　$\partial[r(x)]<\partial[g(x)]$，　$\partial[r'(x)]<\partial[g(x)]$

所以　$\partial[r'(x)-r(x)]<\partial[g(x)]$，故上式两边次数不可能一样，因此必有：$r'(x)-r(x)=0$

即：　$r'(x)=r(x)$

于是：　$[q'(x)-q(x)]g(x)=0$

而$g(x)\neq 0$，故$q'(x)-q(x)=0$

即：　$q'(x)=q(x)$

综上证明了唯一性。

**二。多项式的整除性：**

**定义：** 对$P[x]$中任意二多项式$f(x)$，$g(x)$，如果在$P[x]$

中能找到多项式$q(x)$，使等式：

$$f(x)=g(x)q(x)$$

成立，则叫做$f(x)$是$g(x)$的**倍式**，或叫$g(x)$是$f(x)$的**因式**。又当$g(x)\neq 0$时，则叫做$g(x)$能**够整除**$f(x)$，记做$g(x)\mid f(x)$，$g(x)$不能整除$f(x)$时记做$g(x)\nmid f(x)$。

根据定义，任意一个非零多项式$f(x)$一定能整除它自身，即：$f(x)\mid f(x)$；又零多项式能被任一非零多项式$f(x)$整除，因为$0=0\cdot f(x)$，零次多项式$a$($a$为非零常数)能整除任一多项式$f(x)$，因为$f(x)=a\cdot\frac{1}{a}f(x)$，等等。

**整除性质：**

1° 如果$g(x)\mid f(x)$，$f(x)\mid g(x)$，则$f(x)=cg(x)$($c$为非零常数，$f(x)$，$g(x)$皆不为零。)

**证**：因为$g(x)\mid f(x)$，所以$f(x)=q_1(x)g(x)$

又因为$f(x)\mid g(x)$，所以$g(x)=q_2(x)f(x)$

把$g(x)$代入上式，于是有$f(x)=q_1(x)q_2(x)f(x)$

因$f(x)\neq 0$，则在上式中消去$f(x)$，得：

$$q_1(x)q_2(x)=1$$

根据多项式乘积的次数为二因式次数的和，有：

$$\partial[q_1(x)]+\partial[q_2(x)]=0$$

因为次数皆为非负整数，二非负整数的和为零，必皆为零，即：

$$\partial[q_1(x)]=\partial[q_2(x)]=0$$

于是$q_1(x)$是一个非零常数，即$f(x)=q_1(x)g(x)=cg(x)$。

2° **整除的传递性：**

**如果$f(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid h(x)$，则$f(x)\mid h(x)$($f(x)$，$g(x)$皆不为零)。**此性质很容易证明，留给大家去完成。

**3°如果$g(x)\mid f_i(x)$　($i=1,2,\cdots\cdots,n$　$g(x)\neq 0$)，则$g(x)\,\Big|\,\sum\limits_{i=1}^{n}u_i(x)f_i(x)$（其中$u_i(x)$（$i=1$、2、……，$n$）是域P上的任意多项式）。**

**证：**因$g(x)\mid f(x)$　($i=1$，2，……，$n$)，故：

$$f(x)=q(x)g(x)\quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,n)$$

于是 $\sum\limits_{i=1}^{n}u(x)f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}u(x)q(x)g(x)$

$$=g(x)\sum_{i=1}^{n}u(x)q(x)$$

所以：$g(x)\,\Big|\,\sum\limits_{i=1}^{n}u(x)f(x)$

**推论：在$P[x]$中，任一多项式$f(x)$必与$cf(x)$($c$为非零常数)有相同的因式和倍式。**

**证：**不妨设$f(x)\neq 0$，设$g(x)$为$f(x)$的任一因式，即$g(x)\mid f(x)$，根据整除性质3°有：　　$g(x)\mid cf(x)$
于是$g(x)$为$cf(x)$的因式。反过来，$cf(x)$的任一因式$h(x)$（$c$为非零常数），因$h(x)\mid cf(x)$，且$c$为非零常数，显然：$h(x)\mid f(x)$，即$f(x)$与$cf(x)$有相同的因式。

关于$f(x)$与$cf(x)$（$c$为非零常数）有相同倍式证法完全类似。略。

## §2. 最大公因式和最小公倍式

### 一. 最大公因式：

**定义：**设$f(x)$与$g(x)$是域$P$上的任意两个多项式，如果

域$P$上的另一多项式$\varphi(x)$既是$f(x)$的因式，又是$g(x)$的因式，则叫$\varphi(x)$是$f(x)$，$g(x)$的**公因式**。

两个多项式的公因式总是可以找到的，因为每一个零次多项式都是$f(x)$与$g(x)$的公因式。一般来讲，公因式也不只一个，如在模2域上，设$f(x)=x^3+1$，$g(x)=x^6+x^3+x^2++1$，则$\varphi_1(x)=1$，$\varphi_2(x)=x+1$，$\varphi_3(x)=x^2+x+1$，$\varphi_4(x)=x^3+1$等都是他们的公因式（可用除法加以验证）。

**定义**：设$f(x)$，$g(x)$，$d(x)$皆为域$P$上的多项式，且$d(x)$满足：

1° $d(x)$是$f(x)$、$g(x)$的公因式。

2° 当$d(x)\neq 0$时，其最高次项系数为1。

3° $f(x)$、$g(x)$的所有公因式全是$d(x)$的因式。

则叫$d(x)$为$f(x)$，$g(x)$的**最大公因式**，记做$d(x)=(f,g)$。

根据最大公因式定义有：当多项式$f$最高次项系数为1时有：$(f,0)=f$；又$(0,0)=0$

**定理5.3　对于环P〔x〕中任意两个多项式f(x)，g(x)，在P〔x〕中一定有最大公因式d(x)存在且唯一，并d(x)可表成：　　d(x)＝u(x)f(x)＋v(x)g(x)**

**其中：u(x)∈P〔x〕，v(x)∈P〔x〕**

**证**：先证$d(x)$一定存在，且在环$P[x]$中可找到$u(x)$，$v(x)$，使：

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$$

如果$g(x)=0$，则$d(x)=f(x)$，且$d(x)=1\cdot f(x)+1\cdot 0$，定理结论成立，故可设$g(x)\neq 0$，根据定理5.2，在环$P[x]$中必可找到二多项式$q_1(x)$，$r_1(x)$，使：

$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)\quad [\partial(r_1(x))<\partial(g(x))]$$

如果$r_1(x)\neq 0$，用$r_1(x)$除$g(x)$得：

$$g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x) \quad [\partial(r_2(x))<\partial(r_1(x))]$$

如果$r_2(x)\neq 0$，用$r_2(x)$除$r_1(x)$，这样继续下去，因为$r\ (x)$（$i=1$，2，…）次数越来越低，故经过有限次这种步骤，必得某一余式$r_{\ +1}(x)$为零，即有：

$$
\begin{aligned}
&f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)\\
&g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x)\\
&\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots\\
&r_{\ -3}(x)=q\ (x)r_{\ -1}(x)+r\ (x) \qquad\qquad (1)\\
&\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots\\
&r_{\ -2}(x)=q\ (x)r_{\ -1}(x)+r\ (x)\\
&r_{\ -1}(x)=q_{\ +1}(x)r\ (x)+r_{\ +1}(x) \qquad (r_{\ +1}(x)=0)
\end{aligned}
$$

由最后一个等式知$r\ (x)\mid r_{\ -1}(x)$，根据$r\ (x)$能整除倒数第二个等式右边的两项，知$r\ (x)\mid r_{\ -2}(x)$；……这样逐步推上去，可知$r\ (x)\mid g(x)$，$r\ (x)\mid f(x)$，即$r\ (x)$为$f(x)$和$g(x)$的公因式。

另一方面，设$f(x)$，$g(x)$的任一公因式为$h(x)$，根据（1）中第一个等式，因为$h(x)\mid f(x)$，$h(x)\mid g(x)$，所以$h(x)\mid r_1(x)$；再利用第二个等式，因为$h(x)\mid g(x)$，$h(x)\mid r_1(x)$，所以$h(x)\mid r_2(x)$；……这样逐步推下去，最后得出$h(x)\mid r\ (x)$，即$f(x)$、$g(x)$的任一公因式都能整除$r\ (x)$，如果$r\ (x)$最高次项系数为$a(a\neq 0)$，则$\frac{1}{a}r\ (x)$即是$f(x)$，$g(x)$的最大公因式。

由等式（1）中倒数第二个等式，我们有：

$$r\ (x)=r_{\ -2}(x)-q\ (x)r_{\ -1}(x) \qquad\qquad (2)$$

然后由倒数第三个等式解出$r_{\ -1}(x)$：

$$r_{s-1}(x)=r_{s-3}(x)-q_{s-1}(x)r_{s-2}(x)$$

把$r_{s-1}(x)$代入（2）中，合并同类项得：

$$r_s(x)=[q_s(x)q_{s-1}(x)+1]r_{s-2}(x)-q_s(x)r_{s-3}(x)$$

$$r_s(x)=[q_{s-1}(x)q_s(x)+1]r_{s-2}(x)-q_s(x)r_{s-3}(x)$$

这样逐步消去$r_{s-2}(x)$，$r_{s-3}(x)$，……即得：

$$r_s(x)=u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x)$$

显然$u_1(x)\in P[x]$，$v_1(x)\in P[x]$，设$r_s(x)$最高次项系数为$a(a\neq 0)$，则：

$$d(x)=\frac{1}{a}r_s(x)=\frac{1}{a}u_1(x)f(x)+\frac{1}{a}v_1(x)g(x)$$

$$=u(x)f(x)+v(x)g(x)$$

$$(u(x)\in P[x],\ v(x)\in P[x])$$

其次，证明唯一性：

设在环$P[x]$中，$f(x)$，$g(x)$有两个最大公因式$d_1(x)$，$d_2(x)$，根据最大公因式定义必有：$d_1(x)\mid d_2(x)$，且$d_2(x)\mid d_1(x)$，根据整除性质1°有：$d_1(x)=cd_2(x)$（$c$为非零常数）但因$d_1(x)$,$d_2(x)$最高次项系数皆为1，故$c=1$，即$d_1(x)=d_2(x)$。证完。

在上述定理的证明过程中，同时给出了一个怎样求最大公因式的方法，这一方法也叫做**辗转相除法**，它与整数中的辗转相除法完全类似。

**例1**．在有理数域上，设：

$$f(x)=x^4+3x^3-x^2-4x-3$$

$$g(x)=3x^3+10x^2+2x-3$$

求 $(f, g)$，并求 $u(x), v(x)$，使：

$$(f,g)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$$

**解**：用辗转相除法，我们把等式（1）写成竖式：

| $q_2(x)$ | $g(x)$ | $f(x)$ | $q_1(x)=$ |
|---|---|---|---|
| $q_2(x)=$ | $3x^3+10x^2+2x-3$ | $x^4+3x^3-x^2-4x-3$ | $\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}$ |
| $-\frac{27}{5}x+9$ | $3x^3+15x^2+18x$ | $x^4+\frac{10}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2-x$ | |
| | $-5x^2-16x-3$ | $-\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{3}x^2-3x-3$ | |
| | $-5x^2-25x-30$ | $-\frac{1}{3}x^3-\frac{10}{9}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{1}{3}$ | |
| | $r_2(x)=9x+27$ | $r_1(x)=-\frac{5}{9}x^2-\frac{25}{9}x-\frac{10}{3}$ | $q_3(x)=$ |
| | | $-\frac{5}{9}x^2-\frac{5}{3}x$ | $-\frac{5}{81}x-\frac{10}{81}$ |
| | | $-\frac{10}{9}x-\frac{10}{3}$ | |
| | | $-\frac{10}{9}x-\frac{10}{3}$ | |
| | | $0$ | |