数学物理几何方法

Bernard Schutz 著

李 增 林 译

南 京 师 范 学 院 物 理 系

译者的话

剑桥大学Bernard Schutz 1980年所著《数学物理的几何方法》是一本导引性的现代微分几何的教材。本书可供应用数学和理论物理专业高年级大学生和研究生作为选课的教材。全书共分六章。第一、二两章作者详细地介绍了拓扑、流形、纤维丛、矢量和1-形式，张量和张量场等基本概念。阐述细腻深刻，且列举浅近的事例，有助于读者从本质上掌握这些基本概念。第三、四两章是本书的核心。详细地介绍了李导数和李群、微分形式以及它们的一般应用。讲述尽量把几何和分析联系起来，由比较“直观”的形象出发导出分析上的重要定理。在学过这两章后，读者对李导数，Killing矢量场，抽象李群，微分形式，外微分等重要论题可以得到较为深刻的理解。在这两章中，对一些比较专门的论题如Frobenius定理，轴对称和球对称，可定向流形，上同调理论等也作了较详细的讨论。第五章专门介绍现代微分几何在物理学中的应用，包括热力学、哈密顿力学、电磁学、流体力学以及宇宙学方面的应用，生动地说明现代微分几何已成为整个理论物理学必不可少的工具。最后，第六章专门介绍了黎曼流形的联络和规范理论，可作为广义相对论的基础。

此外，本书还配有一定数量的习题，有助于读者理解和掌握本书的主要内容。一些较为难做的习题且附有解法提示，对初学者可以达到启示的作用（不过读者最好还是自己动脑筋练习，

不要把习题也变成课文）。在各章的末尾，详细介绍了有关论题的专著，这对读者查阅和深入学习感兴趣的内容是十分有益的。

译者　李增林

于南京师范学院物理系

1983.11

目　录

序

为什么研究几何学

本书的目的是对开始从事研究工作的物理学工作者介绍一般的分析工具，它开始于微分几何。近年来发现对理论物理是十分重要的。对物理学工作者进行数学训练，略去较深的几何概念是不恰当的。青年物理学工作者往往被鼓励发展适合于物理现象的思维"图象"和直观知识。数学中奇怪地忽视图形是若干世纪以来逐渐形成的。对古代和中世纪的自然哲学家，几何，当然是极为重要的。托勒密，哥白尼，开卜勒和伽利略都用几何来表示他们的思想。只是当笛卡儿对欧几里德空间引入坐标后，才开始忽视几何，把几何降到代数的应用的地位。这以后，对自然科学家的训练就将几何降到次要的地位。所以现今大学物理和应用数学专业的学生多不喜欢读较多的几何。

一个理由是十九世纪的物理学家认为我们生活的3-维欧氏空间的几何是相当地简单。而学习用于解物理微分方程的多种多样的分析方法则需要占用许多时间。另外，人们认为分析方法是物理学家将自然表示为微分方程的途径，而忽视几何的重要性。

但是，本世纪的两大发展，彻底改变了物理学家的上述观点，打破了忽视几何的现状。首先是由于相对论的发展。根据相对论，十九世纪物理学家所具有的3-维欧氏空间的观点，只是真实物理世界的近似描述；其次，是在廿世纪才由Cartan开创的数学家认识论的发展，认识到几何与分析是两条平行不悖的道路。一方面分析建立在研究几何的基础上，另一方面，对几何的研究又自然地涉及分析工具（如李导数和外微分）和

某些概念（如流形，纤维丛及矢量和导数的同一）的发展，在分析的应用中，这些是十分有用的。用现代的观点，几何对分析起辅助作用。例如，微分几何的基本概念——微分流形是依据于实数和可微函数来定义的，这是不无益处的。这意味着由分析得到的概念可几何地表示，这个有着重要的启发功用。

由于已经发展了几何的与分析概念的密切联系，现代微分几何对理论物理变得愈益重要了。它在数学的应用和对物理的更本质的理解上更为简单。这种变革不仅影响狭义和广义相对论。自然，对于相对论，其理论必然是几何的；另一些物理领域，其几何不是一般的空间，而是更抽象的变量空间，电磁学，热力学，哈密顿力学，流体动力学和基本粒子的空间。

本书的目的。

在本书中，我们想为读者介绍廿世纪微分几何的一些很基本的概念。即试图应用几何的或"图形"的方法，这对发展物理学工作者的直觉知识是十分有益的。本书是讲数学而不是讲物理的，只是试图包括数学对物理若干分支的广泛应用，这些是高年级学生很熟悉的内容。我们希望这些例子不只是解释数学，而应是熟悉的概念的新的数学表述。如果能够做到这点，将使读者对物理学有更深入的理解。

我们先来介绍读者可能已经熟悉的数学背景，这个有助于对"熟知"的概念给以一些例举，在本书中给它们以新的数学处理，如：矢量、张量、狭义相对论，球谐函数和转动群（及角动量算符），守恒定律、体积、积分定理、旋度和叉积，矩阵的行列式，偏微分方程和可积性条件，矢量计算的高斯和斯托克斯积分定理，简单系统的热力学，Caratheodory定理（和热力学第二定律），相空间的哈密顿体系，麦克斯韦方程，流体动力学（包括环量守恒定理），曲线坐标系中的矢量计算和荷电标量场的量子理论。除了这些或多或少较为熟悉的主题外，

还有在大学课程中不常教过的，但许多读者可能听到过的内容，如：李群和对称性的理论，开的和闭的宇宙，黎曼几何和物理的规范理论。所有这些主题，都可用微分几何的方法进行研究，从而显示出微分几何在理论物理研究中的重要性。

对于读者，我认为建立一个想像的图象和在某些情况下对几何本性产生直觉是一种重要的方法。为此，我们着重以下概念，即张量是独立于任何坐标系而定义的几何实体，而由分量和坐标变换所扮演的角色，应放在次要的位置上。我们可以不用指标写出方程，以强调运算与坐标无关。我们并不企图十分严格或由原理性的方法介绍这些材料，我们不从纯粹数学角度来进行考察论题的基本方面，也并不给出全部而只给出重要结果的证明。但若有可能，则在介绍的参考文献将清楚地给出主要的几何概念。我们力求以最小的含混来论证主题的优美及其实质。

怎样使用本书：

第一章复习读者所熟悉的一些基础数学问题，并增加一些概念的简短的导出，特别是对于拓扑，这可能是一般学生所不太熟悉的。以下的各章是本书的核心。在这几章中，引入张量，李导数和微分形式，在这几章中还包含一些直接的应用。而将若干物理的应用留在第五章中系统处理。最后一章，关于黎曼几何，较高级的内容，与粒子物理和广义相对论等领域有关。在这些，微分几何成为通常的工具。

本书的内容适合一学期的课程。为讲课者提供了一些较困难领域的习题。也可将本书主要内容归为十多讲，我为研究生教过这些单元。主要可集中为§§ 2.1——2.3，2.5——2.8，2.12——2.14，2.16，2.17，2.19——2.28 3.1——3.13，4.1——4.6，4.8，4.14——4.18，4.20——4.23，4.25，4.26，5.1，5.2，5.4——5.7和5.15——5.18。讲课

者也可根据自己的经验进行教材选择。特别是对几何较为熟悉的对象，可着重分析推理，对他们较早地揭示几何概念是有益的。作为选材的引导，各节的标题用两种不同的符号印刷，正体字表示基本教材，斜体字表示较高深的或补充的教材。（译者注：为刻写方便，对油印中译本，在节号前加上＊号以表示后者，而不采用两种字体）。最后一章，全部属于斜体字的范畴。并用同样的办法区分两类不同的习题，对于数学的演绎为基本的那些习题以及属于边缘的习题。

习题组成本书的一个有机部分，它们穿插于教材之中。当初次接触它们时，应该进行演算。通常习题后面的教材内容是假定读者已做过前面的习题，并且掌握了它们。没有时间做习题的读者，仍然应该读一下它们，并努力理解其结果。在书末可以找到它们的提示和解答。

读者的背景假定

本书的大部分内容可为理论物理和应用数学专业的高年级大学生或读研究生课程的学生所掌握。已合理地假定他们掌握了矢量分析，多变量微积分，矩阵代数（包括本征矢和行列式）以及在量子力学中学过的各种算符的理论。物理的应用是从各个领域中抽出来的，不是每个人都全部熟悉它们。可跳过一些节而不失去连续性。但至少对经典力学，狭义相对论和电磁理论应该熟悉才行。第一章末尾的参考文献中列出的书提供了所需的背景教材。

我应该感谢我的同事和老师中的许多人，他们帮助完善了本书。特别对 Kip Thorne，Rafael Sorkin，John Friedman 和 Frank Estabrook 表示感谢。我也表示感谢 Cardiff 学院的学生，特别是其中的两位，他们对本书的初稿进行了评论。应该特别提出的两位学生是 Neil Comins 和 Brian Wade，他们提出了细心的和建设性的修改建议。我也

乐于感谢 Suzanne Ball, Jane Qwen 和 Margaret Wilkinson，他们迅速而准确地打印并校对了全部手稿。最后，对于我的妻子的耐心和鼓励表示感谢。

Bernard Schutz

1979.6.30 于 Cardiff

第一章 基础数学

在本章中，我们介绍以下各章几何推导的基础数学，其中的内容，不少的读者可能是熟悉的。但有两个论题：拓朴（topology）和映射（mapping）读者可能不太熟悉。在本章中包含它们的理由是使我们能够正确地认识第二章就要遇到的流形概念。对拓朴不熟悉的读者也可跳过这两节，直到第二章得到足够的启发后，回过来再读它们。

1.1 空间 R^n 及其拓朴

空间 R^n 即矢量空间中通常的 n-维空间。R^n 中的一个点是 n 个实数（$x_1, x_2, \cdots, x_n$）的一个序列，也称为 n-实数组。直觉地，我们认为这是一个连续空间，即 R^n 中的任一点可任意地接近一给定点，即连接任意两点的线段可分成任意的许多分段，它们仍然连接 R^n 中的点。这些概念与例如晶格，即一组 n 个整数的集合（$i_1, i_2, \cdots, i_n$）从性质上是根本不同的。R^n 中连续这一概念在研究了拓朴以后可精确地得到。“拓朴”这一名词在数学中有两种不同的意义。一种是我们现在即将讨论的所谓局域拓朴（local topology），另一种是整体拓朴（global topology），后者是研究大尺度空间特性的，如由环形物（torus）中区别出球。在稍后，特别是关于微分形式这一章中，我们将讨论整体拓朴，现在，我们主要考察局域拓朴。

基本的概念是 R^n 中各点的邻域。这个可在我们导入两点间的距离函数后予以定义。即对 R^n 的 $\vec{x}=(x_1, \cdots, x_n)$ 和

$\overline{y}=(y_1,\cdots,y_n)$：

$$d(\overline{x},\overline{y})=\left[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (1.1)$$

表示这两点间的距离。R^n中点$\overline{x}$的半径为r的邻域是一个点的集合$N_r(\overline{x})$，从$\overline{x}$到它们的距离小于r。对于R^2，这可由图1.1予以说明。

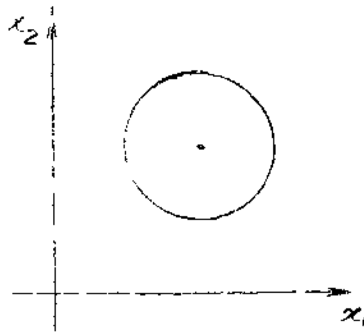

图1.1　定义R^2中邻域的距离函数$d(\overline{x},\overline{y})$，它是以半径$r$的圆的内部，圆周则不是这一邻域的部分。

现在，空间的连续性，可通过考虑很小的邻域来精确地给以定义。R^n中的点的集合被认为是不连续的，若每一点有一个邻域，它不包含集合中的另一些点。显然，R^n自身不是不连续的。R^n中点S的集合是一个开集（open set），若S中的每一个点$\overline{x}$，有一个邻域，完全包含在S之中。显然，不连续的集合不是开集．从现在起，我们将不采用不连续的集合，R^1中一个开集的简单例子是所有满足$a<x<b$（其中，a和b为实数）的点x．重要的是应该认识到，对于$a\leqslant x<b$的点x的集合不是开集，因为$x=a$的点没有完全包含在这一集合的邻域之中，$x=a$的任意邻域中的一些点必然小于a，所以在集合之外。这个如图1.2所表示。当然，这是很自然的性质。任意的R^n的适当的大部分是开集，若我们不包含它的边界的话。

连接R^n中任意两点的线段可无限分割的概念可代之以说R^n中任意两点有不相交的邻域。（当然，它们也可有相交的邻域，但若选择足够小的邻域，则可使其不相交。）这个叫做

R^n 的 Hausdorff 性质。有可能构成非 Hausdorff 空间，但由于其人为性，我们将不予考虑。

注意：我们已用了距离函数 $d(\overline{x},\overline{y})$ 定义邻域，从而为开集。我们说 $d(\overline{x},\overline{y})$ 导致 R^n 上的拓扑，这个意味着我们定义 R^n 上的开集有以下性质：

(Ti) 若 O_1 和 O_2 为开集，则它们的交集 $O_1\cap O_2$ 也是开集。

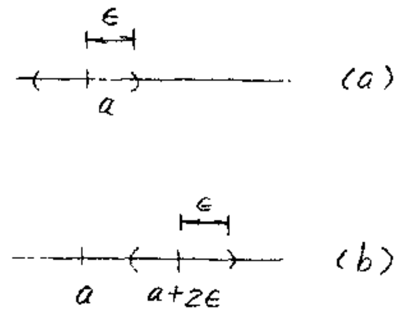

图 1.2 (a)点 $x=a$ 的任意邻域必然包含 a 左边的点；相反，(b) a 的右边的任意点有一个完全在 a 的右边的邻域

(Tii) 任意开集的任意集合（可能是无穷多）为开集。

为了使 (Ti) 适用于 R^n 的所有的开集，我们定义空集（或另集）为开集。又为了使 (Tii) 有用，类似地，我们定义 R^n 自身为开集（对于更高级的情况，我们定义一个拓扑空间为一个点的集体，有着满足 (Ti) 和 (Tii) 的开集的定义。在这个意义上，距离函数 $d(\overline{x},\overline{y})$，可以使 R^n 空间成为一个拓扑空间）。

现在，我们要问：诱导拓扑（induced topology）是否与 $d(\overline{x},\overline{y})$ 的精确形式有关？例如，假定我们应用不同的距离函数.

$$d'(\overline{x},\overline{y})=\left[4(x_1-y_1)^2+0.1(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (1.2)$$

这个也定义了邻域和开集，如图 1.3 是对 R^2 的。关键是根据 $d'(\overline{x},\overline{y})$ 为开集的任意集合，根据 $d(\overline{x},\overline{y})$ 也为开集，反之亦然。这是不难证明的，这可依据于这样的事实，即任意给