自动控制理论

三

上海市科学技术协会

第五章　　线性系统理论引论

§5—0引言

二十世纪是自动控制理论飞速发展的时期．任何事物的发展都有它的阶段性，根据系统分析和设计方法的特点，从二十世纪四十年代起，自动控制理论的发展大致可分为三个阶段：

(1)经典控制理论阶段（1940—1960）；

(2)现代控制理论阶段（1960—1970）；

(3)大系统理论阶段　（1970—现在）．

经典控制理论主要以单轨入单轨出系统为研究对象．其主要内容有：研究线性系统用的频率法和根轨迹法；研究非线性系统用的相平面法和描述函数法；研究系统稳定性用的代数判据和几何判据；校正网络的设计等．

现代控制理论主要以复杂（多轨入多轨出、时变）、高精度、随机性的计算机控制系统为研究对象．其主要内容有：时域分析法，即状态空间分析法；最佳估计，即卡尔曼滤波；最佳控制和系统识别，即建立系统的数学模型等．

大系统理论主要以复杂的生产系统、科学实验系统、空间技术系统和经济管理系统等为研究对象．其主要类型有网络系统（NETWORK SYSTEM）、过程系统（PROCESS SYSTEM）、经营管理系统（MANAGEMENT SYSTEM）等．其主要内容是所谓系统工程学理论：关于系统的分析、综合、模拟、最佳化等是狭义的系统工程学理论；而合理地进行系统的研制、设计、运用等项工作所采用的思想、程序、组织、方法等内容是广义的系统工程学理论，它不仅是理论问题，而且是

与经济、经营、管理、社会、生理……等有关的复杂的技术问题。

本章主要叙述现代控制理论在线性系统理论方面的一些问题，有时为了叙述的完整性也谈一些典经控制理论的内容。

控制理论是在本世纪五十年代末到六十年代初，由于空间技术发展的要求，在现代数学提供了所需的理论和方法的基上，以及电子数字计算机技术提供了可靠的计算工具的条件下才发展成为现代控制理论的。它与经典控制理论相比的共同点是它们一般都采用反馈原理。不同点是现代控制理论在系统理论中引进了状态变量的概念，这是一个革命性的变化；另外，现代控制理论要采用一些现代数学分支：抽象代数、泛函分析、拓扑学和随机过程等；并且经典控制理论一般只能适用线性定常，单轨入单轨出系统的分析与设计，而现代控制理论可应用非线性、时变、多轨入多轨出系统的设计；由于在经典控制理论中，系统的设计是建立在试探法的基础之上的，因此，一般说难于得到系统的最佳设计，而现代控制理论确便于得到最佳控制系统，因为它可考虑到系统的复杂的控制作用和详细的起始状态和终端状态；还有，经典理论一般采用频率域分析法，而现代控制理论一般采用时域分析法，因此，有时人们也将现代控制理论简称为时域分析法。

第五章　线性系统理论引论

第六章　最佳滤波原理

§5—1　线性系统的数学描述

线性系统理论以线性动力学系统为其研究对象。研究的依据是线性系统的数学模型。所谓数学模型，就是物理系统的数学描述，因此线性动力学系统的数学描述，就是线性系统的数学模型。一旦整个线性系统的数学模型被建立，则系统分析方法与具体的物理系统无关。因此要设计一个好的控制系统，建立物理系统的数学描述是很重要的，可以说，它是整个设计过程中最重要的事情。

系统的数学模型可以有不同的形式，并且随着具体的系统和条件的不同，一种数学模型可能比另一种数学模型更合适。例如在讨论最佳控制问题时采用一组一阶微分程，通常是比较方便的。另一方面，在单轨入单轨出系统的设计中，采用传递函数的形式就比其他形式方便。

所谓线性系统的数学描述，就是指系统的数学模型是线性的，其重要特性是可用叠加原理，即两个作用函数同时作用于系统的响应，等于两个作用函数单独作用的响应之和。由于这一原理，就能够由一些简单解而得到线性系统的复杂解。

5—1—1　线性系统的经典描述方法

一、常系数、线性、连续系统的经典描述方法

1. 用微分方程来描述

一个n阶常系数、线性、连续系统的动力学特性可以用一个n阶微分方程来描述：

$$a_n y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y^{(1)}+a_0y$$
$$=b_m x^{(m)}+b_{m-1}x^{(m-1)}+\cdots+b_1x^{(1)}+b_0x\quad(n\neq m)$$

5—1—1

（5－1－1）式中

y、x　　分别是线性系统的输出、输入；

$y^{(i)}$、$x^{(i)}$　　分别是 y、x 的第 i 阶导数；

a_i、b_i　　分别是与时间无关的系数。

例如，由图5－1－1所示，一个由弹簧、质量、阻尼器所构成的机械平移系统的微分方程是

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+f\frac{dy}{dt}+ky=x \qquad (5\text{–}1\text{–}2)$$

式中

m　　质量；

f　　粘性摩擦系数；

k　　弹簧刚度。

（5–1–2）式可写成：

$$a_2y^{2}+a_1y^{1}+a_0y=b_0x \qquad (5-1-3)$$

式中

$a_2=m$；

$a_1=f$；

$a_0=k$；

$b_0=1$。

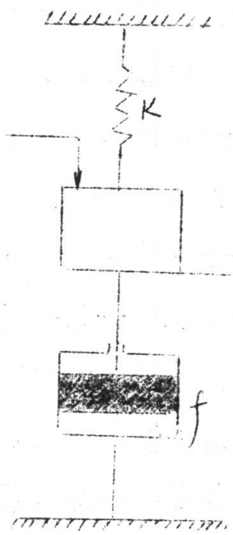

图　5－1－1

弹簧　质量　阻尼系统

2. 用传递函数来描述

所谓传递函数，就是当初始条件为零时，线性定常系统的输出量的

拉氏变换与其输入量的拉氏变换之比。由（5－1－1）式描述的n阶线性定常系统的传递函数为：

$$W(S)=\frac{Y(S)}{X(S)}=\frac{b_m S^m+b_{m-1}S^{m-1}+\cdots+b_1 S+b_0}{a_n S^n+a_{n-1}S^{n-1}+\cdots+a_1 S+a_0} \qquad (5\text{—}1\text{—}4)$$

式中　$Y(S)$，$X(S)$　　分别是输出、输入的拉氏变换；

　　$S=\sigma+j\omega$

因此传递函数是一种以系统参数表示的输出量与输入量之间的关系式，它表示了系统本身的特性，而与系统的输入或驱动函数的形式无关。传递函数包含着联系输出量和输入量所必需的单位，但它不能表明系统的物理结构，因为许多物理特性不相同的系统，可以有相同的传递函数形式。这样，我们就可以用以S为复变量的代数方程来表示线性定常系统的动力学特性了，这就大大简化了系统的求解。

用传递函数来表示输出量和输入量之间的关系时，有关系式：

$$Y(S)=W(S)\,X(S) \qquad (5\text{—}1\text{—}5)$$

例如，由图5－1－1所示的机械平移系统的传递函数为：

$$W(S)=\frac{Y(S)}{X(S)}=\frac{1}{mS^2+fS+k} \qquad (5\text{—}1\text{—}6)$$

其输出量与输入量的关系为：

$$Y(S)=\frac{1}{mS^2+fS+k}\cdot X(S) \qquad (5\text{—}1\text{—}7)$$

式中

　　$Y(S)$　　输出量拉氏变换；

　　$X(S)$　　输入量拉氏变换。

3. 用频率特性来描述

所谓频率特性，就是系统在正弦轨入作用下，轨出和轨入的复数值之比。它可由传递函数 $W(S)$ 当 $S=j\omega$ 时，直接得到。例如，由微分方程（5－1－1）所描述的线性定常系统的频率特性为：

$$W(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{b_m(j\omega)^m+b_{m-1}(j\omega)^{m-1}+\cdots+b_1(j\omega)+b_0}{a_n(j\omega)^n+a_{n-1}(j\omega)^{n-1}+\cdots+a_1(j\omega)+a_0} \tag{5-1-8}$$

式中

$Y(j\omega)$、$X(j\omega)$ 分别是轨出、轨入的复数值，实际上，对于稳定的系统 $Y(j\omega)$ 和 $X(j\omega)$ 也分别是轨出和轨入的福氏变换。由（5－1－8）得轨出和轨入之间福氏变换关系为：

$$Y(j\omega)=W(j\omega)\cdot X(j\omega) \tag{5-1-9}$$

例如，图5－1－1所示的机械平移系统的频率特性为：

$$W(j\omega)=\frac{1}{m(j\omega)^2+f(j\omega)+k} \tag{5-1-10}$$

由（5－1－9）式和（5－1－10）式得此机械平移系统的轨出量的福氏变换与轨入量的福氏变换之间的关系为：

$$Y(j\omega)=\frac{1}{m(j\omega)^2+f(j\omega)+k}\cdot X(j\omega) \tag{5-1-11}$$

4. 用脉冲过渡函数来描述

所谓脉冲过渡函数，就是系统在单位脉冲函数作用下的响应函数。单位脉冲函数具有如下特性：

$$(\text{i})\ \delta(t)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases};$$

$$(\text{ii})\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$

因此，单位脉冲函数 $\delta(t)$ 的拉氏变换为：

$$\delta(S)=\int_{0}^{\infty}\delta(t)l^{-St}dt=1 \qquad (5\text{—}1\text{—}12)$$

由（5－1－5）式和（5－1－12）式可得到在单位脉冲作用下其轨出量 $k(\tau)$ 的拉氏变换式 $k(S)$ 为：

$$k(S)=W(S)\cdot 1=W(S) \qquad (5\text{—}1\text{—}13)$$

$$k(\tau)=L^{-1}\{W(S)\}=\frac{1}{2\pi z}\int_{\sigma-z\infty}^{\sigma+z\infty}W(S)e^{St}dS \qquad (5\text{—}1\text{—}14)$$

式中

$L^{-1}\{\cdot\}$　　取{·}的拉氏反变换的符号；

τ　　脉冲作用时刻到观察时刻的间隔。可见系统的脉冲过渡函数就是传递函数的反拉氏变换，它与传递函数一样，其特性完全由系统的内部性能决定。

由（5－1－5）式和（5－1－13）式以及拉氏变换的卷积定理可以得到线性定常系统轨出量和轨入量之间在时间域的关系为：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\ k(t-\tau)\ d\tau \qquad (5\text{—}1\text{—}15)$$

和

$$y(t)=\int_{0}^{t}x(\tau)\ k(t-\tau)\ d\tau \qquad (5\text{—}1\text{—}16)$$

式中τ是轨入作用加到系统上去的时刻。经过变量变换，即令 $t-\tau=\tau'$，然后仍用τ表示τ'，则（5－1－15）式和（5－1－16）式分别可改写成：

$$y(t)=\int_0^{\infty} x(t-\tau)\ k(\tau)\ d\tau \qquad (5\text{—}1\text{—}17)$$

和

$$y(t)=\int_0^{t} x(t-\tau)\ h(\tau)\ d\tau \qquad (5\text{—}1\text{—}18)$$

式中τ表示时间间隔。

关系式（5－1－15）和（5－1－17）表示轨入作用加到系统上无限长时间后轨出，也就是系统的稳态轨出；关系式（5—1—16）和（5－1－18）表示轨入作用加到系统上有限时间后的轨出，也就是系统的暂态轨出。

线性定常连续系统的传递函数W（S）、频率特性W（jω）和脉冲过渡函数具有如图 5－1－2 所示的关系。

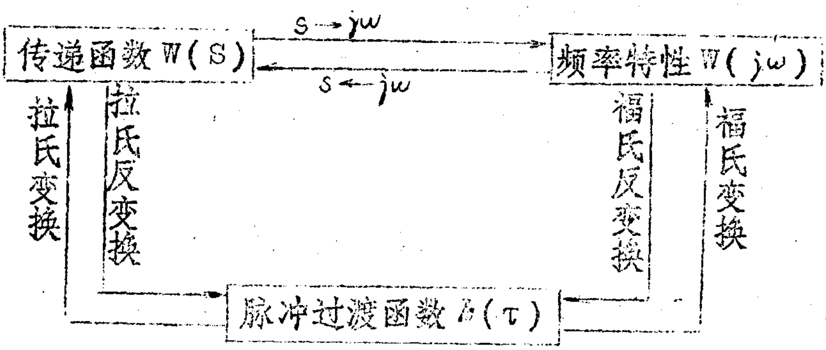

图5－1－2传递函数W(S)，频率特性W(jω)和脉冲过渡函数h(τ)之间的相互关系