直 立 设 备 设 计

兰 州 化 学 工 业 公 司 设 计 院

王 者 相

天 津 市 轻 工 业 设 计 院 翻 印

直 立 设 备 设 计

兰州化学工业公司设计院

王者相

目　　录

第一节　结构自振周期计算

任何动力计算，诸如风载荷及地震载荷计算，都必须先求出结构的自振周期（或自振频率），然后再计算干扰力对结构的动力作用。所以自振周期是动力问题的三大特性之一。有时不仅要求出基本振型的自振周期，往往需要第二、第三振型的自振周期。

自振周期的计算方法很多。但大多数是近似方法，只有极少数情况（例如：质量沿高度均匀分布的塔）才有精确的分析介。现简介如下：

§　1　单自由度体系

首先让我们来看一个弹簧体系下面悬挂一个集中质量m。实线表示集中质量的平衡位置。在平衡位置时，弹簧有一定的拉伸变形，此时，集中质量m的重量与弹簧的弹性恢复力平衡。若我们在集中质量外作用一个向下的力，则质量离开平衡位置移至虚线所表示的位置。如果将外力很快的释放，则集中质量发生上下

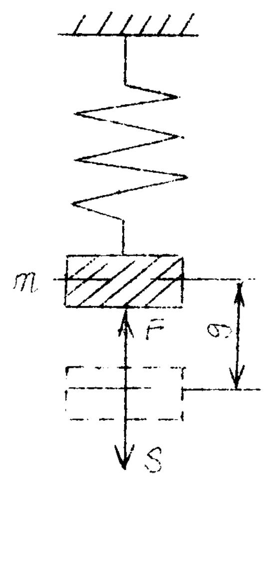

图 1 — 1

振动，经过一段时间后，若不计及阻尼力的作用，集中质量则依靠弹簧的恢复力进行振动，这就是我们常说的自由振动。

考虑某一瞬间 t，在振动过程中作用于集中质量的力有：惯性力 my''，弹簧的弹性恢复力 $-K_y$。两者在任何时刻都应保持平衡，有

$$my''=-K_y$$

$$my''+K_y=0$$

令 $y=e^{\lambda t}$

特征方程 $m\lambda^2+K=0$

$$\lambda^2+\frac{K}{m}=0$$

$$\lambda=\pm\frac{K}{m}$$

微分方程的通介为

$$g=C_1 ei\frac{K}{m}t+C_2 e-i\frac{K}{m}t$$

根据欧拉公式

$$e^{i}\frac{K}{m}t=\cos\frac{K}{m}t+i\sin\frac{K}{m}\cdot t$$

$$e^{-i\frac{K}{m}t} = \cos\frac{K}{m}t - i\sin\frac{K}{m}\cdot t$$

代入 $y = b_1\cos\frac{K}{m}t + b_2\sin\frac{K}{m}t$

式中 $b_1 = c_1 + c_2 \cdot b_2 = i(c_1 - c_2)$

这是两个简諧振动之和、我们可以写更简单的公式

$$y = A\sin\left(\frac{K}{Pn}t + \varphi\right)$$

式中 $A = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$

$$\varphi = tg^{-1}\frac{b_1^2 b_1}{b^2 b_2}$$

如果令 $\omega^2 = \frac{K}{m}$ 称为简諧振动的园频率，化成固有频率，

则

$$\omega = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$$

固有振动周期为 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

公式中的K为弹簧刚度系数，对一般结构为体系的刚度。我们将这样定义它，所谓体系的刚度，就是产生单位位移时需要在体系上作用的外力的大小。

根据自振周期的公式可以看出，体系质量大时，其自振周期也大。体系刚度大时，体系的自振周期小。

§2 代替质量法（Reily法）

对于一个质量均匀分布的体系。例如等直径、等壁厚的塔可以近似看成是质量均匀分布的体系。本来应该采用弹性体振动微分方程求解，但为了迅速求解，也可采用下面介绍的近似方法求出其近似值。这个方法是根据原有体系的质量的动能应与代替质量的动能相等。利用这样的原理可将连续弹性体化为单自由度体系。由于质量运动的动能与其所在位置处的加速度大小有关，所以选择不同的位置，就会有不同的代替质量。

假设一个无限自由度体系振动时任一截面X的横向位移为$y(x)T(t)$，则其速度为$y(x)\frac{dT}{dt}$，故该体系的振动动能为

$$U=\frac{1}{2}\left(\frac{dT}{dt}\right)^2\int_0^L m_x\, y_{(x)}^2\, dx$$

如采用me代表代替质量，而$y_e T(t)$表示代替质量作用点振动时的位移，则代替质量的动能为

$$U=\frac{1}{2}m_e y_e^2\left(\frac{dT}{dt}\right)^2$$

令两者相等，即 $U=U'$

有 $\frac{1}{2}\left(\frac{dT}{dt}\right)^2\int_0^L m_x y^2(x)dx=\frac{1}{2}m_e y_e^2\left(\frac{dT}{dt}\right)^2$

$$m_e=\frac{\int_0^L m_x y_{(x)}^2 dx}{y_e^2}$$

从上式可以看出，$g(x)$ 为无限自由度体系的位移或相对位移（振型），ge 为代替质量作用点的位移。因此，在振型确定后，即可利用此法求得该体系的自振周期。一般来说，计算之前振型是未知，需要计算者去假定。而假定的振型曲线愈接近真实情况，计算的精度愈高。

例，具有均布质量的简支梁，若将代替质量作用于中点，且振型曲线为弹性线，求基本振型的自振周期。

解，弹性曲线为中心作用单位力时的挠曲线

$$y(x)=y\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{3L^2X-4X^3}{L^3}\right)$$

代替质量

$$m_e = \frac{m \int_0^L \left[y\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{3L^2 X - 4X^3}{L^3}\right)\right]^2 dx}{y^2\left(\frac{L}{2}\right)}$$

$$= \frac{m}{L^2} \int_0^L \left(9X^2 - \frac{24}{L^2}X^4 + \frac{10}{L^4}X^6\right) d_X$$

$$= 0.486\,\overline{M}L$$

简支梁中央受集中力的最大挠度，在单位集中力作用下为

$$y_e = \frac{L^3}{48EI}$$

故根据园频率

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{M_y}} = \sqrt{\frac{1}{0.486mL\frac{L^3}{48EI}}} = \frac{9.92}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

精确解为 $\omega = \frac{9.87}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{M}}$ 误差为0.5%。

再例，具有均布质量的悬臂梁，若将代替质量作用于梁的自由端，且振型曲线亦为弹性线，求自振周期。

解，弹性曲线为

$$y(x)=y_0\left(\frac{3LX^2-X^3}{2L^3}\right)$$

则代替质量

$$m_e=\frac{m\int_0^L\left[y_0\left(\frac{3LX^2-X^3}{2L^3}\right)\right]^2dx}{g_0^2}$$

$$=\frac{m}{L^4}\int_0^L\left(\frac{9}{4}X^4-\frac{6X^5}{L}+\frac{X^6}{2L^2}\right)dx$$

$$=\frac{33}{140}mL$$

$$y_0=\frac{L^3}{3EI}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{\frac{38}{140}mL\cdot\frac{L^3}{3EI}}}=\frac{3.567}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$$

精确解为 $\frac{3.515}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}$ 误差为1.43%

§ 3 集中质量法：

代替质量法是把整个体系的质量折算成代替质量并集中于体系的一点。换句话说，将多自由度体系转换为单自由度体系。而单自由度体系只有一个振型和振动频率（或周期）。所以代替质量法仅能求得体系的最小频率（即最大周期），在考虑高振型时就不能采用此法计算结构的高振型的自振周期，必须采用其它办法。

集中质量法与代替质量法就将质量集中这点来讲，它们之间并无差异，但差异在于如何集中和集中质量的大小不同而已。集中质量法实质上将体系分成若干段，每段的质量集中于该段的一点，可以是该段的顶点，中央，甚至是底部，亦可将该段的质量分别集中于该段的两端。从动能的角度来看，体系振动时的最大动能，应该与未集中之前相等。但往往不能做到这点，因此造成一定的误差。集中质量法产生的误差与下述因素有关，(1)集中质量的位置，如果将集中质量置于最大位移处，一般来讲动能值偏大，此时应适当降低集中质量的数值。如果把每一段的质量集中于该段的中央，动能值偏小。因此，将集中质量集中在何处，是集中质量法的关键，需要根据体系的情况，以经验判断之。但对多自由度体系，如果分段很多时，对这个误差有一定的补偿作用。(2)振型曲线的假定与误差的产生亦有很大关系。大家知道，质量动能系与其运动速度的平方成正比，也就是与质量位移的平方成正比。而振型曲线实际上是每个质点的相对位移，如果振型曲线误差很大，势必造成质点的动能

误差也较大。

例　利用集中质量法求悬臂梁的自振周期（或频率）。假设：有一个等直径、等壁厚的塔，将全部质量集中于顶端时，求其基本振型的自振周期。

解：根据公式

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{my}}$$

其中　$m=\overline{m}H$

$$y=\frac{H^3}{3EI}$$

$$\omega_1=\sqrt{\frac{1}{\overline{m}H\cdot\dfrac{H^3}{3EI}}}=\frac{1.73}{H^2}\sqrt{\frac{EI}{\overline{m}}}$$

精确值为 $\omega_1=\dfrac{3.515}{H^2}\sqrt{\dfrac{EI}{\overline{m}}}$，相差约50%

若将集中质量置于塔的中部，则

$m=\overline{m}H$

$$y=\frac{\left(\frac{1}{2}H\right)^3}{3EI}=\frac{H^3}{24EI}.$$

则 $\omega_1=\sqrt{\dfrac{1}{\overline{m}H\cdot\dfrac{H^3}{24EI}}}=\dfrac{4.9}{H^2}\sqrt{\dfrac{EI}{\overline{m}}}$

与精确值相比较。误差为39%。

若将集中质量置于塔高的2/3处。

则 $m=\overline{m}H$

$$y=\frac{\left(\frac{2}{3}H\right)^3}{3EI}=\frac{\frac{8}{27}H^3}{3EI}=\frac{H^3}{10EI}$$

代入 $\omega_1=\sqrt{\dfrac{1}{\overline{m}H\cdot\dfrac{H^2}{10EI}}}=\dfrac{3.18}{H^2}\sqrt{\dfrac{EI}{\overline{m}}}$

与精确值相比较差9.47%。由此看来，集中质量的位置是十分重要的。但对多自由度体系，将每段质量集中于该段的某一点时，当分段愈多，得到的自振频率愈精确。

§4　迭代法

对于多自由度体系可利用迭代法求解多个自振周期（或频率），迭代法是采用一个初始向量代入方程组，算出各点的振幅，然后利用计算出的振幅代入方程组，再计算新的振幅，而此新计算出的振幅较前一次更接近于实际振幅。如此反复多次即可求出振幅的近似

值，而近似度可人为地控制。

根据多自由度体系自由振动方程

$$
\begin{cases}
A_1 = \omega^2 (m_1 \delta_{11} A_1 + m_2 \delta_{12} A_2 + \cdots\cdots + m_n \delta_{1n} A_n \\
A_2 = \omega^2 (m_1 \delta_{21} A_1 + m_2 \delta_{22} A_2 + \cdots\cdots + m_n \delta_{2n} A_n \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_n = \omega^2 (m_1 \delta_{n1} A_1 + m_2 \delta_{n2} A_2 + \cdots\cdots + m_n \delta_{nn} A_n
\end{cases}
$$

写成矩阵形式

$$
\{A\} = \omega^2 \begin{pmatrix} m_1 \delta_{11}, m_2 \delta_{12} \cdots m_n \delta_{1n} \\ m_1 \delta_{21}, m_2 \delta_{22} \cdots m_n \delta_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_1 \delta_{n1}, m_2 \delta_{n2} \cdots m_n \delta_{nn} \end{pmatrix} \{A\}
$$

令 $\frac{1}{\omega_2} = \lambda$

$$
[U] = \begin{bmatrix} m_1 \delta_{11}, & m_2 \delta_{12}, & \cdots & m_n \delta_{1n} \\ m_1 \delta_{21}, & m_2 \delta_{22}, & \cdots & m_n \delta_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ m_1 \delta_{n1}, & m_2 \delta_{n2} & \cdots & m_n \delta_{nn} \end{bmatrix}
$$

则　$\lambda\{A\}=[U]\{A\}$

这里的已知量为$[U]$，未知量为λ与$\{A\}$。假设一个初始向量$\{A\}^{0}$，代入方程，则

$\lambda\{A\}^{1}=[U]\{A\}^{0}$

利用$\{A\}^{1}$再代入方程右面即得

$\lambda\{A\}^{2}=[U]\{A\}^{1}$

进行第K次时

$\lambda\{A\}^{K+1}=[U]\{A\}^{K}$

当$\{A\}^{K+1}\approx\{A\}^{K}$时，迭代结束，此时的$\{A\}^{K+1}$即为对应于$\lambda$的振型曲线，而入反代得出$\omega$。此时计算出的$\omega$值为最小自振频率。若计算其它自振频率时，尚需采用其它方法将(U)阵修改。

§5　有限单元法

随着电子计算机的普及与应用，许多烦琐的计算多用计算机来替代，这就为有限元法奠定了基础。从上面的介绍可以看出，对求取多自由度体系高振型的自振周期手工计算十分繁重，而有些复杂的结构几乎是不可能的。在这种情况下采用有限元法是十分便利的。

对无阻尼自由振动方程，根据有限元法可以写成

$[K]\{X\}+[M]\{X''\}=0$

其中$[K]$为结构的刚度矩阵，根据直接刚度法可得

$$
[K]^{e}=\begin{bmatrix}
\dfrac{12EI}{\ell^{3}}, & \dfrac{6EI}{\ell^{2}}, & -\dfrac{12EI}{\ell^{3}}, & -\dfrac{6EI}{\ell^{2}} \\
-\dfrac{6EI}{\ell^{3}}, & \dfrac{4EI}{\ell}, & \dfrac{6EI}{\ell^{2}}, & \dfrac{2EI}{\ell} \\
-\dfrac{6EI}{\ell^{2}}, & \dfrac{2EI}{\ell}, & \dfrac{12EI}{\ell^{2}}, & \dfrac{6EI}{\ell}
\end{bmatrix}
$$

将各单元组合起来，即为结构的总刚度矩阵

$$
[K]=\begin{bmatrix}
K_{11}, & K_{12} & \cdots\cdots & K_{1n} \\
K_{21}, & K_{22} & \cdots\cdots & K_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
K_{n1}, & K_{n2} & \cdots\cdots & K_{nn}
\end{bmatrix}
$$

然后将边界条件代入，即完成了总体结构的刚度矩阵。

$[M]$——为结构的质量矩阵，可以采用一致质量法和凝聚质量法来求取。对管结构而言，采用集中质量法比较简单，采用集中质量法得到的质量矩阵为一对角阵。