

中西算學大成卷九

嘉善陳維祺纂

幾何原本八

論有比例無比例之理 二凡二十七題

第一題

若干連比例率。首尾二率無等數。則諸率為同比最小數。

解曰。甲乙丙丁連比例率。首尾甲丁無等數。題言甲乙丙丁為同比最小數。

丁辛論曰。若云諸率非同比最小數。則設戊己庚辛。小于甲乙丙丁。而與甲乙丙

丁同比。甲乙丙丁既與戊己庚辛同比。而甲乙丙丁若干率。與戊己庚辛若

丙庚一丁。干率等。則平理甲與丁比。若戊與辛比。而甲乙丙丁無等數。凡無等數之數。

乙一乙。必為同比最小數。即可度他同比數。前率度前率。後率度後率。等。則

甲八甲。戊乃以大度小。理所不能。故戊己庚辛小于甲乙丙丁。必不與甲乙丙

丁同比。而甲乙丙丁為同比最小數。

第二題

有同比最小率。求連比例最小數。

法曰。甲乙為同比最小率。求若干連比例最小數。如求四數。則以甲自乘

得丙。以甲乘乙得丁。以乙自乘得戊。又以甲乘丙丁戊得己庚辛。以乙乘

戊得壬。即得己庚辛壬四數。蓋甲既自乘得丙乘乙得丁。是甲乘甲乙兩

數生丙丁兩數。故甲與乙比。若丙與丁比。又甲乘乙得丁。而乙自乘

得戊。是甲乙各乘乙得丁戊。故甲與乙比。若丁與戊比。惟甲與乙比。

若丙與丁比故丙與丁比亦若丁與戊比甲乘丙丁得己庚則丙與丁比若己與庚比惟丙與丁比若甲與乙比故甲與乙比若己與庚比又甲乘丁戊生庚辛則丁與戊比若庚與辛比惟丁與戊比若甲與乙比故甲與乙比若庚與辛比而甲乙乘戊生辛壬則甲與乙比若辛與壬比惟甲與乙比與庚庚與辛俱同比本論故己與庚庚與辛辛與壬亦同比則丙丁戊及己庚辛壬諸數俱為甲乙同比數亦為同比最小數蓋甲乙既為同比最小數同比最小數為無等數之數七篇二則甲乙無等數惟甲乙各自乘得丙戊各再得乘己壬則丙戊與己壬俱無等數七篇二十凡若干連比例率首尾無等數必為同比最小數本篇一則丙丁戊及己庚辛壬為甲乙同比最小數

第三題

若干連比例率為同比最小數則首尾無等數

系知此理可明若連比例三率為同比最小數其首尾為平方如四率則為立方

解曰甲乙丙丁連比例率為同比最小數題言首甲尾丁無等數

論曰戊己為甲乙丙丁同比最小二數本篇庚辛壬為同比最小三數

推至最小諸數與甲乙丙丁若干率等命此諸數為子丑寅卯則首子

尾卯無等數蓋戊己既無等數各自乘得庚壬各再乘得子卯則庚壬

子卯俱無等數七篇甲乙丙丁既為同比最小數而子丑寅卯為甲乙

甲八乙一丙二丁七
戊二己三庚四辛六壬九
子八丑一寅二卯七

丙丁同比最小數甲乙丙丁若干率與子丑寅卯若干率等則甲乙丙丁各數與子丑寅卯各數等是以甲與子等丁與卯等子與卯既無等數則甲丁亦無等數

第四題 若干同比最小率求相連同比之最小數

六法曰甲與乙丙與丁戊與己為各同比最小率求相連同比最小數以辛
五子辰為乙丙所度最小數七篇三取庚壬二數令乙度辛得若干與甲度庚相
四子辰等丙度辛得若干與丁度壬相等而戊或度壬或不度壬若度壬則取子
三壬卯令戊度壬得若干與己度子相等甲度庚得若干既與乙度辛得若干等
五辛寅則甲與乙比若庚與辛比七篇又丙與丁比若辛與壬比戊與己比若壬
乙辛寅與子比理同故庚辛壬子為甲與乙丙與丁戊與己諸率相連同比之數
甲庚丑與子比理同故庚辛壬子為甲與乙丙與丁戊與己諸率相連同比之數
亦為同比最小數若云非最小別有數小于庚辛壬子為丑寅卯辰則甲與乙比
若丑與寅比而甲乙為最小數最小數可度諸同比數前率度前率後率度後率
俱等七篇二則乙度寅又丙亦度寅是乙丙度寅而乙丙所度之最小數亦度寅
七篇三乙丙所度之最小數為辛故辛度寅然以大度小理所不能故無小于庚
辛壬子與甲乙丙丁戊己同比者

設戊不度壬則取寅為戊壬所度最小數七篇三又取子丑卯令壬度寅得若干
與庚辛度子丑得若干等戊度寅得若干與己度卯得若干等庚度子得若干既

三乙四戊三
 己卯四
 寅六
 丁一
 壬五
 二
 丙一
 子二
 五
 三
 丁一
 壬五
 二
 丙一
 子二
 五
 三

與辛度丑得若干等。則庚與辛比。若子與丑比。十三篇。惟庚與辛比。若甲與乙比。故甲與乙比。若子與丑比。又丙與丁比。若丑與寅比。理同。戊度寅得若干。既與乙度卯得若干等。則戊與己比。若寅與卯比。故子丑寅卯為甲與乙。丙與丁。戊與己。諸率相連同比之數。亦為最小數。若云非最小。而別有辰巳午未四數。小于子丑寅卯。則辰與巳比。若甲與乙比。而甲乙為最小數。最小數度諸同比數。前率度前率。後率度後率。俱等。十一篇。二。則乙度巳。而丙亦度巳。故乙丙度巳。而乙丙所度最小數亦度巳。辛為乙丙所度最小數。故辛度巳。又辛與巳比。若壬與午比。十三篇。故壬度午。而戊亦度午。則戊壬度午。戊壬所度最小數亦度午。戊壬所度之最小數為寅。故寅度午。然以大度小。理所不能。則無小于子丑寅卯之數。與甲乙丙丁戊己同比者。是以子丑寅卯為甲與乙。丙與丁。戊與己。相連同比最小數。面數之比例。為邊之相結比例。解曰。甲乙為二面數。丙丁為甲之二邊。戊己為乙之二邊。題言甲乙之比。例為丙丁戊己相結之比例。論曰。丙與戊。丁與己。各為比例率。取庚辛壬為相連同比最小數。本篇令丙與戊比。若庚與辛比。丁與己比。若辛與壬比。以子為丁戊乘得數。丁乘

三乙一丙既生甲而乘戊生子七篇界則丙與戊比若甲與子比七篇惟丙與戊

甲庚一六比若庚與辛比論本故庚與辛比亦若甲與子比又戊乘丁既生子而乘己

生乙則丁與己比若子與乙比惟丁與己比若辛與壬比論本故辛與壬比亦若子

與乙比又庚與辛比若甲與子比論本故庚與壬比若甲與乙比七篇夫庚與壬比

為其邊之相結比例六篇界是以甲與乙比亦為邊之相結比例十四

第六題

凡連比例率第一數不度第二數則後諸數皆不相度

解曰甲乙丙丁戊為連比例率如甲不度乙題言甲乙丙丁戊皆不相度

論曰甲不度乙而甲亦度不餘諸數如甲不度丙是也其理易明設有己庚

辛若干率等于甲乙丙若干率而為甲乙丙同比最小數七篇三己庚辛既

與甲乙丙為同比數而甲乙丙與己庚辛之諸率相等則甲與丙比若己與

辛比七篇甲與乙比若己與庚比而甲不度乙則己不度庚七篇界故己非

一因一無數不可度故也七篇界而已辛無等數三篇故己不度辛七篇界

惟己與辛比若甲與丙比是以甲不度丙準此可顯無數可度他數說十二

第七題

若干連比例率首率度尾率則亦度第二率

解曰甲乙丙丁若干連比例率甲度丁題言甲亦度乙

論曰如甲不度乙則無數度他數六篇與題不合因甲度丁故也故甲度丁則

亦度乙

第八題 彼此各兩數同比。此兩數間有若干連比例率。則彼兩數間亦有若干連比例率。

解曰。甲乙兩數間有丙丁若干連比例率。戊己與甲乙同比。題言甲乙間有若干連比例率。戊己間亦有若干連比例率。

論曰。庚辛壬子若干率與甲丙丁乙若干率等。亦為甲丙丁乙同比最小數。三則首庚尾子無等數。三本篇甲丙丁乙既與庚辛壬子同比。而甲

丙丁乙若干率與庚辛壬子若干率等。則甲與乙比。若庚與子比。十四篇惟甲與乙比。若戊與己比。故庚與子比亦若戊與己比。乃庚子為同比最小數。七篇

三同比最小數可度諸同比數前率度前率後率度後率俱等。七篇二故庚度戊若子度己。又庚度戊得若干。若辛壬各數度丑寅各數得若干。故庚辛壬子度戊

丑寅己俱等。而庚辛壬子與戊丑寅己同比。七篇界說二十惟庚辛壬子與甲丙丁乙同比。故甲丙丁乙亦與戊丑寅己同比。而甲丙丁乙為連比例率。故戊丑寅己亦為

連比例率。是以甲乙間有若干連比例率。則戊己間亦有若干連比例率也。

第九題 首尾兩無等數之數。中間有若干連比例率。則其首其尾與一之中間亦各有若干連比例率。

七
乙二
辰二
言甲乙間有若干連比例率則甲戌及乙戌間亦各有若干連比例

一
丁一
戌一
率

二
乙二
庚三
壬六
寅一
論曰己庚為甲丙丁乙二同比率本篇辛壬子為三同比率推至丑

三
丙一
寅一
寅卯辰若干同比率與甲丙丁乙若干率等即顯己自乘生辛本篇

四
甲八
己乘辛生丑庚自乘生子庚乘子生辰丑寅卯辰為己庚同比小最數甲丙丁乙

五
亦為己庚同比最小數丑寅卯辰諸率與甲丙丁乙諸率等而丑寅卯辰各數與

六
甲丙丁乙各數等故丑與甲等辰與乙等又己自乘生辛己度辛得己中之若干

七
一而戊度己亦得己中之若干一故戊度己與己度辛等是以戊己之比若己辛

八
之比七篇界又己乘辛生丑則辛度丑得己中之若干一而戊度己亦得己中之

九
若干一故戊度己與辛度丑等是以戊己之比若辛丑之比惟戊己之比若己辛

十
之比本論故戊與己己與辛辛與丑俱同比惟丑與甲相等故戊與己己與辛辛與

十一
甲為同比又戊與庚庚與子子與乙為同比理同是以甲乙間有若干連比例率

第十二
則甲戌及乙戌間亦各有若干連比例率

第十題
一與大小二數中間各有若干連比例率則此二數間亦有若干連比例

乙二

庚九

子一

辛六

壬一

戊四

甲八

解曰。丁戊及己庚各連比例率。在甲丙乙丙間。題言甲丙乙丙中間各

有若干率。則甲乙間亦有若干率。

論曰。丁乘己得辛。辛乘丁得壬。辛乘己得子。丙與丁比。既若丁與戊比。

則丙度丁。若丁度戊。惟丙度丁。得丁中之若干一。故丁度戊。亦得丁中

之若干一。則丁自乘得戊。又丙與丁比。既若戊與甲比。則丙度丁。若戊

度甲。惟丙度丁。得丁中之若干一。故戊度甲。亦得丁中之若干一。則丁乘戊生甲。

又己自乘生庚。己乘庚生乙。而丁自乘生戊。乘己生辛。則丁與己比。若戊與辛比。

又丁與己比。若辛與庚比。故戊與辛比。若辛與庚比。又丁乘戊生甲。壬。故

戊與辛比。若甲與壬比。而戊與辛比。若丁與己比。故丁與己比。若甲與壬比。

又丁己乘辛生壬子。故丁與己比。若壬與子比。而丁與己比。若甲與壬比。故

甲與壬比。亦若壬與子比。又己乘辛庚生子乙。故辛與庚比。若子與乙比。而辛與

庚比。若丁與己比。故丁與己比。亦若子與乙比。則丁與己。甲與壬。壬與子。子與乙。

俱同比。論即知甲壬子乙為連比例率。是以甲丙及乙丙間。各有若干連比例率。

則甲乙間亦有若干連比例率。

第十一題。兩平方間有一連比例率。兩平方之比例。為其邊二次比例。

解曰。甲乙為兩平方數。甲邊為丙。乙邊為丁。題言甲乙間有一連比例率。甲與乙

之比例。為丙與丁二次比例。

乙九 論曰。丁乘丙生戊。甲之邊既為丙。則丙自乘生甲。

七篇界

又丁自乘生乙。理

同。丙乘丙丁。既生甲戊。則丙與丁比。若甲與戊比。

七篇

又丙乘丁生戊。而丁

甲四

丙二 自乘生乙。則丙丁兩數乘丁。生戊。乙兩數故丙與丁比。

七篇

若戊與乙比。

戊六

丙與丁比。若甲與戊比。故甲與戊比。亦若戊與乙比。是以甲乙間有一連比例率。

戊。又甲與乙之比例。為丙與丁二次比例。蓋甲戊乙既為連比例率。則甲與乙之

比例。為甲與戊二次比例。惟甲與戊比。若丙與丁比。是以甲與乙之比例。為丙與

丁二次比例。

第十二題

兩立方間。有兩連比例率。兩立方之比例。為其邊三次比例。

解曰。甲乙為兩立方數。丙為甲邊丁為乙邊。題言甲乙間有兩連比例率。

乙二

庚九

甲乙之比例。為丙丁三次比例。

壬一

己六

論曰。戊為丙之自乘數。己為丙乘丁數。庚為丁自乘數。辛壬為己乘丙丁

辛一

戊四

數。夫甲為立方數。而丙為其邊。則丙自乘得戊。丙乘戊得甲。

甲八

丙二

自乘得庚。丁乘庚得乙。丙乘丙丁兩數得戊。己。則丙與丁比。若戊與己比。

七篇

又丙與丁比。若己與庚比。理同。又丙乘戊己兩數。既得甲辛。則戊與己比。若

十七

甲與辛比。而戊與己比。若丙與丁比。故丙與丁比。若甲與辛比。又丙丁兩數乘己。

又丁乘己庚兩數得壬乙則己與庚比。

比。故丙與丁比。亦若壬與乙比。則丙與丁。甲

是以甲乙間有辛壬兩連比例率又甲與乙之比

例為丙與丁三次比例。蓋甲辛壬乙既為連比例率。則甲與乙之比例。為甲與辛

三次比例。惟甲與辛比。若丙與丁比。是以甲與乙之比例。為丙與丁三次比例。

若干連比例率。其各率自乘。所生各率。仍為連比例率。各率再乘。所生

各率仍為連比例率三乘以上皆同。

解曰。甲乙丙三率。甲與乙比。若乙與丙比。以甲乙丙各自乘。得丁戊己。以

甲乙丙各乘丁戊己得庚辛壬。題言丁戊己及庚辛壬俱為連比例率。

論曰甲乘乙得子子乘甲乙兩率得寅卯乙乘丙得丑丑乘乙丙兩率得

辰巳丁子戌及庚寅卯辛。為連比例率。與甲乙同比。本篇九又十而戌丑己及

辛辰己壬為連比例率與乙丙同比例同惟甲與乙比若乙與丙比故丁

子戌與戊丑己同比。庚寅卯辛與辛辰己壬同比。惟丁子戌若干率與戊

丑巳若干率等庚寅卯辛若干率與辛辰巳壬若干率等是以丁與戌比。

子
六卯
若戊與己比。七篇十四而庚與辛比。若辛與壬比。

甲二
丁四
庚八寅

第十四題

此平方數度彼平方數。則此平方邊度彼平方邊。又此平方邊度彼平方邊。則此平方數度彼平方數。

解曰。甲乙兩平方數。其邊為丙丁。甲度乙。題言丙亦度丁。

論曰。戊為丙丁乘得數。則甲戊乙為連比例率。與丙丁同比。甲戊乙既為連

比例率。而甲度乙。則甲亦度戊。本篇惟甲與戊比。若丙與丁比。故丙亦度丁。

甲四丙二又解曰。設丙度丁。題言甲亦度乙。說二十

論曰。準前論。甲戊乙為連比例率。與丙丁同比。丙與丁比。既若甲與戊比。而丙度

丁。則甲亦度戊。又甲戊乙為連比例率。是以甲亦度乙。本篇

第十五題

此立方數度彼立方數。則此立方邊度彼立方邊。又此立方邊度彼立方邊。則此立方數度彼立方數。

方邊。則此立方數度彼立方數。

解曰。立方數甲度立方數乙。丙為甲邊。丁為乙邊。題言丙度丁。

論曰。丙自乘得戊。丙乘丁得己。丁自乘得庚。己乘丙丁得辛壬。則戊己庚

及甲辛壬乙為連比例率。與丙丁同比。本篇九甲辛壬乙既為連比例率。

而甲度乙。則甲亦度辛。本篇惟甲與辛比。若丙與丁比。故丙度丁。說二十

又解曰。丙度丁。題言甲度乙。

論曰。甲辛壬乙為連比例率。與丙丁同比。而丙度丁。丙與丁比。若甲與辛比。故甲

度辛則甲亦度乙。本篇九

第十六題

此平方數不度彼平方數。則此平方邊不度彼平方邊。又此平方邊不

度彼平方邊。則此平方數不度彼平方數。

一六 解曰。甲乙兩平方數。其邊為丙丁。甲不度乙。題言丙不度丁。

乙一四 論曰。如丙度丁。則甲亦度乙。本篇十四 惟甲不度乙。故丙不度丁。

甲九 又解曰。丙不度丁。題言甲不度乙。

論曰。如甲度乙。則丙亦度丁。本篇十四 惟丙不度丁。故甲不度乙。

第十七題

此立方數不度彼立方數。則此立方邊不度彼立方邊。又此立方邊不

度彼立方邊。則此立方數不度彼立方數。

七三 解曰。立方數甲。不度立方數乙。丙為甲邊。丁為乙邊。題言丙不度丁。

乙二 論曰。如丙度丁。則甲亦度乙。本篇十五 惟甲不度乙。故丙不度丁。

又解曰。丙不度丁。題言甲不度乙。

論曰。如甲度乙。則丙亦度丁。本篇十五 惟丙不度丁。故甲不度乙。

第十八題

二相似面數間。有一連比例率。兩面數之比例。為相當兩邊二次比例。

解曰。甲乙二相似面數。丙丁為甲之兩邊。戊己為乙之兩邊。相似面數之相當邊

同比。七篇界說二十一 即丙與丁比。若戊與己比。題言甲乙間有一連比例率。甲乙之比

二四乙六 例。為丙與戊二次比例。亦為丁與己二次比例。

二乙四 論曰。丙與丁比。既若戊與己比。則轉理丙與戊比。若丁與己比。七篇甲既為

一戊三 面數。其邊丙丁。則丁乘丙得甲。又戊乘己得己。理同。丁乘戊得庚。丁既乘丙

甲六丁三 得甲。乘戊得庚。則丙與戊比。若甲與庚比。七篇惟丙與戊比。若丁與己比。故

丁與己比。若甲與庚比。又因戊乘丁得庚。乘己得己。故丁與己比。若庚與乙比。惟

丁與己比。若甲與庚比。故甲與庚比。若庚與乙比。甲庚乙為連比例率。是以甲乙

間有一連比例率。庚又甲與乙之比例。為丙戊二次比例。亦為丁己二次比例。蓋

甲庚乙既為連比例率。則甲乙之比例。為甲庚二次比例。因甲與庚丙與戊。丁與

己皆同比。是以甲乙之比例。為丙戊二次比例。亦為丁己二次比例。

第十九題 二相似體數。有兩連比例率。二體數之比例。為相當兩邊三次比例。

解曰。甲乙為二相似體數。丙丁戊為甲乙之三邊。己庚辛為乙之三邊。相似體數之

相當邊既同比。七篇界說則丙與丁比。若己與庚比。丁與戊比。若庚與辛比。題言

甲乙間有兩連比例率。甲乙之比例。為丙與己。丁與庚。戊與辛。三次比例。

論曰。丙丁之比。既若己庚之比。而丙乘丁得壬。己乘庚得子。則壬子為同比之面

數。此兩面數間有一連比例率。丑。本篇則丁乘己得丑。本篇壬與丑。丑與子。為同

與子比故壬丑子為連比例率與丙己同比丙與丁比既若己與庚比則
屬理丙與己比若丁與庚比十三篇又丁與戊比既若庚與辛比則屬理丁
與庚比若戊與辛比故壬丑子為連比例率偕丙與己丁與庚戊與辛俱
同比戊辛各乘丑得寅卯甲既為體數而其邊為丙丁戊則丙丁戊三數
連乘得甲而壬為丙丁乘得數故戊乘壬得甲又子為己庚乘得數辛乘
子得乙理同戊乘壬既得甲而乘丑得寅則壬與丑比若甲與寅比十七篇
惟壬與丑丙與己丁與庚戊與辛皆同比故丙與己丁與庚戊與辛甲與寅皆
同比又戊辛各乘丑既得寅卯則戊與辛比若寅與卯比惟戊與辛丙與己丁
與庚俱同比故丙與己丁與庚比若甲與寅寅與卯比又辛乘丑既得卯而乘
子得乙則丑與子比若卯與乙比惟丑與子比若丙與己丁與庚戊與辛比故
丙與己丁與庚戊與辛比若甲與寅寅與卯比是以甲寅卯乙為連比
例率與體數之邊同比又甲乙之比例為同比兩邊三次比例或丙與己或丁與
庚或戊與辛俱同蓋甲寅卯乙既為連比例率則甲乙之比例為甲與寅三次比
例甲與寅丙與己丁與庚戊與辛俱同比本論故甲與乙之比例為諸相當邊三次
比例

第二十題

兩數間有一連比例率則兩數為相似面數

解曰甲乙兩數間有一連比例率丙題言甲乙為相似面數

論曰以丁戊為甲丙同比最小數七篇三則丁與戊比若甲與丙比故丁度

甲若戊度丙設己中有若干一若甲中有若干丁則己乘丁得甲而乘戊得

丙故甲為面數其邊為丁己又丁戊亦為丙乙同比最小數則丁度丙若戊度乙

而戊度乙得若干與庚中之若干一等則庚乘戊得乙而乙為面數其邊為戊庚

故甲乙為兩面數亦為相似面數蓋己庚乘戊得丙乙則己與庚比若丙與乙比

七篇惟丙與乙比若丁與戊比故丁與戊比若己與庚比是以甲乙為相似面數

七篇界說其相當邊各同比

第二十一題 兩數間有兩連比例率則兩數為相似體數

解曰甲乙兩數間有丙丁兩連比例率題言甲乙為相似體數

論曰戊己庚為甲丙丁同比最小數七篇三則首戊尾庚無等數本篇戊

庚間既有一連比例率己則戊庚為相似面數本篇而戊之兩邊為辛壬

庚之兩邊為丑寅則戊己庚連比例率偕辛與丑壬與寅同比戊己庚既

為甲丙丁同比最小數則平理戊與庚比若甲與丁比七篇四戊庚為無等

數之數即為同比最小數七篇二最小數可度諸同比數前率度前率後

甲二四丙七二丁二一六乙六四八戊一己三庚九率度後率俱等七篇二故戊度甲若庚度丁而戊度甲得若干與子中之

若干一等。則子乘戊得甲。惟戊為辛壬乘得數。是子乘辛壬乘得數得甲。故甲為體數。其邊為辛壬子。又戊己庚亦為丙丁乙。同比最小數。則戊度丙。若庚度乙。而庚度乙得若干。與卯中之若干一等。則卯乘庚得乙。惟庚為丑寅乘得數。是卯乘丑寅乘得數得乙。故乙為體數。其邊為丑寅卯。所以甲乙俱為體數。亦為相似體數。蓋子卯乘戊得甲。丙故子與卯。甲與丙。戊與己皆同比。七篇惟戊與己辛與丑壬與寅俱同比。故辛與丑壬與寅子與卯俱同比。惟辛壬子為甲之三邊。丑寅卯為乙之三邊。所以甲乙為相似體數。

第二十二題

三連比例率首率為平方數。則末率亦為平方數。

九解曰。甲乙丙三連比例率。甲為平方數。題言丙亦為平方數。
六論曰。甲丙間既有一連比例率。乙則甲丙為相似面數。本篇惟甲為平方。是以
四甲丙亦為平方。

第二十三題

四連比例率首率為立方數。則末率亦為立方數。

丁三解曰。甲乙丙丁四連比例率。甲為立方數。題言丁亦為立方數。
丙二論曰。甲丁間既有乙丙兩連比例率。則甲丁為相似體數。本篇惟甲為
乙三立方。是以丁亦為立方。
甲八

第二十四題

彼此兩數與兩平方同比。如彼數為平方。則此數亦為平方。