自 修 補 習 用 書

易進平面幾何

上 册

郁 祖 同 編

上海易進出版社出版

編輯大意

1. 本書按照幾何學原理編輯,並體察普遍一般讀者學習能力,使之容易接受,可作初學幾何之用.

2. 本書爲解除初學幾何困難起見,在每組習題開始,詳細證明一題或兩題,以備摹仿演習.雖嫌呆板,而引導初學入門,不無小補.故可用作自修課本.

3. 本書詳細證明之題,均極精粹有趣味,讀者宜逐步明白其作意,且宜抄寫幾遍,務期純熟. 然後自動證明類似之題必能準確.愼勿以爲既已詳細證明而忽之.

4. 學習幾何,圖形最爲重要,但初學大都不能繪畫.本書每題畫圖,助其速進. 本書提示及略解之處甚多,指導讀者思索之門徑,此亦助其速進之一法.

5. "相似形對應線段成比例" 在畫線略多之圖,研究其中相似形及對應線,均覺費力.本書將相似形之對應頂點上文字順次排列,每兩個文字之連線卽爲對應線,不必再看圖形,且能確切明瞭,對於初學省便不少.

6. 本書學習若干定理,可告一段落時,卽有一組複習題,使讀者測驗自己所學定理是否能應用得宜. 上冊之末附有補充題九組,下冊之末附有補充題二十組,以此類題測驗自己,若能得心應手,則幾何基礎鞏固矣.

7. 本書有習題 106 組,複習題18組,補充題29組,共計153組.若每星期學習 4 組,則在40星期內學完.

8. 本書爲適合讀者需要,第三版付印時,將原在下冊之作圖法及軌跡移到上冊.

幾何學習方法

1. 每日抽若干時間，看明白兩三頁，若開始學習確難明白，或須請教師指導。詳細講明每個題目證法。經過一短時間，即能自動學習。

2. 每條定理(用粗體字印出者)必須熟讀深思，時時背誦，證題時常常默寫。務求純熟，可資應用。

3. 具備練習本，圓規，直尺（或小三角板)鉛筆或鋼筆。每日抄寫已證明之題(必先求澈底明白)，再仿此作書中所有之題。

4. 幾何證題，理應從分析入手。本書第 44 頁 98 節，宜特別注意。分析法是從求證之點，配合圖形上已知各部份，可以想得需用之定理。學者每證一題，均宜如是。

記　　號

$\cong$ 全等　$\neq$ 不等於　$>$ 大於　$<$ 小於　$\therefore$ 故　$\because$ 因

$\angle$ 角　$\angle$s 角（多數）　$\triangle$ 三角形　$\triangle$s 三角形（多數）

$\parallel$ 平行於，平行線　$\parallel$s 平行線（多數）　$\sim$ 相似於

$\perp$ 垂直於，垂直線　$\square$ 平行四邊形　$\odot$ 圓　$\frown$ 弧

rt. 直　*st.* 平　$\triangleq$ 以…量之，等度量

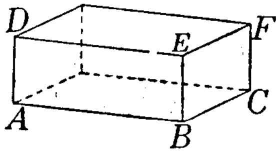
易進平面幾何上册目錄

平面幾何學

緒論

1. 定義　幾何學　幾何學為數學之一分科,論物體之形狀,大小及位置,而研究其眞理.

2. 定義　體　面　線　點　空間有限部分,稱為**體**或稱**立體**.體有長,闊,高(或厚),三度.如圖:假定為表面極平之箱子.DE 為長,EF 為闊,DA 為高.



體之限界稱為**面**,面有長闊二度而無厚.如圖:$ABED$,…　兩面之交界,或面之限界,稱為**線**.線祇有長度而無闊與厚.如圖:DE, EF, EB,…

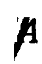
兩線之交界,或線之限界,稱為**點**.點祇有位置,不計大小.如圖:A, B, C,…

3. 定義　幾何圖形　平面　平面圖形　平面幾何學　由體,面,線,點中,任何幾種所組成之圖形,稱為**幾何圖形**.

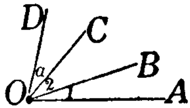
一面上任何二點之連線,皆在此面上者,稱為**平面**.圖形上各點皆在同一平面上者,稱為**平面圖形**.研究平面圖形之眞理,稱為**平面幾何學**.

4. 定義　直線　曲線　折線　線上各點方向不變者,稱為**直線**,如下圖 AB.　通常稱線,皆指直線.　線上每點方向改變者,稱為**曲線**,如下圖 CD.　由二條或二條以上之直線所合成之線,稱為**折線**,如下圖 EF

5. 定義　角　頂點　角邊　一直線在平面內,假設固定一端而轉動,所轉到之位置與原位置,即稱為**角**.固定之一端,稱為**頂點**.　原位置與轉到之位置,稱為**角邊**.如圖:　角 AOB,則 O 為頂點,而 OA 及 OB 為角邊.



6. 角之記法及讀法



若用三個字母表一角,則頂點字母應在中間,如 $\angle AOB$, 讀作'角 AOB'

若二個以上之角同一頂點,用頂點之一字母常表示諸角之全部,如 $\angle O$,卽同於 $\angle AOD$.

有時爲省便起見,可用數目字或小寫字母記在角內,如 $\angle 2$ 卽表示 $\angle BOC$, 而 $\angle a$ 表示 $\angle COD$.

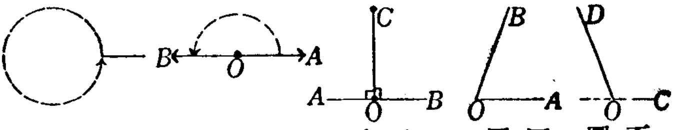
7. 定義　周角　平角　直角　垂線　垂足　距離　銳角　鈍角　斜角

若一直線固定一端,從原位置轉一周,仍到原位置,則稱爲**周角**.等於 360 度或 360°. 如下面圖一. (故在一點周圍諸角之和等於 360°,可視作一個角,稱爲周角.)

角之二邊在同一直線上,但從頂點依反對方向伸張者,稱爲**平角**,等於 180°. 如圖二: $\angle AOB$ 爲一平角.

平角之半爲**直角**,等於 90°,如圖三: $\angle COA$ 與 $\angle COB$ 皆爲直角. 成直角之二邊互爲**垂線**,如圖三: $CO \perp AB$, 而 $AB \perp CO$. 其交點稱爲**垂足**,如 O. 從一點至一直線所作垂線之長,爲從此點至直線之**距離**,如 CO.

小於直角之角稱爲**銳角**.如圖四: $\angle AOB$ 爲銳角. 大於直角而小於平角之角稱爲**鈍角**.如圖五: $\angle COD$ 爲鈍角. 銳角與鈍角統稱爲**斜角**.

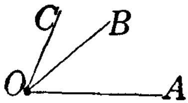


圖一　圖二　圖三　圖四　圖五

8. 定義　鄰角　餘角　補角或補鄰角　對頂角

若二角有同一頂點,且有一公共邊在其中間者,稱爲鄰角.

如圖: $\angle AOB$ 與 $\angle BOC$ 爲鄰角.

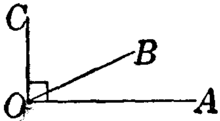


若二角之和等於一直角,則此二角互爲餘角.

如圖: $\angle AOB$ 與 $\angle BOC$ 互爲餘角.

即　$\angle AOB$ 爲 $\angle BOC$ 之餘角.

而　$\angle BOC$ 爲 $\angle AOB$ 之餘角.



例一. 問 20° 之餘角是多少?

解: 設餘角爲 x 度,則 $20^\circ+x=90^\circ$　$\therefore x=70^\circ$

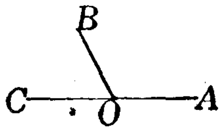
又法: $90^\circ-20^\circ=70^\circ$　　答餘角 70°

若二鄰角之和等於一平角,則此二角互爲補角,或補鄰角

如圖: $\angle AOB$ 與 $\angle BOC$ 互爲補角.

即　$\angle AOB$ 爲 $\angle BOC$ 之補角,

而　$\angle BOC$ 爲 $\angle AOB$ 之補角.



例二. 問 130° 之補角是多少?

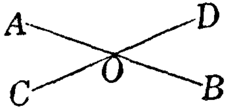
解: 設補角爲 x 度,則 $130^\circ+x=180^\circ$　$\therefore$　$x=50^\circ$

又法: $180^\circ-130^\circ=50^\circ$　　答補角 50°

相交二直線所成之相對兩角,稱爲對頂角.

如圖: $\angle AOC$ 與 $\angle BOD$ 爲對頂角,

而　$\angle AOD$ 與 $\angle BOC$ 爲對頂角.



習　題　一

1. 求右角之餘角: (a) 30°　(b) 80°　(c) 63°　(d) 56°
2. 求右角之補角: (a) 120°　(b) 80°　(c) 74°　(d) 56°

答數: 1. 餘角 (a) 60°　(c) 27°　2. 補角 (b) 100°　(d) 124°

9. 定義 定義 公理 定理 公法 作圖題

說明一個名詞之意義,所用之語言稱爲**定義**. 不待證明而人人公認爲正確之理,稱爲**公理**. 以公認爲正確之定義及公理,證明所得之眞理,稱爲**定理**. 用已知之定理可再證得其他定理. 在幾何學中,圖形之作法不待證明而公認爲可能者,稱爲**公法**. 由已知條件以作幾何學之圖形,須待證明而後認爲正確者稱爲**作圖題**

10. 定義 量

凡可增減或測度者,可施以數學之運算者,皆稱爲**量**. 平面幾何學之量是指線之長短,面或角之大小而言.

11. 公理表:

1. (*a*) 等於同量之量必等. (*b*) 等於等量之量必等

(*a*) 如 $2+5=7$ 而 $3+4=7$, 故 $2+5=3+4$.

(*b*) 若 $a=2+5$ 而 $b=3+4$, 因 $2+5=3+4$, 故 $a=b$

2. 等量加等量,其和必等.

如 $2+7=9\cdots(a)$ $6=1+5\cdots(b)$, 則

$(a)+(b)$ 得 $(2+7)+6=9+(1+5)$ 卽 $15=15$

3. 從等量減等量,其差必等.

如 $2+7=9\cdots(a)$ $6=1+5\cdots(b)$, 則

$(a)-(b)$ 得 $(2+7)-6=9-(1+5)$ 卽 $3=3$

4. 等量乘以等量,其積必等.故等量之二倍必等.

如 $10+30=40$ 則 $(10+30)\times5=40\times5$ 卽 $50+150=200$

又 $(10+30)\times2=40\times2$ 卽 $20+60=80$

5. 等量除以等量,其商必等.故等量之半份必等.

如 $10+30=40$, 則 $(10+30)\div5=40\div5$, 卽 $2+6=8$.

又 $(10+30)\div2=40\div2$, 卽 $5+15=20$.

6. 全量等於其諸分量之和.

如 $9=2+3+4$, 左邊爲全量,右邊爲諸分量.

7. 全量大於其任一分量.

如 $9=2+3+4$, 則 $9>2$, $9>3$, 又 $9>4$.

8. 在一個等式(或不等式)中,一量可以其等量代換之.

如 $5+4=9$, 而 $5=2+3$, 則 $(2+3)+4=9$.

9. 不等量加同序之不等量,其和不等,大量之和仍大.故不等量之倍不等,大者仍大.

如 $6+4>8\cdots(a)$ $5+2>3\cdots(b)$ 則

$(a)+(b)$ 得 $(6+4)+(5+2)>8+3$ 卽 $17>11$

又如 $6+4>8$, 則 $(6+4)\times2>8\times2$ 卽 $20>16$

10. 不等量之半不等,大者仍大.

如 $6+4>8$, 則 $(6+4)\div2>8\div2$, 卽 $3+2>4$.

11. 若三量中之第一量大於第二量,而第二量又大於第三量,則第一量大於第三量.

如 $9>7$, 而 $7>4$, 則 $9>4$.

12. 從不等量減去等量,其差不等,大者仍大.

如 $9>5\cdots(a)$ 而 $3=3\cdots(b)$, 則

$(a)-(b)$ 得 $9-3>5-3$, 卽 $6>2$.

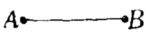
13. 從等量減去不等量,其差不等.減大量者餘量反小.

如 $2+7=9\cdots(a)$, 而 $5>3\cdots(b)$, 則

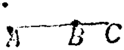
$(a)-(b)$ 得 $(2+7)-5<9-3$, 卽 $4<6$.

12. 公法表:

1. 過二點祇能作一直線. (或二點決定一直線)

如 

2. 一直線可無限延長.

如 AB 向右延長至 C,則稱爲延長 AB 至 C. 

3. 二直線祇能相交於一點,如 

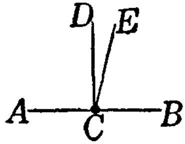
4. 幾何圖形可不變其形狀及大小,而移動其位置.

13. 直線形之初步定理.

1. **凡直角必等.** (因各爲 90^0).

2. **在已知直線上一點,對於此線,只能作一垂線.**

若在 C 點能作二垂線 CD 與 CE, 則 $\angle BCD$ 與 $\angle BCE$ 均爲直角而不相等,此與直角必等不合,故不可能.



3. **二點間之最短距離爲直線.**

4. **同角之餘角必等. 等角之餘角必等.**

若 $\angle 1$ 與 $\angle 3$ 均爲 $\angle 2$ 之餘角.

即 $\angle 1+\angle 2=90^0$, 又 $\angle 3+\angle 2=90^0$

則 $\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 2 \quad \therefore \quad \angle 1=\angle 3$

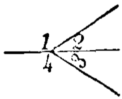
5. **同角之補角必等. 等角之補角必等.**

若 $\angle 1$爲$\angle 2$之補角, $\angle 4$爲$\angle 3$之補角.

又 $\angle 2=\angle 3$

因 $\angle 1+\angle 2=180^0$, 而 $\angle 4+\angle 3=180^0$,

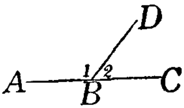
則 $\angle 1+\angle 2=\angle 4+\angle 3 \quad \therefore \angle 1=\angle 4$



6. **若二鄰角之外邊成一直線,則此二角互爲補角.**

如 $\angle 1$與$\angle 2$爲二鄰角,其外邊 BA

與 BC 成一直線,則$\angle 1+\angle 2=180^0$



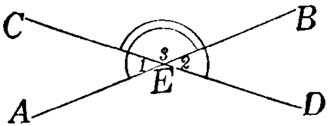
7. **若二鄰角互爲補角,則此二角之外邊成一直線.**

如上圖: 若 $\angle 1+\angle 2=180^0$, 則 ABC 必爲一直線.

14. 定義 假設 終結或求證 系

定理中假定爲眞確之部份,稱爲**假設**,用作證明之根據. 定理中必須證明之部份,稱爲**終結**,或稱爲**求證**從已證明之定理,推廣之得其他定理,稱爲**系**.

15. 定理一　兩直線相交,其對頂角必等.

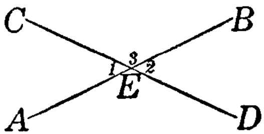


設: 二直線 AB 及 CD 相交於 E,而 $\angle 1$ 及 $\angle 2$ 爲對頂角.

求證: $\angle 1=\angle 2$, 又 $\angle 3=\angle AED$

證　明	理　由
1. $\angle 1+\angle 3=1$ 平角	1, 2, 設二鄰角之外邊成一直線,則此二角互爲補角.
2. $\angle 2+\angle 3=1$ 平角	
3. $\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 3$	3. 與等量相等之量必等.
4. $\therefore\ \angle 1=\angle 2$	4. 等量減等量,其差必等.
5. $\therefore\ \angle 3=\angle AED$	5. 同 1—4

16. 系　設兩直線相交,其所成之四角中,若有一角爲直角,則他三角必皆爲直角.



習　題　二

1. 如圖. 設 $\angle 3=2\angle 1$,
求 $\angle 1$, $\angle 3$ 及 $\angle 2$.

解: 因 $\angle 1+\angle 3=180^\circ$
即 $\angle 1+2\angle 1=180^\circ$
即 $3\angle 1=180^\circ$
$\therefore\ \angle 1=60^\circ$
而 $\angle 3=2\angle 1=120^\circ$
又 $\angle 2=\angle 1=60^\circ$

2. 如圖: 設 $\angle 3=5\angle 1$, 求 $\angle 1$, $\angle 3$ 及 $\angle 2$.

3. 如圖: 設 $\angle 3=3\angle 1$, 求 $\angle 1$, $\angle 3$ 及 $\angle 2$.

4. 如圖: 設 $\angle 3=8\angle 1$, 求 $\angle 1$, $\angle 3$ 及 $\angle 2$.

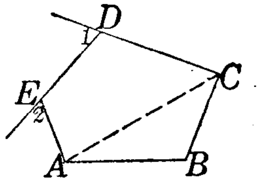
5. 如圖: 設 $\angle 3=4\angle 1$, 求 $\angle 1$, $\angle 3$ 及 $\angle 2$.

6. 如圖: 設 $\angle 3=9\angle 2$, 求 $\angle 2$, $\angle 3$ 及 $\angle 1$.

答數: **2.** 30°, 150°, 30°　**3.** 45°, 135°, 45°
4. 20°, 160°, 20°　**5.** 36°, 144°, 36°

17. 定義　多邊形又稱多角形　多邊形之邊　角　頂　周界　外角　對角線

三條直線以上所包圍之平面,稱爲**多邊形**. 此等直線稱爲多邊形之**邊**. 每兩邊所夾之角,稱爲多邊形之**角**. 角之頂點稱爲多邊形之**頂**. 諸邊之和稱爲多邊形之**周界**. 一邊與鄰接此邊之引長線所成之角稱爲多邊形之**外角**. 連結不在多邊形同一邊上二頂點之直線,稱爲**對角線**. 多邊形之角數必等於其邊數,故又稱爲**多角形**.



如圖: $ABCDE$ 爲五邊之多邊形. $AB, BC, \cdots$ 爲邊. $\angle A, \angle B, \cdots$ 爲角. $A, B, \cdots$ 爲頂. AC 爲對角線. $\angle 1, \angle 2$ 爲外角.

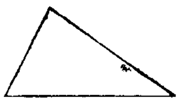
18. 定義　三角形　四邊形

多角形之有三邊者稱爲**三角形**　有四邊者稱爲**四邊形**.

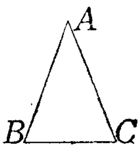
19. 定義　不等邊三角形　等腰三角形,又稱二等邊三角形. 等邊三角形又稱正三角形

三角形無二邊相等者,稱爲**不等邊三角形**. 三角形有二邊相等者,稱爲**等腰三角形**,又稱**二等邊三角形**. 三角形之三邊相等者,稱爲**等邊三角形**,又稱**正三角形**.

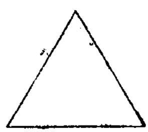
不說明等腰或等邊之三角形,必爲不等邊三角形.



不等邊三角形



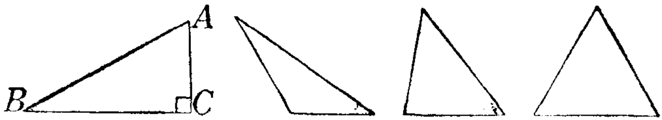
等腰三角形



等邊三角形

20. 定義　**直角三角形**(或**直三角形**), (或**勾股形**)
鈍角三角形　**銳角三角形**　**等角三角形**

三角形有一角爲直角者,稱爲**直角三角形**(或**直三角形**), (或**勾股形**). 三角形有一角爲鈍角者,稱爲**鈍角三角形**. 三角形之三角俱爲銳角者,稱爲**銳角三角形**. 三角形之三角俱相等者,稱爲**等角三角形**. 不說明何種三角形必爲銳角三角形.



21. 定義　**三角形之底**　**頂角**　**頂點**

三角形可設想其立於一邊之上,此邊稱爲三角形之**底**. 三角形任一邊皆可爲底. 三角形對底邊之角爲**頂角**. 此角之頂點常稱爲三角形之**頂點**.

22. 定義　**等腰三角形之腰**　**底**　**底角**

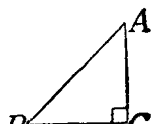
等腰三角形之相等二邊稱爲**腰**.如上頁圖 AB 與 AC 是. 第三邊爲**底**.如 BC 是. 對腰之二角常稱爲等腰三角形之**底角**.如 $\angle B$ 與 $\angle C$ 是.

23. 定義　**直角三角形之斜邊**(或**弦**)　**兩股**(或**直角邊**)

直角三角形對直角之邊,稱爲**斜邊**(或**弦**), 如上圖 AB 是. 夾直角之二邊,稱爲**兩股**(或**直角邊**), (或**勾股**), 如上圖 AC 與 BC 是.(或短邊稱爲**勾**,長邊稱爲**股**)

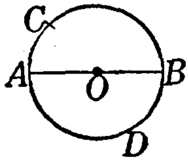
24. 定義　**等腰直角三角形**

直角三角形夾直角之二邊相等者,稱爲**等腰直角三角形**.如右圖 $AC=BC$ 是.



25. 作圖之器具　在平面幾何學中,作圖之器具,只能用直尺及圓規. 因此,只能作直線與圓,或圓之一部份.

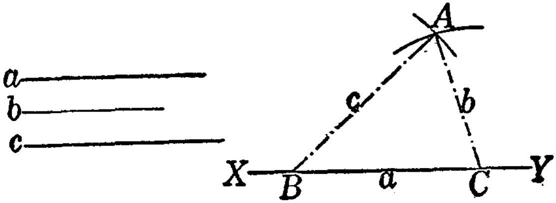
圓為一平面上之封閉曲線,如 $ADBC$. 線上各點均與圓內部之一點等距離,此一點稱為圓心,如 O. 從圓心至圓之直線稱為半徑,如 OA. 過圓心而兩端在圓上之直線,稱為直徑,如 AB.



圓上之一部份為弧,如 $\overset{\frown}{AC}$ 或 $\overset{\frown}{CB}$. 弧之記號為⌒

26. 初步作圖　就本書中開始之幾個圖形學習之.

27. 作圖題一　**已知三邊,作一三角形.**



設:　a, b 及 c 為已知三邊

求:　作一三角形,使三邊等於 a, b, 及 c.

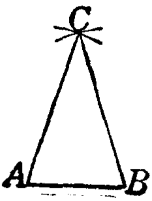
作法:　在無限長直線 XY 上,截取 $BC=a$

以 C 為圓心,b 為半徑,作弧; 以 B 為圓心,c 為半徑,作弧

兩弧相交於 A. 作 AB 及 AC, 則 $\triangle ABC$ 即合所求.

28. 系　**已知三邊,可作一三角形.**

例題　以已知直線 AB 為底,作任意等腰三角形.



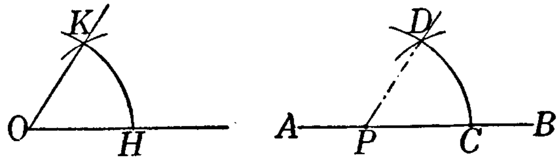
作法:　以 A 為圓心,大於(或小於) AB 之長為半徑, 作弧.

以 B 為圓心,同上之長為半徑, 作弧.

兩弧相交於 C. 作 AC 及 BC.

則 $\triangle ABC$ 即合所求.

29. 作圖題二　**從已知直線上一點,作一角等於已知角**



設: $\angle O$ 及直線 AB 上一點 P 爲已知.

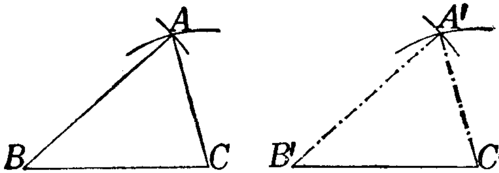
求: 從 P 作一角,使等於 $\angle O$

作法: 以 O 爲圓心,任意長爲半徑,作弧,交 $\angle O$ 之二邊於 H 及 K. 用同一半徑,以 P 爲圓心,作弧,交 AB 於 C.

以 C 爲圓心,用等於 HK 之長爲半徑,作弧. 與以 P 爲圓心之弧交於 D. 作 PD. 則 $\angle BPD=\angle O$.

30. 系　**從直線上一點,可作一角等於已知角**

31. 定義　**重合　全等形**　一圖形移置於另一圖形上,而各點能互相密合時,此二圖形稱爲**重合**. 能使重合之二圖形,其面積及形狀完全相等,稱爲**全等形**. 如下二圖形是. 記號爲≌或≡.



每題要詳教　**習　題　三**　只要作圖,不要寫說明

1. 先作一任意 $\triangle ABC$,再作 $\triangle A'B'C'\cong\triangle ABC$. 如上圖
2. 以 AB 爲底,在其上面與下面,作 $\triangle ABC\cong\triangle ABD$
3. 以已知長 AB 爲底,作等邊三角形 ABC
4. 先作一任意 $\triangle ABC$. 再在三邊上向外各作一等邊 $\triangle ABD$, $\triangle BCE$, 及 $\triangle CAF$.

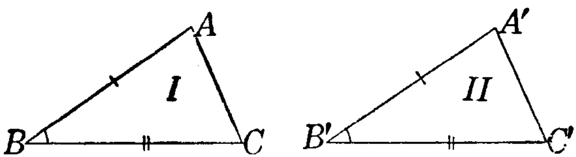
第一編　直線形

第一章　全等三角形

32. 定理二　若一三角形之二邊及其夾角順次等於另一三角形之二邊及其夾角,則此兩形全等.

或: 有二邊及夾角順次相等,則兩三角形全等.

或: $s.\ a.\ s. = s.\ a.\ s.$　$s = side$ 邊　$a = angle$ 角



設: 在 $\triangle I$ 及 $\triangle II$ 中, $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $\angle B = \angle B'$

求證: $\triangle I \cong \triangle II$

證明	理由
1. 移置 $\triangle I$ 於 $\triangle II$ 上,使 BC 與其等長 $B'C'$ 重合	1. 圖形可以移置.
2. BA 落於 $B'A'$ 上.	2. 因 $\angle B = \angle B'$
3 點 A 落在點 A' 上.	3. 因 $AB = A'B'$
4. 今 A 在 A' 上, C 在 C' 上,故 AC 與 $A'C'$ 重合.	4. 兩點之間,只能作一直線.
5. $\therefore$ $\triangle I \cong \triangle II$.	5. 能重合之圖形爲全等形

33. 疊合證法　移置一圖形於另一圖形之上以證明兩形之全等,稱爲**疊合證法**.僅用於基本定理.如上法是