初二数学集体备课材料之一

代数第三章指数与常用对数

北京教育学院教研部
数学教研室

一九八四年四月

说　　明

为了提高教学质量，交流教学经验，本学期我们组织了区、县备课组长及兼职教研员对初二数学教材逐章进行了集体备课。

在初二代数第三章指数与常用对数的备课会上作发言与书面发言的有西城161中学的肖淑英老师、东城25中何谨老师、宣武68中刘继兴老师、顺义城关一中杜方中老师，由于篇幅限制，现将肖淑英老师《关于"常用对数"的教学》发言整理后下发供各校教师教学中参考。

关于"常用对数"的教学

统编教材将对数的内容分初中、高中两部分安排，在初中只讲常用对数，以便在初三学习解三角形时应用对数进行计算，高中讲对数函数和简单的对数方程。

在讲对数以前，学生已学习了实数的运算、代数式的运算，将指数概念从正整指数推广到有理指数，同时正整指数幂的运算法则对于所有的有理指数幂完全适用。在讲对数概念之前，还应将指数概念推广到无理指数。但因为$a>0$，α为无理数，a^{α}的计算很繁，对于无理指数仅向学生讲明"$a>0$，α是一个无理数时，a^{α}这样的数是存在的，它是一个确定的实数。对于有理指数幂的运算和性质，都适用于无理指数幂。"在以上基础上教学常用对数。

常用对数这一单元教材，有以下四个内容：

一、对数的定义和恒等式$a^{\log_a N}=N$；

二、积、商、幂、方根的对数；

三、常用对数的性质；

四、利用对数，进行计算。

教学大纲对常用对数，这部分的教学要求是"掌握常用对数的概念、法则，会查对数表，能够运用对数计算。"根据大纲的要求要达到能够正确熟练地应用对数进行计算，除必须掌握常用对数的首数和尾数外，关键是掌握对数的运算法则，利用积、商、幂、方根的对数的运算法则，可以比较简捷地进行乘、除、乘方、开方的运算，而要掌握对数的运算法则，必须透彻理解对数的概念，因此，使学生正确理解对数概念是这个单元教学的重点和关键。利用常用对数进行计算，又必须透彻理解和掌握常用对数的首数和尾数，这些内容对初二学生来说不易理解，是学习中的难点。

下面就这一单元中的前三个内容谈谈自己的想法和做法：

一、对数的概念

从教学大纲的教学要求和教材内容的安排来看，对数的概念是学好本单元内容的重点和关键，是教学中的一个难点。下面举例来说明正确理解对数概念的重要性：

1. 对数概念是计算的依据。如

(1) 计算 $\log_5 125+\log_7 \log_3 3-3\log_3 7$；

(2) 求函数 $y=\frac{1}{\lg(x-1)}$ 自变量的取值范围

不理解对数的定义就无从入手，而掌握了对数的概念就可以迅速得到解决．

2．对数的概念是推理的依据．如

(1) 已知 $\log_a M$ 和 $\log_a N$，求 $\log_a MN$；

(2) 证明 $\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}$．

但是学生对于一个数学概念的形成要经过反复对比的认识过程，在新旧知识之间往复多次才能逐步掌握，如果不重视这一点，学生往往会把定义背熟，而不会应用概念解决问题．如学生在初一学习了绝对值的概念，在初二学习了算术根的概念，几乎都能很快地背出它们的定义，而在应用这些概念解题时则常出现差错，不仅在初中阶段遇到这些概念时需要反复讲，到高中应用到这些概念时还需要反复领会才能逐步掌握．同时概念又是基础知识的基础，对数概念是学好这一单元知识的重点和关键，对学生来说又是不易接受的概念、对数的符号学生感到抽象，因此我在教学中安排两课时讲对数的概念，使学生理解概念，反复练习．通过实践感到两课时还不能使学生透彻理解概念、熟练地应用概念解决问题．还需要在以后的教学过程中，联系新知识重复出现，加深学生对这个概念的理解．

(一) 怎样讲对数的概念

1．怎样引入对数的概念

概念形成于人类的实践活动，讲课时应从实际引入，从生活中的实例或有关的旧知识引入．对数式是通过指数式引出的，讲对数的概念时应从学生掌握的乘方引入．

在 $a^b=N$ 中，知 a、b 求 N，是乘方问题；知 b、N 求 a 是开方问题；知 a、N 求 b 用什么方法呢？需要引进一种新方法——求对数，这样使学生了解引入新的概念的必要性，同时使学生理解新的概念与旧知识的联系和区别．

2. 使学生掌握概念的名称和符号

概念不仅有名称还有符号，如绝对值、算术根、一个角α的正弦等概念都是既有名称又有符号，用符号表示语言，使用起来方便，对数概念也是这样，既讲明什么叫对数，又规定了符号，例如以2为底32的对数等于5，记成 $\log_2 32=5$；两个正因数的积的对数等于这两个正因数的对数的和，记成 $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$ 较之用语言表达简明得多，概念的名称有助于理解概念，如 $a>0$、$a\neq 1$，如果 $a^b=N$，那末幂指数 b 叫做以 a 为底的 N 的对数，可知对数的意义是通过指数式来理解的。在讲概念时，要先讲清楚概念的确切含义，在学生初步理解概念的基础上再介绍表示这个概念的符号，使学生理解符号是表示某个概念的，而不是抽象的空洞的符号，只有真正理解概念的定义和符号的意义，才能正确运用符号，如有的学生把 $\log_3 81$ 读作"log以3为底81的对数"，因为log这一符号本身表示的是对数，因此这个读法是不正确的，但是学生刚接触对数的概念时，很难叙述得确切、简明，因此在讲对数的概念时，应注意读法与写法，通过反复说、练使学生掌握概念。

3. 给出对数的定义

学生形成概念要有一定的过程，教学是个循序渐进的过程，学生获得知识是一点一滴地积累起来的，开始时不能讲得很快，要给学生一定的思考、理解的时间，并强调讲、练、说、写结合，加深学生对知识的理解，例如求 $\log_3 243=?$，不能只要求学生答出"$\log_3 243=5$."而要配合问题提出有关的问题，以加深理解概念、巩固概念；并培养学生的表达能力。

(二)学生可能提出什么问题

学生对于一个概念认识是有反复的，有时当时没发现什么问题，而后来又出现了不懂的地方，这是常有的现象，实际上就是当时没有，透彻理解，当学生提出问题时，应帮助学生正确理解概念（当然也要照顾学生的实际与教材实际），对数概念这部分学生可能提出下列两个问题：

1. 为什么同一个字母，在不同的等式中有不同的叫法？

已知 a、b 求 N，在 $a^b=N$ 中，a 叫做底数，b 叫做指数，N 叫幂。

已知 a、N 求 b，在 $b=\log_a N$ 中，a 叫做底数，b 叫做对数，N 叫真数．

学生可能要问："为什么同一个字母，在不同的等式中有不同叫法？"

这是因有不同的要求而决定的，例如已知 a、b 两个数，求它们的积，在 $a\times b=c$ 中，a、b 叫因数，c 叫积．
已知 c、$a(a\neq 0)$ 两个数，求 c 除以 a 所得的商，在 $\frac{c}{a}=b$ 中，c 叫被除数，a 叫除数，b 叫做商．同样的字母 a、b、c，在两个不同的要求的情况下，有不同的叫法．

在 $a^b=N$ 中，要用 a、b 表示 N；在 $\log_a N=b$ 中，要用 a、N 表示 b，为了反映不同的要求就变更了对它们的叫法．

2. 为什么在对数定义中限制底数 $a>0$，且 $a\neq 1$？

学习有理指数幂的运算法则时，概括为三条：

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$（$a>0$，m、n 为有理数）；

$(a^m)^n=a^{mn}$（$a>0$；m、n 为有理数）；

$(ab)^n=a^n b^n$（$a>0$，$b>0$，n 为有理数）．

其中底数 $a>0$．对数式 $b=\log_a N$ 是通过指数式 $a^b=N$ 引出的，而为什么在对数定义中又加上 $a\neq 1$ 呢？

这是由函数的定义所确定的"设在某变化过程中有两个变量 x 和 y，如果对于 x 在某一范围内的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值和它对应，那么就把 y 叫做 x 的函数．"但是学生还没有学习函数，只知道 a、b 一定时，$a^b=N$，N 是唯一确定的．

结合求对数的例题，如 $\log_2 32=5$，$\log_3 81=4$，$\log_{10}\frac{1}{10}=-1$，可知当 a 是不等于 1 的正数时，对于一个确定的正数 N，一定有，而且只有一个数 b 满足 $a^b=N$（$b=\log_a N$）．这就说明 b 值的存在性与唯一性．那么 $a=1$，将出现什么情况？

若 $a=1$，$N=1$，$\because 1^b=1$ 中 b 可以是任意实数．$\therefore \log_1 1$ 没有确定的值．

若 $a=1$，$N=2$，$\because 1^b=2$ 中 b 值不存在．$\therefore \log_1 2$ 的值不存在．

基于以上两种情况就规定了 $a\neq 1$．

二、积、商、幂、方根的对数．

积、商、幂、方根的对数的运算法则，是应用对数，进行计算的依据，其实质是应用对数计算可以将高一级的运算转化为低一级的运算，简化运算过程．但学生常々错误地认为：

$$\log_a(M+N)=\log_a M+\log_a N\ ;$$
$$\log_a(M-N)=\log_a M-\log_a N\ .$$

产生错误的原因：

1. 对数概念．对数符号的意义不清楚，因而要结合对数定义讲清 $\log_a(M-N)$ 的意义．

2. "乘法对加法的分配律"的负迁移的作用．认为它们可用 $m(a+b-c)=ma+mb-mc$ 来变形．因而要重视运算法则的推导，加深学生对法则的理解．

教材中的几个法则，是以计算形式出现的：

已知 $\log_a M$ 和 $\log_a N$．

求 $\log_a MN$．$\log_a \frac{M}{N}$、$\log_a M^n$、$\log_a \sqrt[n]{M}$．

分析：∵ $\log_a M$ 和 $\log_a N$ 是已知的，要求 $\log_a MN$，即需设法用 $\log_a M$ 和 $\log_a N$ 表示 $\log_a MN$．

解：设 $\log_a M=p$，$\log_a N=q$．

则 $M=a^p$，$N=a^q$．

$\therefore MN=a^p\cdot a^q=a^{p+q}$

$\therefore \log_a MN=p+q$

即 $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

也可通过对数恒等式 $a^{\log_a N}=N$ 求出：

令 $M=a^{\log_a M}$，$N=a^{\log_a N}$．

$\therefore MN=a^{\log_a M}\cdot a^{\log_a N}$
$=a^{\log_a M+\log_a N}$．

$\therefore \log_a MN=\log_a M+\log_a N$．

要求学生能熟练运用这几个性质将对数式从左向右变形，也能从右向左变形.

三、常用对数

常用对数不仅有对数的一般性质，还有它的特殊性质．应用常用对数计算，较用一般的数为底的对数计算更为简便．常用对数按教材可归纳为有以下几个性质：

(一) 10的整数次幂的对数是一个整数，它等于这个幂的指数；且真数较大时，它的对数也较大．

$\because 10^2=100$，　　$\therefore \lg 100=2$；

$\because 10^1=10$，　　$\therefore \lg 10=1$；

$\because 10^0=1$，　　$\therefore \lg 1=0$；

$\because 10^{-1}=0.1$，　　$\therefore \lg 0.1=-1$；

$\because 10^{-2}=0.01$　　$\therefore \lg 0.01=-2$．

一般地 $\lg 10^n=n\lg 10=n$（n为整数）同时可以看出真数较大时，它的对数也较大．

通过这个性质，得到求10的整数次幂的对数的法则：

1. 1的后面带有若干个零的整数的对数是一个正整数，它等于真数中零的个数．

2. 1的前面带有若干个零的纯小数的对数是一个负整数，它的绝对值等于真数中零的个数（包括小数点前面表示整数的一个零）.

(二) 10的整数次幂以外的正有理数的对数都是无理数，它等于一个整数加上一个正的纯小数．

教材中提出“任何不是10的整数次幂的正数的对数是一个小数”．如 $\lg 10^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$、$\lg 10^{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$，前一个为有限小数，后一个是无限不循环小数．

由于应用较多的是10的整数次幂以外的正有理数的对数，如 $\lg 723$、$\lg 0.025$ 等．故将教材中的这个性质的范围改变了提法．

例如，$\lg 35$、$\lg 4.5$、$\lg 0.83$

(1) $\because 10<35<100$，

$\therefore \lg 10 < \lg 35 < \lg 100$,

$1 < \lg 35 < 2$,

$\therefore \lg 35 = 1 +$ 正的纯小数.

(2) $\because 1 < 4.5 < 10$,

$\therefore \lg 1 < \lg 4.5 < \lg 10$

$0 < \lg 4.5 < 1$,

$\therefore \lg 4.5 = 0 +$ 正的纯小数.

(3) $\because 0.1 < 0.83 < 1$,

$\therefore \lg 0.1 < \lg 8.3 < \lg 1$.

$-1 < \lg 8.3 < 0$,

$\therefore \lg 8.3 = -1 +$ 正的纯小数.

根据(一)、(二)两个性质可知所有正数的对数都可以写成一个整数,(正整数,零或负整数)加上一个正的纯小数(或零)的形式.整数部分叫做这个对数的首数,正的纯小数(或零)部分叫做这个对数的尾数,在四位数学用表中对数的尾数只取四位有效数字.

(三)只有小数点位置不同的数,它们的对数的尾数都相同.

例如 已知 $\lg 2.843 = 0.4538$. 即 $\lg 2.843$ 是一个正的纯小数.则

$\lg 28.43 = \lg(2.843 \times 10) = \lg 10 + \lg 2.843 = 1.4538$;

$\lg 2843 = \lg(2.843 \times 1000) = \lg 1000 + \lg 2.843 = 3.4538$;

$\lg 0.2843 = \lg(2.843 \times 10^{-1}) = \lg 10^{-1} + \lg 2.843 = \bar{1}.4538$;

$\lg 0.02843 = \lg(2.843 \times 10^{-2}) = \lg 10^{-2} + \lg 2.843 = \bar{2}.4538$;

(四)对数的首数的确定. $N = A \cdot 10^n$ $(N > 0)(1 \leq A < 10)$ 则 $\lg N = n + \lg A$. n 是整数,即对数的首数.

$\lg A$ 是零或正的纯小数.

如 $\lg 3.5 = 0 + \lg 3.5$;

$\lg 350 = 2 + \lg 3.5$; $(350 = 3.5 \times 10^2)$

$$\lg 4500=3+\lg 4.5 \quad (4500=4.5\times 10^3)$$

(三).(四)两个性质为讲对数表、反对数表、利用对数进行计算的依据.

求一个正数的对数时，将这个正数用科学记数法表示，易于确定对数的首数；尾数部分则需查表确定。而如何应用(三)、(四)两个性质解题，不少学生感到吃力，针对学生的弱点，可多做些练习.

如 例1. 已知 $\lg 3.408=0.5325$，

求 0.003408、3408、34080 的对数.

例2 已知 $\lg 0.395=-0.4034$，求下列各数的对数.

(1) 0.0395； (2) 3950； (3) 39.5 .

例3 已知 $\lg x$ 的尾数和 $\lg 8305$ 的尾数相同，它的首数是 (1) −5； (2) 0； (3) −5 求 x.

例4. 已知 $\lg 0.7=-0.1549$，$\lg 11=1.0414$，

求 $\lg 539$.

例5. 已知 $5.623=\sqrt{10\sqrt{10}}$，求

(1) $\lg 562.3$ (2) $\lg 0.0005623$

对数概念讲课提纲

北京161中学 肖淑英

第 一 节

教学内容 对数(一)

教学目的 使学生掌握对数的概念

教学过程

一、复习

求下列各式的结果(口答)

(1) 4^3；(2) 10^{-3}；(3) 6^0；(4) $125^{\frac{2}{3}}$；(5) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

二、进行新课

(一) 引入对数的概念

在 $4^3=64$ 中，4是幂的底数，3是幂的指数，64是4的3次幂.

(1) $4^3=?$ 解：$4^3=64$ 是乘方问题，64叫做4的3次幂.

(2) $?^3=64$ 解：设这个数为 x，则 $x^3=64$.

$x=\sqrt[3]{64}=4$ 是开方问题，4叫做64的立方根.

(3) $4^?=64$ 解：设这个数为 X，则 $4^x=64$.

$\because 4^3=64$，$\therefore x=3$，是求指数问题.

由（3）引入课题——对数.

练习

1. 用对数关系叙述提问中各式.
2. 以2为底的16的对数等于多少？

(1) "以2为底的16的对数"是什么意思？

(2) "以2为底的16的对数等于多少"？是什么意思？

(3)这个数等于什么？

(4)怎样叙述这个结论？

(二) 引入对数的符号

以3为底的10的对数等于多少？

解：设这个数为 x，则 $3^x=10$，怎样表示 x 呢？

由此引进对数的符号"log" $x=\log_3 10$

练习：把提问中的指数式写成对数式：

1. $4^3=64$ 解：$\log_4 64=3$.
2. $10^{-3}=0.001$ 解：$\log_{10}0.001=-3$.
3. $6^0=1$ 解：$\log_6 1=0$.
4. $125^{\frac{2}{3}}=25$ 解：$\log_{125}25=\frac{2}{3}$.
5. $(\frac{4}{9})^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$ 解：$\log_{\frac{4}{9}}\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$.

(三) 对数的定义

从以上的练习引出对数的定义：

如果 $a^b=N$（$a>0$，且 $a\neq 1$），那么幂指数 b 叫做以 a 为

底的N的对数，记作 $\log_a N = b$.

a叫做底数，N叫做真数，b叫做以a为底的N的对数。

从 $a^b = N$ 和 $\log_a N = b$ 两个式子中可以看出同一个字母在不同的等式中有时有不同的叫法，这是由于有不同的要求而决定的，为了反映它们不同的要求，就变更了对它们的叫法。

在 $a^b = N$ 中，$a > 0$；在 $\log_a N = b$ 中，$a > 0$，且 $a \neq 1$，为什么有 $a \neq 1$ 这一条件限制？∵若 $a = 1$ 则b值不能唯一确定，或不存在，如 $\log_1 1 = ?$　$\log_1 2 = ?$

小结对数的定义，指数式与对数式可以互化.

三、布置作业

看书：P 172 3·3　练习：P. 175 1·2　P. 179 1·2

第二节

教学内容　对数（二）

教学目的　使学生进一步理解对数的概念，并掌握对数恒等式 $a^{\log_a N} = N$.

教学过程

一、复习提问

什么叫做对数？并举一例说明。

小结：对于一个不等于1的正数a来说，如果a的b次幂等于N，那么指数b就叫做以a为底的N的对数. $\log_a N$ 的意义是a的多少次幂等于N，它表示的是次数，也可以说它是一个数，a为底数，这个数为指数，那末a的这些次幂等于N。$a^b = N$ 与 $\log_a N = b$ 可以互化.

二、新课

（一）巩固对数的概念

1. 把指数式写成对数式：

(1) $5^4 = 625$；　(2) $3^{-2} = \frac{1}{9}$

2. 把对数式写成指数式：

(1) $\log_4 \frac{1}{64} = -3$；　(2) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27} = 3$.

3. 求下列各对数的值：

(1) $\log_9 81$

解：设 $\log_9 81 = x$，则 $9^x = 81$．∵ $9^2 = 81$，

∴ $x = 2$

即 $\log_9 81 = 2$．

(2) $\log_8 4$．

解：设 $\log_8 4 = x$，则 $8^x = 4$．∵ $2^3 = 8$，∴ $(2^3)^x = 4$．

$2^{3x} = 2^2$．$x = \frac{2}{3}$．

则 $\log_8 4 = \frac{2}{3}$．

(二) 对数恒等式 $a^{\log_a N} = N$．

4. 求值

(1) $3^{\log_3 81}$； (2) $2^{\log_2 5}$．

通过 (1)、(2) 研究 $a^{\log_a N} = ?$

∵ $a^b = N$，(1)

则 $b = \log_a N$．(2)

(2) 代入 (1)，得 $a^{\log_a N} = N (a > 0、a \neq 1、N > 0)$．

这个式子是一个恒等式，对于 N 为任意的正数都成立。如 $5^{\log_5 625} = 625$，$4^{\log_4 3} = 3$，$2^{\log_2 \pi} = \pi$．

三. 总结

1. 对于不等于 1 的正数 a，如果 $a^b = N$，那么指数 b 就叫做以 a 为底的 N 的对数，记做 $\log_a N = b$，b 是唯一存在的．

∵ $a > 0$，b 为实数，a^b 都大于 0；∴ N 必为正数．一个数的对数是实数．

2. $\log_a N$ 的意义：它是 a 的多少次幂等于 N 的幂指数．

∴ $a^{\log_a N} = N$．

3. 掌握对数式与指数式互化．

若已知等式 $\log_a N=b$ 中的两个数，求其余一个数．可以将 $\log_a N=b$ 化成 $a^b=N$，求其余一个数．

例：求下列各式中的 X．

(1) $\log_7 X=2$；　　(2) $\log_{10} 0.01=X$；

(3) $\log_X 27=3$．

4．我们知道了什么叫对数以后，还要学习对数的运算法则，应用对数进行计算，可以把高一级的运算转化为低一级的计算，因此对数是简化复杂计算的工具．

布置作业　　175页　3、4　5、6．

　　　　　　179页　习题十一，3