黑龙江省高师函授教材

数学分析

下册

黑龙江省函授广播学院

为进一步落实英明领袖华主席提出的抓纲治国的战略决策，适应教育战线大干快上的大好形势，搞好教师进修工作，根据我省高师函授教材会议精神，组织编写了这套数学函授教材，作为中学数学教师函授学习用书。这套教材共分五册，其中《解析几何》、《数学分析》、《计算机与逻辑代数》由哈尔滨师院编写；《高等代数》由齐齐哈尔师院编写；《概率与统计》由牡丹江师院编写。

由于全国统一教材尚未出版，我们的水平有限，时间又很仓促，故教材中可能存在不少缺点和错误，诚恳希望广大读者给予批评指正。

黑龙江省函授广播学院

一九七八年十二月

目　　录

第六章 不定积分

从这一章开始，我们要系统地讨论数学分析中基本矛盾的另一个侧面——积分。它是数学分析的一个主要部分，它和第四章、第五章所研究的导数、微分及其应用一起构成了数学分析的基本内容。在本章和下章中，我们要建立不定积分和定积分概念，并研究它们的性质、运算。在自然科学和生产实践中，有很多问题，例如计算面积、体积、压力、变力作功等等，都可以归结为积分问题，在第八章中我们可以看到，积分的应用是相当广泛的。

在这一章，我们要建立不定积分的概念，介绍不定积分的基本性质、计算不定积分的两个基本法则、有理函数的积分法等。总起来说，这一章的基本内容就是不定积分的计算方法。以后我们会看到，计算定积分、解微分方程都要归结为计算不定积分，所以这一部分内容很重要，我们要通过大量的练习来熟练地掌握计算不定积分的这些方法。

第一节 不定积分的概念

在前两章中，我们所研究的是寻求已知函数的导数问题，这就是微分运算。现在我们要研究微分的逆运算——求原函数。

在初等数学中我们知道，数学运算一般是成对出现的。也就是说，有一种正运算，就有一种逆运算。例如加法和减

法、乘法和除法、乘方和开方以及指数和对数运算等等都是我们所熟悉的正、逆运算。现在我们提出这样一个问题：微分是否存在逆运算呢？

大量的自然科学问题和生产实际问题肯定了微分是存在逆运算的。因为有很多问题不是要寻找某一个已知函数的导数，而是反过来，寻找一个函数，使得它的导数恰好等于某一个已知函数。

例如，自由落体的运动方程为 $S=\frac{1}{2}gt^2$，用微分法可以求出自由落体的速度 $V=\frac{dS}{dt}=gt$。现在我们提出相反的问题，假设已知自由落体在时刻 t 的速度为 $V=gt$，要找出距离与时间的关系，使得 $\frac{dS}{dt}=gt$。我们把它抽象为一般性的问题，就是要从一个函数的导数来确定出原来的函数。

定义　已知 $f(x)$ 是定义在某一区间上的一个函数，现在我们要找出这样的函数 $F(x)$，使得在已知的区间上的任意一点 x 处都有

$$F'(x)=f(x)$$

我们把具有这样性质的函数 $F(x)$ 叫做 $f(x)$ 的原函数。

例如 $\sin x$ 是 $\cos x$ 的原函数，e^x 是 e^x 自身的原函数等等。

定理 1　假若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，那么函数族 $F(x)+C$ 都是 $f(x)$ 的原函数，这里 C 是一个任意常数。

证　我们只要证明 $F(x)+C$ 的导数是 $f(x)$ 就可以了。根据定理的条件

$$F'(x)=f(x) \qquad C'=0$$

故　$$[F(x)+C]'=F'(x)+C'=F'(x)=f(x)$$

由这一定理可知，对于一个給定的函数$f(x)$，假若它有一个原函数$F(x)$，那么$f(x)$便有无穷多个原函数。

例如已知$\sin x$是$\cos x$的原函数，那么

$$\sin x+1,\qquad \sin x+\frac{1}{2},\ \sin x+\sqrt{2},\ \cdots$$

都是$\cos x$的原函数。

接着我们要问一个问题，除了形如$F(x)+C$的函数外，$f(x)$还有没有其他的原函数呢？我们的回答是再没有了，这一点，有下列定理作为保证：

定理 2 假若$F_1(x)$和$F_2(x)$是$f(x)$任意的两个原函数，那么$F_2(x)$与$F_1(x)$之差是一个常数。

证 因为$F_1(x)$和$F_2(x)$都是$f(x)$的原函数，那么

$$F_1'(x)=f(x)\qquad F_2'(x)=f(x)$$

所以 $$[F_1(x)-F_2(x)]'=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0$$

由第五章第一节我们知道，如果一个函数的导数恆等于零，那么这个函数是一个常数，所以

$$F_1(x)-F_2(x)=C$$

由这个定理我们可以看出，如果$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，那么$f(x)$的任意一个原函数都包含在函数族$F(x)+C$之中，除了这个函数族以外，再没有其他的原函数。$F(x)+C$就表示了$f(x)$的原函数的全体，它是$f(x)$的原函数的一般表达式。

定义 函数$f(x)$的原函数的一般表达式$F(x)+C$叫做$f(x)$的不定积分，并记作

$$\int f(x)dx$$

即 $$\int f(x)dx = F(x) + C$$

这里我们把 $f(x)$ 叫做被积函数，$f(x)dx$ 叫做被积式，C 叫做积分常数，“$\int$”叫做积分符号。而 $\int f(x)dx$ 讀作 $f(x)$ 的不定积分。

例如：因为 $\left(\frac{x^5}{5}\right)' = x^4$

所以 $$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C$$

同理因为 $(\sin x)' = \cos x$, $(e^x)' = e^x$;

所以 $\int \cos x\, dx = \sin x + C$ $\quad \int e^x dx = e^x + C$

由此可见，不定积分并不是什么难懂的概念，它只不过是作为一种名词用来表达一个函数的所有原函数罢了。应该注意，当我们计算某一不定积分时，不能把结果中的积分常数遗漏。

下面我们简单介绍一下不定积分的几何意义。函数 $f(x)$ 的一个原函数在几何上表示一条曲线，$f(x)$ 的不定积分既然是 $f(x)$ 的全部原函数，所以它在几何上就表示无限多条曲线，这无限多条曲线构成一个曲线族，叫做 $f(x)$ 的积分曲线族。它有下面两个特性：

(1) 在积分曲线族 $F(x) + C$ 中，任意两条积分曲线之间只相差一个常数，所以任意两条积分曲线都是互相平行的。经过平移，就可以使它们互相重合。

(2) 对应于同一横坐标 x，曲线族中所有曲线的斜率是相同的（因为 $(F(x) + C)' = f(x)$）。因此在积分曲线族中所

有曲线上，对应于同一横坐标 x 的点处所作的切线是一族平行的直线。

例 作不定积分 $\int 2x\,dx$ 的图象。

解 我们容易看出 $\int 2x\,dx = x^2+C$，給 C 以不同的数值就可以得到被积函数的积分曲线族。它是把曲线 $y=x^2$ 沿 y 轴平行移动而形成的曲线族。(图 6—1)。

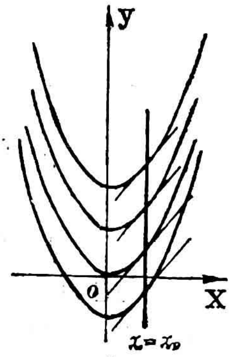

图 6—1

容易看出，这曲线族中任意两条积分曲线之间只相差一个常数，对于同一横坐标 x_0，曲线族中所有曲线的斜率是相同的（因为$(x^2)'=2x$)。如图 6—1 中，在 x_0 处对曲线所做的切线是一族平行的直线。

问　　题

1. 什么是一个函数的原函数？一个函数与原函数之间有什么关系？试举两例说明。

2. 什么是一个函数的不定积分？它和函数的原函数有什么区别？试举例说明。

第二节　基本积分表

从这一节开始，我们要逐步介绍计算不定积分的方法，也就是积分法。

积分法和微分法是互逆的运算，因为微分和积分运算滿

足下列等式：

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)=f(x) \quad (1)$$

$$\int F'(x)dx=F(x)+C \quad (2)$$

或

$$d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx \quad (3)$$

$$\int dF(x)=F(x)+C \quad (4)$$

我们首先证明（1）和（3）。根据不定积分定义，如果$F'(x)=f(x)$，那么

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

所以 $$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right)=\frac{d}{dx}(F(x)+C)=F'(x)=f(x)$$

或 $$d\left(\int f(x)dx\right)=\left(\int f(x)dx\right)'dx=f(x)dx$$

对于（2），只要对$F(x)$先求导得到$F'(x)$，再求不定积分即得，同理可证（4）。

上述等式表明，正像加法与减法、乘法与除法、乘方与开方互为逆运算一样，积分法与微分法也互为逆运算。即通过求不定积分，由$f(x)$可得到$F(x)+C$；通过求导，由$F(x)+C$就回到$f(x)$。所以，积分符号“$\int$”与微分符号“d”$\left(\text{或导数符号}\frac{d}{dx}\right)$重迭使用，不论先后恰好互相抵消（在不考虑积分常数$C$的情况下）。

例如从

$$(\text{arc tg}\, x)'=\frac{1}{1+x^2} \quad (5)$$

便有

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \int (\text{arc tg}\, x)'dx = \text{arc tg}\, x + C \qquad (6)$$

求导公式	基本积分公式
1 $(ax)' = a$	1 $\int a dx = ax + C$
2 $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} (\alpha \neq -1)$	2 $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$
3 $(\ln\|x\|)' = \frac{1}{x} (x \neq 0)$	3 $\int \frac{1}{x} dx = \ln\|x\| + C$*
4 $(e^x)' = e^x$	4 $\int e^x dx = e^x + C$
5 $(a^x)' = (\ln a) a^x$	5 $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
6 $(\sin x)' = \cos x$	6 $\int \cos x\, dx = \sin x + C$
7 $(\cos x)' = -\sin x$	7 $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
8 $(\text{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	8 $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg}\, x + C$
9 $(\text{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	9 $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg}\, x + C$
10 $(\text{arc tg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$	10 $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg}\, x + C$
11 $(\text{arc sin}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	11 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin}\, x + C$

* 这里要作一下说明，因为当 $x>0$ 时，$(\ln x)' = \frac{1}{x}$，又当 $x<0$ 时，$(\ln|x|)' = [\ln(-x)]' = \frac{1}{x}$，所以不论 x 取何值都有 $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$。

所以，只要我们会算多少个函数的导数，也就会求多少个函数的不定积分。

由第四章第四节和第五节所列出的求导公式，可以像前面从式（5）推出式（6）一样，写出与它相对应的不定积分公式。上面我们列出最基本的积分公式（为便于回忆对照，我们同时列出相应的求导公式）。

这些不定积分公式很重要，我们称它为基本积分表，我们应当牢记。

借助于积分法则可以把上面得到的基本积分表所适用的范围加以扩充。下面介绍两个**简单积分法则**：

1．两个函数代数和的不定积分等于这两个不定积分的代数和，即

$$\int[f_1(x)\pm f_2(x)]dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx$$

证 对两边求导

左边：$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int[f_1(x)\pm f_2(x)]dx=f_1(x)\pm f_2(x)$

右边：$\dfrac{d}{dx}\left\{\displaystyle\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx\right\}=$

$$=\frac{d}{dx}\int f_1(x)dx\pm\frac{d}{dx}\int f_2(x)dx=f_1(x)\pm f_2(x)$$

这就是说两边的导数相同，因而这两边至多相差一个常数，但这常数可以合并到积分常数中，所以这一法则成立。

这一法则还可以把被积函数的个数推广到任意有限个，即

$$\int[f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\pm f_n(x)]dx=\int f_1(x)dx\pm$$
$$\pm\int f_2(x)dx\pm\cdots\pm\int f_n(x)dx$$

2. 被积函数的常数因子可以提到积分号外面。即

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)dx$$

这一法则的证明和前一法则证明类似，我们把证明留给讀者完成。

利用这两个简单积分法则及基本积分表可以求得一些函数的不定积分：

例 1 求$\int (3x+5\cos x)dx$。

解 由简单积分法则有：

$$\begin{aligned}\int (3x+5\cos x)dx &= \int 3x\,dx + \int 5\cos x\,dx\\ &= 3\int xdx + 5\int \cos x\,dx\\ &= \frac{3}{2}x^2 + 5\sin x + C\end{aligned}$$

例 2 求$\int\left(\frac{2a}{\sqrt{x}} - b\sin x + ce^x\right)dx$

解 由简单积分法则有

$$\int\left(\frac{2a}{\sqrt{x}} - b\sin x + ce^x\right)dx = \int 2ax^{-\frac{1}{2}}dx - \int b\sin x\,dx +$$

$$+\int ce^x\,dx = 2a\int x^{-\frac{1}{2}}dx - b\int \sin x\,dx + c\int e^x dx$$

$$= 4ax^{\frac{1}{2}} + b\cos x + ce^x + C$$

例 3 计算$\int (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n)dx$

解 $\int (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n)dx$

$$= a_0\int x^n\,dx + a_1\int x^{n-1}dx + \cdots + a_{n-1}\int xdx + a_n\int dx$$

$$\frac{a_0}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_1}{n}x^n + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2}x^2 + a_nx + C$$

所以多项式都是可以积分的。

例 4 计算 $\int \mathrm{tg}^2 x\, dx$。

解 $\int \mathrm{tg}^2 x\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} -$

$$- \int dx = \mathrm{tg}\, x - x + C$$

例 5 计算 $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$

解 我们利用半角公式 $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos x)$ 得

$$\int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1-\cos x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos x\, dx$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin x + C$$

由以上两题可以看出，在积分中经常要用初等数学中的一些公式进行恒等变形。

练　　习

计算下列不定积分：

1. $\int \frac{dx}{x^2}$；

2. $\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}}$；（$g$是常数）

3. $\int 10\, dx$；

4. $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}\right)dx$；

5. $\int(2x^{2}-3)^{2}dx$；

6. $\int\frac{(x+1)^{2}}{x^{3}}dx$；

7. $\int\frac{\sqrt{x}-x^{3}e^{x}+x^{2}}{x^{3}}dx$；

8. $\int(1+\sin x+\cos x)dx$；

9. $\int\frac{4+3\cos^{3}x}{\cos^{2}x}dx$；

10. $\int\left(3\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{1-x^{2}}}\right)dx$。

第三节　变量替换法

从上一节可以看到，虽然利用基本积分表和简单积分法则可以求不少函数的原函数，但是实际上遇到的积分仅靠这一些方法还是不够的。例如

$$\int e^{x}\sin(e^{x})dx$$

就无法求出。为了求得较一般的不定积分，还需采用其他的方法。这一节我们介绍积分法中最重要的一种方法——变量替换法。

1. 简单的变量替换法——凑分法

我们先来研究积分

$$\int e^{x}\sin(e^{x})dx$$

可以设想，由于

$$e^{x}dx=de^{x}$$

那么上面的积分就可化为

$$\int e^x\sin(e^x)\,dx = \int \sin(e^x)de^x$$

作变量替换 $u=e^x$，上式右端即为 $\int \sin u du$，可直接利用基本积分表求得其原函数为 $-\cos u$，再代回原变量 x，即得

$$\int e^x\sin)e^x)dx = -\cos(e^x)+C$$

下面对一般情况给于证明。

定理 1 设 $f(x)$，$\varphi(x)$，$\varphi'(x)$ 都是连续函数 作代换 $u=\varphi(x)$，则

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(u)du \qquad (1)$$

证 设 $F(u)$ 是 $f(u)$ 的原函数，则由本章第二节公式，(1)

$$F'(u)=f(u)\text{，即}\quad F'(\varphi(x))=f(\varphi(x))$$

但由复合函数求导法则得

$$[F(\varphi(x))]'=F'(\varphi(x))\varphi'(x)=f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

根据不定积分的定义

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x))+C \qquad (2)$$

又因 $F(u)$ 是 $f(u)$ 的原函数，即

$$\int f(u)du = F(u)+C \qquad (3)$$

由于式 (2) 与式 (3) 右边是相同的，所以公式 (1)得证。

根据这个定理，在求不定积分时，如果不能直接由基本积分表得出，那么可以考虑用这样的方法：首先把所求不定积分与已知的基本积分表相对照，看是否一部分是另一部分

的微分，也就是看是否被积函数可写成

$$f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

的形式，如果是这样，就可以用变易替换 $u=\varphi(x)$，把要求的不定积分"凑成"基本积分表中已有的形式，求出以后，再把原来的变易代回。这种方法就是简单的变易替换法，也叫"凑微分法"。下面我们结合例子来说明：

例 1 计算 $\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}dx$

解 因为

$$\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg} x\,(\operatorname{arc\,tg} x)'$$

这里 arc tg x 相当于（1）式中的 $\varphi(x)$，我们作变易替换

$$\operatorname{arc\,tg} x=u \quad 则$$

$$\frac{1}{1+x^2}dx=(\operatorname{arc\,tg} x)'dx=du$$

代入原不定积分中，得到

$$\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}dx=\int u\,du=\frac{u^2}{2}+C=\frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2+C$$

例 2 计算 $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$

解 被积函数可写成 $\ln^2x(\ln x)'$，所以取 $u=\ln x$，

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}dx=\int \ln^2 x\,d\ln x=\int u^2du$$

$$=\frac{1}{3}u^3+C=\frac{1}{3}\ln^3x+C$$

例 3 计算 $\int \frac{1}{2x-3}dx$