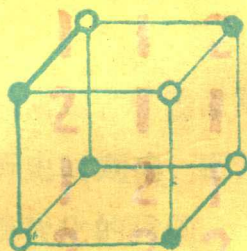


正交设计与分析

华中工学院数学教研组编



湖北省革命委员会推广优选法办公室

一九七五年五月

毛主席语录

列宁为什么说对资产阶级专政，这个问题要搞清楚。这个问题不搞清楚，就会变修正主义。要使全国知道。

思想上政治上的路线正确与否是决定一切的。

我们必须打破常规，尽量采用先进技术，在一个不太长的历史时期内，把我国建设成为一个社会主义的现代化的强国。

一定要搞群众运动，什么工作都要搞群众运动，没有群众运动是不行的。

目 录

第一章 正交试验设计初步	(1)
第一节 如何制定试验方案	(1)
第二节 正交试验设计	(4)
第三节 正交表的特性和一些说明	(10)
第四节 交互作用	(12)
第五节 多水平情形	(15)
第六节 多指标情形	(18)
第七节 小结	(22)
第二章 交互作用列的推导及混杂问题	(24)
第一节 交互作用的混杂	(24)
第二节 混杂的排除——映象设计	(31)
第三章 调优方法	(38)
第一节 围绕好点法	(38)
第二节 主效应比例法	(41)
第三节 加排中心点法	(44)
第四节 生产线上调优	(47)

第五节 小结	(50)
第四章 方差分析	(52)
第一节 方差的概念和计算方法	(52)
第二节 显著性检验	(57)
第三节 重复试验的方差分析	(61)
附表：F 表	(65)
常用正交表	(66)

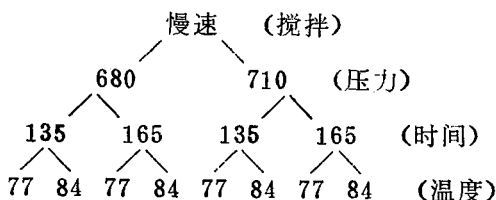
第一章 正交试验设计初步

第一节 如何制定试验方案

在生产斗争和科学实验中，试制新产品，研究工艺改革或配方，以达到高产、优质、低消耗的目的，都要经过多次试验。例如，为提高“510”硅油（一种脱模剂）的粘度，需要通过试验来考察聚合温度、聚合时间、搅拌速度、真空压力等因素对硅油粘度的影响，从而定出较好的工艺条件。如果在这四个因素各取了两个水平：

因素 水平	聚合时间 (分)	聚合温度 (°C)	搅拌速度	真空压力 (hg/mm)
1	135	84	慢	680
2	165	77	快	710

怎样选出较好的水平搭配呢？若取慢速搅拌，则有 8 种搭配（如下图所示）：



把搅拌变为快速，又有 8 种，则总共 16 种搭配。如果把这 16 种搭配都做一遍，并比较 16 次试验的结果，当然可以从中发现一种粘度最高的搭配。但是这种试验法有一个缺点，即试验次数较多。容易推算，四个因素各两个水平，要做 $2^4 = 16$ 次试验；五个因素各两个水平，要做 $2^5 = 32$ 次试验；…，七个因素各两个水平就要做 $2^7 = 128$ 次试验。如果因素再多几个，试验次数就更多了。因此，在实际工作中，特别是在因素较多的情况下，人们都不会这样做试验。再说，就算在上面的粘度试验中，16 种搭配都试遍了，由于试验总有误差，其中粘度最高的那种水平搭配，还不一定是最好的搭配。

在工业试验中，人们常常采用一种“简单比较法”。比如，记聚合时间为 A，并用 A_1 、 A_2 表示它的两个水平；记聚合温度为 B， B_1 、 B_2 是它的两个水平；类似地， C_1 、 C_2 是搅拌速度 C 的两个水平， D_1 、 D_2 是真空压力 D 的两个水平。此时，简单比较法是每次试验都固定三个因素，只变动一个因素。例如，先把 B、C、D 分别固定在 B_1 、 C_1 、 D_1 上，变动 A：

$$B_1 C_1 D_1 \begin{cases} A_1 \text{ (好)} \\ A_2 \end{cases}$$

试验结果，比方说是 A_1 好；下次试验就把 A 固定在 A_1 水平上，再变动 B：

$$A_1 C_1 D_1 \begin{cases} B_1 \\ B_2 \text{ (好)} \end{cases}$$

试验结果，比方说是 B_2 好。再试验时，又把 B 固定在 B_2 水平上，再变动 C：

$$A_1 B_2 D_1 \begin{cases} C_1 \text{ (好)} \\ C_2 \end{cases}$$

试验结果，比方说又是 C_1 好。最后把C固定在 C_1 水平上，再变动D：

$$A_1 B_2 C_1 \begin{cases} D_1 \\ D_1 \text{ (好)} \end{cases},$$

试验结果，比方说是 D_2 好。于是下结论说，四个因素依 $A_1 B_2 C_1 D_2$ 搭配时为最好。

简单比较法的优点是：每次只变动一个因素进行比较，比较容易掌握；且试验次数相对来说也有很大减少。但是，这种方法却有局限性。大家知道，**每一事物的运动都和它的周围其他事物互相联系着和互相影响着**。试验中，把许多本来相互联系着和相互影响着的因素都加以固定，而只变动一个因素，这样，实质上就忽视了因素间互相的联系和互相的影响。具体地说，把B、C、D分别固定在 $B_1 C_1 D_1$ 水平上，才选出 A_1 是最好水平。当变动了因素B(或C、D时)， A_1 就未必仍是最好的水平。也就是说，在 $A_1 B_1 C_1 D_1$ 水平搭配中 A_1 是最好的水平，但在 $A_1 B_2 C_1 D_2$ 水平搭配中，由于B和D都取了第二个水平， A_1 就不一定仍是最好的水平了，除非A、B、C、D各因素之间相互影响，相对地说，确实很小，以致在研究问题时可以把这种相互影响忽略不计。

那末顾及到因素间的相互影响，能否在试验中同时变动多个因素呢？对此，人们常常担心的是：同时变动多个因素、能否分辨出，哪些因素对试验结果（即指标值）的影响大，哪些对试验结果的影响小呢？辩证唯物主义告诉我们，**要从事物的内部、从一事物对他事物的关系去研究事物的发展**，在同时变动多个因素的情况下，能否分辨出各因素对指标影响的大小，关键在于试验方案是否设计得合理。只要试验方案设计得合理，这一点是可以做到的。人们在长期

的实践中，已经总结出一种比较简易而有效的试验安排方法，称为正交试验设计。

第二节 正交试验设计

仍以提高“510”硅油粘度的试验为例，来说明正交试验设计的基本步骤：

一、试验方案的制定

先列出四个因素各两个水平的因素与水平表如前，即：

因素 水平	聚合时间 (分)	聚合温度 (°C)	搅拌速度	真空压力 (hg/mm)
1	135	84	慢	680
2	165	77	快	710

正交试验设计，是通过正交表来安排试验。为此，我们选用一种叫做 $L_8(2^7)$ 的“正交表”：

试验号	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
1	1	1	2	1	2	2	1
2	2	1	1	1	1	2	2
3	1	2	1	1	2	1	2
4	2	2	2	1	1	1	1
5	1	1	2	2	1	1	2
6	2	1	1	2	2	1	1
7	1	2	1	2	1	2	1
8	2	2	2	2	2	2	2

现把聚合时间、聚合温度、搅拌速度和真空压力四个因素分别排在 $L_8(2^7)$ 表头的A、B、C和ABC位置上，则A、B、C及ABC列下的数字“1”和“2”，就代表相应的因素在各次试验中应出现的水平。这样，按照上面“510”硅油粘度试验的因素及水平表，就可以把每次试验中这些因素水平的搭配关系，依正交表列出如下：

试 验 号	A 聚合 时间 (分)	B 聚合 温度 (°C)	AB	C 搅 拌 速 度	AC	BC	ABC 真 空 压 力 (hg/mm)
1	135	84	2	慢	2	2	680
2	165	84	1	慢	1	2	710
3	135	77	1	慢	2	1	710
4	165	77	2	慢	1	1	680
5	135	84	2	快	1	1	710
6	165	84	1	快	2	1	680
7	135	77	1	快	1	2	680
8	165	77	2	快	2	2	710

表中凡是没有排因素的列（例如AB、AC、BC等列）下的数字“1”和“2”，在做试验时不用管它，只须按表中排有因素的各列水平搭配关系进行试验，例如第三次试验是按135'—77°C—慢速搅拌—710hg/mm真空压力进行，等等。

前面说过，在所选定的四个因素各两个水平的情况下，按各种水平搭配全面实施时，就要做十六次。而试验按 $L_8(2^7)$ 正交表实施时，只需做八次试验，这就省掉了八次

验，从而节省了人力、物力、费用和时间，加快了试验的进程。而且一般说来，不仅能分辨出各因素对指标影响的大小，同时也在所考察的因素及水平范围内，能够找到较好的生产条件。

二、试验结果的分析——直观分析法

试验前，对所做试验，要认真地挑选好所应考察的因素，并定好这些因素的水平，然后按适当的正交表做好安排，这是使试验获得成功的起点；严格操作，认真做好试验，合理分析试验结果；从中找出较好的生产条件，或制定进一步试验的方案(调优)，则是使试验获得成功的关键。这里，我们先介绍一种简单的直观分析法。实践证明，这种方法虽然简单却行之有效。

按 $L_8(2^7)$ 正交表的安排做完八个试验之后，把每次试验的结果对应地填在正交表的右边，有如下表：

试验号	聚合时间		聚合温度 B	AB	搅拌速度		AC	BC	真空压力 ABC	粘 度
1	135'	84°C	2	慢	2	2	680	1384.0		
2	165'	84°C	1	慢	1	2	710	1143.0		
3	135'	77°C	1	慢	2	1	710	959.8		
4	165'	77°C	2	慢	1	1	680	797.9		
5	135'	84°C	2	快	1	1	710	2927.0		
6	165'	84°C	1	快	2	1	680	3570.0		
7	135'	77°C	1	快	1	2	680	2000.0		
8	165'	77°C	2	快	2	2	710	2288.0		
m ₁	1817.7	2256.0	1918.2	1071.1	1716.9	2063.7	1937.9			
m ₂	1949.7	1511.4	1849.2	2696.3	2050.5	1703.7	1829.5			
m ₂ - m ₁	132.0	-744.6	-79.0	1625.2	333.6	-360.0	-108.4			

然后分别计算出表下面的 m_1 、 m_2 和 $m_2 - m_1$ 这三栏数值。 m_1 栏是把各列中数字“1”（即1水平）所对应的四次试验结果相加，再除以4（取平均）。例如，B列下的 m_1 ，是把B列中1水平（即84℃）所对应的四次试验结果相加，而后取平均，即

$$\begin{aligned} \text{B列下的 } m_1 &= \frac{1}{4}(1384.0 + 1143.0 + 2927.0 + 3570.0) \\ &= 2256.0 \end{aligned}$$

同样，

$$\begin{aligned} \text{AB列下的 } m_1 &= \frac{1}{4}(1143.0 + 959.8 + 3570.0 + 2000.0) \\ &= 1918.2 \end{aligned}$$

其他列 m_1 的计算照此类推。 m_2 栏的计算也完全相仿。例如

$$\begin{aligned} \text{A列下的 } m_2 &= \frac{1}{4}(1143.0 + 797.9 + 3570.0 + 2288.0) \\ &= 1949.7 \end{aligned}$$

至于 $m_2 - m_1$ ，是把各列的 m_2 减去该列的 m_1 。例如：

$$\text{A列下的 } m_2 - m_1 = 1949.7 - 1817.7 = 132.0 ,$$

$$\text{BC列下的 } m_2 - m_1 = 1703.7 - 2063.7 = -360.0 \text{ 。}$$

从 m_1 、 m_2 和 $m_2 - m_1$ 的计算过程可以看出：在排有因素的列的下面， m_1 是该列所排因素在试验中取1水平时，四次试验结果的平均值； m_2 是该因素取2水平时，另四次试验结果的平均值。因此， $m_2 - m_1$ 就是该列因素水平的变动所引起的指标值平均变化大小，它的绝对值反映了该因素水平的变动对指标值影响的程度。在试验设计中，因素水平的变化所引起的指标值平均变化的大小，叫做该因素的主效应。主效应绝对值越大，说明该因素在所考察的水平上对指标的影响越

大，因而是主要因素；主效应绝对值越小，说明该因素在所考察的水平上对指标值的影响越小，因而是次要因素。直观分析法就是比较主效应的绝对值（即 $m_2 - m_1$ 的绝对值）的大小，来判断（估计）因素对指标影响的大小，从而分辨出哪些是主要因素，哪些是次要因素，这就是抓主要矛盾。

比较上例各列 $m_2 - m_1$ 的绝对值，可以看到，搅拌速度C列下的 $m_2 - m_1$ 的绝对值1625.2最大，说明在该试验中，搅拌速度是影响粘度指标的主要因素；其次大的是聚合温度B列下 $m_2 - m_1$ 的绝对值744.6，说明聚合温度的高低对粘度有一定影响，但比起搅拌速度来，则它的影响就要小得多。至于其他各列中的 $m_2 - m_1$ 的绝对值相对地说就更小了，因而这些因素对粘度的影响也就更小，都是次要因素。

试验按正交表进行安排，对试验结果经过上面的计算和分析，就可以帮助我们找到主要因素，这是试验按正交表进行安排的优点之一。当然，要找到主要因素，首先在试验中必须把它列入所要考察的因素中去。因此，在开始考虑要考察的因素时，因素的个数应适当多一些，以免遗漏掉主要因素。

试验按正交表安排并做出试验结果后，又如何从所得到的试验结果中评选出较优生产条件呢？我们知道，主要因素水平变动既然会引起指标值较大的变动，那么通过直观分析法，首先就要抓住主要因素较优水平的选取这个环节。这只要比较主要因素各水平的平均值 m_1 和 m_2 的大小，从中选取更符合指标要求的水平即可。在本例中，搅拌速度是主要因素， $m_2 = 2696.3$ ， $m_1 = 1071.1$ ，我们希望粘度越大越好，故搅拌速度应取2水平，即取快速搅拌比慢速搅拌要好。对次要因素，由于它在所考虑的水平范围内，对指标影响小，故

其水平一般可以任意确定一个。当然也可以比较 m_2 和 m_1 的大小，按指标要求选定其中一个，或者根据其他要求（例如节省原料、运费、方便操作等）来决定。用直观分析法所选出的较优水平，都经过几次试验的平均（在本例中是 4 次的平均），也就更可靠了。

“510”硅油后来的试验表明，只要抓住了搅拌速度这个因素，采用快速搅拌，在 84°C 下进行裂解聚合反应，粘度可高达 6000 以上。

第三节 正交表的特性和一些说明

正交设计法为什么能在同时变动多个因素的试验中，分辨出各因素对指标影响的大小，从而迅速地抓住主要因素呢？这主要是利用了正交设计（正交表）的两个特性。以 $L_8(2^7)$ 正交表为例：

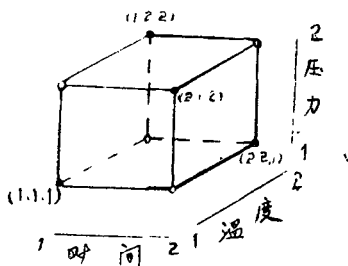
（1）每一列，数字“1”和“2”出现的次数都相同。就是说，同一因素的任一水平，在试验中出现的机会相等。

（2）任两列，数字“1”和“2”的搭配（1,1），（1,2），（2,1），（2,2）出现的次数也相同。就是说，任何两个因素的各种水平搭配，在试验中出现的机会也相等。

这两条性质就是正交表的正交特性。正是因为正交表具备有这种特性，所以按正交表安排的试验，虽然同时变动了多个因素的水平，但从任一因素的两个水平分别和其他每一因素的水平搭配来看，还是均匀的。这样，就使对应于不同水

平的试验结果有了合理的比较基础。

进一步，还可在几何图形上看看试验点的分布情况。对“510”硅油试验，若把搅拌固定在慢速搅拌水平上，则在原按 $L_8(2^7)$ 的安排中，和这种搅拌速度相应的4次试验，只涉及三个各二水平因素。这样就可以用一个立体图形来表示这4次试验的水平搭配，在几何上每次试验的水平搭配构成一个试验点，这4个试验点用“·”标出，它们的分布是均匀分散的（如下图）。

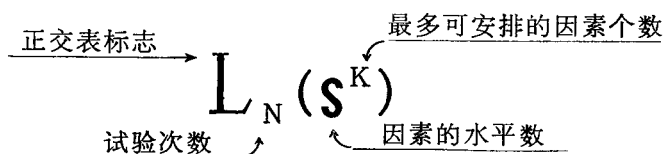


试验点分布图：点“·”对应慢速
点“○”对应快速

由于试验点的均匀分散，就使试验出现好结果的机会增加。同样，若把搅拌固定在快速上，就得到图中用“○”标出的另外四个点，这四个点也是均匀分散的。注意，点“·”和点“○”分别对应于不同的两个搅拌速度，因此，八个试验点彼此都是均匀分散的。

由于实际问题的复杂性，试验有各种各样的情形：有的包含因素多，有的包含少；有时因素只比较两个水平，有时则要考察三个或更多的水平，即使在同一试验项目中，有的

因素水平得取得多，有的取得少。为了适应各种试验的需要，现已编有多种正交表。但常用的正交表主要有： $L_4(2^3)$ ， $L_8(2^7)$ ， $L_{16}(2^{15})$ ， $L_9(3^4)$ ， $L_{27}(3^{13})$ ， $L_{16}(4^5)$ ， $L_8(4 \times 2^4)$ ， $L_{18}(2 \times 3^7)$ 等等，这些表可以用一个统一的符号 $L_N(S^k)$ 来表示。符号中各字母的意义如下



例如， $L_4(2^3)$ 表示做4次试验，最多能安排3个各二水平因素的正交表； $L_8(4 \times 2^4)$ 是一种混合水平正交表，它表示做8次试验，最多可安排一个四水平因素及4个各二水平因素的正交表。几种常用正交表见附表。

对于所附的正交表，在试验次数和最多可安排的因素个数之间有一个简单的关系。二水平正交表的试验次数都是2的乘幂（或是4的倍数），最多可安排的因素个数为试验次数减1；三水平正交表的试验次数都是3的乘幂，最多可安排的因素个数为试验次数减1的一半，即最多可安排的因素个数 $= (\text{试验次数} - 1) / 2$ ；混合水平正交表的试验次数则是各个水平数的公倍数。

第四节 交互作用

前面提到，简单比较法的缺点在于完全忽视了因素之间

的相互联系和相互影响，因此，当试验中因素之间相互影响比较大时，简单比较法所选出的较优生产条件就不一定可靠。

试验中，因素与因素之间对指标的联合作用，叫做交互作用。在出现较大交互作用的情况下，则不能单独考虑一个因素在试验中取什么水平好，而要看另一个因素定在什么水平上。就是说，要从这两个因素的水平搭配上来估计它们各取什么水平好。试验若按正交表来安排，则不但能分别计算出各因素对指标影响的大小（即主效应），而且还可以从表中算出因素之间的交互作用的大小。

• 正交表是如何给出因素之间的交互作用呢？再看 $L_8(2^7)$ 正交表，该表表头上记有：

A B AB C AC BC ABC

现假定A、B、C分别代表三个因素，例如，在“510”硅油粘度试验中，A是时间，B是温度，C是搅拌速度，则

AB表示A和B两个因素（即时间和温度）的交互作用。

BC表示B和C两个因素（即温度和搅拌）的交互作用。

ABC表示A、B和C三因素（即时间、温度和搅拌）的交互作用，等等。

前面说到，A列的 $m_2 - m_1$ 值表示A因素的主效应，那么，AB列的 $m_2 - m_1$ 值就表示A和B两因素交互作用的大小，ABC列的 $m_2 - m_1$ 值就表示A、B和C三者交互作用的大小，等等。这样，利用正交表就把因素之间的交互作用都算出来了。

从“510”硅油粘度试验结果及分析计算表中可以看到，BC列下 $m_2 - m_1$ 的绝对值是360，其大小占第三位，说明温度B和搅拌速度C之间的交互作用对粘度有一定的影