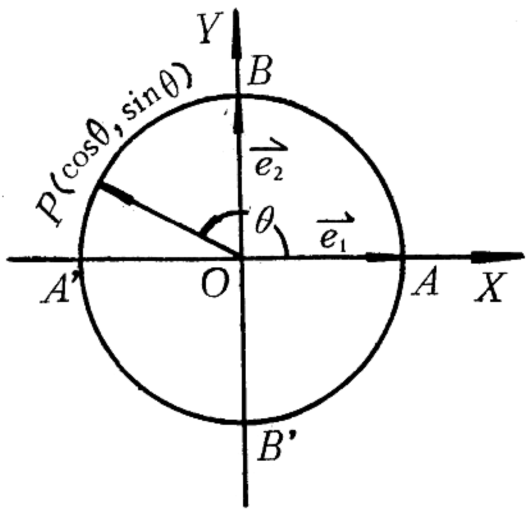
高中数学试验教材

三　角



$$\overrightarrow{OP} = \vec{e_1}\cos\theta + \vec{e_2}\sin\theta$$

上海市数学教育研究会高中数学教材改革试验组

说　　明

在上海市、徐汇、虹口区教育局与上海市数学教育研究会领导的支持鼓励下，我们自78年开始高中数学教材改革的试验。五年来先后在上海市第五十九、第五十一、向明、七一、淮中、钟山、沪闵等中学进行了三轮试验，取得了较好的效果。80年秋经过两轮试验后，在第一稿的基础上，由陈振宣、章景翰、贺龙泉写成第二稿。在各校进行第三轮试验。为了84年暑假后开展第四轮试验，在试验组集体讨论的基础上，陈、章两人研究改写方案，由陈执笔写成第三稿。并请赵宪初、张元书审稿，经上海市教育局、市出版局同意铅印，继续进行试验。

《三角》试验教材，运用集合、对应、向量等近代数学概念、观点、方法，改革了正弦、余弦函数的定义，从此导出几乎全部三角的基本知识，删繁就简，化难为易。三角函数的基本性质、图象、诱导公式、加法定理等内容都通过启发引导学生自己获得。例题重视思路分析与解题规律的说明。重视三角与数学各科以及物理、测量等内容的基本联系和综合应用。扩大视野、开拓思路。每章小结着重阐明知识的逻辑结构，既加深了基本知识的理解，又便于巩固记忆，丰富联想，提高能力。

与第一、第二稿相比，第三稿有了较大的改进，但限于水平，仍存在不少有待改进的地方，还望专家与广大教师不吝指正。

上海市数学教育研究会高中数学教材改革试验组

84年5月

目　　录

第一章　　三角函数

第二章　三角函数的恒等变换

第三章　应　用

第一章 三角函数

§1 角的概念的推广

在物理学与工业生产中，如齿轮传动的从动轮的齿数是主动轮的十倍，要使从动轮按逆时针方向旋转60°，则主动轮应按顺时针方向转600°；要使从动轮按顺时针方向旋转150°，则主动轮应按逆时针方向转1500°。可见角的大小不仅不能局限在360°以内，还得考虑旋转方向。所以角的概念有推广的必要。

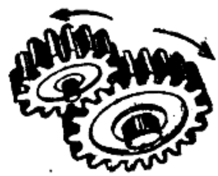


图 1

定义 一条射线绕其端点O，从初始位置OA，旋转到终止位置OB，所扫过的平面部分称为角，用$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$表示，$OA$称为角的始边，$OB$称为角的终边，$O$称为角的顶点。当一条射线没有作任何旋转时、也可认为形成了一个角，这个角称为零角。规定按逆时针旋转所形成的角为正角，按顺时针旋转所形成的角为负角，如图2中$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$为正角，$(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$为负角。

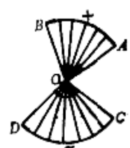


图 2

角的概念经此推广后，它包括任意大小

的正角、负角和零角．可以确切地、方便地反映生活、生产实际中的角．为应用数学工具探索自然规律与发展生产创造了条件．

为了研究的便利，常取直角坐标系的原点O为角的顶点，角的始边放在x轴正半轴上，角的终边在第几象限内，就说这个角是第几象限的角，或说此角属于第几象限．如图3中，60°，−300°，420°的角都是第一象限的角；210°，−150°，570°，930°的角都是第三象限的角；−45°，315°，−765°的角都是第四象限的角．如果角的终边在坐标轴上，则此角不属于任何象限．

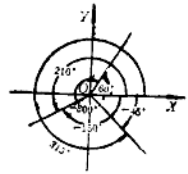


图 3

如图3中，可见60°，−300°，420°的终边是相同的，并且$60°+k\cdot360°$，$k\in z$的终边都与60°的终边重合，当$k=-1$时，即为−300°；$k=1$时，即为420°；$k=4$时，即为1500°等．

一切与角α终边相同的角，包括角α在内，可以用式子：$\alpha+k\cdot360°$，（$k\in z$）表示，而且用$\alpha+k\cdot360°$（$k\in z$）表示的角的终边与角α的终边重合，所以与一个角α共顶点、始边与终边的角组成的集合（包括角α在内），可以记作：$\{\theta\mid\theta=\alpha+k\cdot360°,\ k\in z\}$．

例1 写出与下列各角共顶点、始边和终边的角的集合S，并写出它们在−720°～360°间的诸角：

(1) 75°；(2) −30°；(3) −370°16′．

解：(1) $S=\{\theta|\theta=75°+k\cdot360°,\ k\in z\}$其在

$-720^\circ \sim 360^\circ$间的角为$75^\circ+0\times360^\circ=75^\circ$，
$75^\circ-360^\circ=-285^\circ$；$75^\circ-2\times360^\circ=-645^\circ$；

(2) $S=\{\theta|\theta=-30^\circ+k\cdot360^\circ, k\in z\}$，其在$-720^\circ\sim360^\circ$间的角为$-30^\circ+0\times360^\circ=-30^\circ$；
$-30^\circ-360^\circ=-390^\circ$；$-30^\circ+360^\circ=330^\circ$；

(3) $S=\{\theta|\theta=-370^\circ16'+k\cdot360^\circ, k\in z\}$，其在$-720^\circ\sim360$之间的角为$-370^\circ16'+0\times360^\circ=-370^\circ16'$；
$-370^\circ16'+360^\circ=-10^\circ16'$，$-370^\circ16'+2\times360^\circ=349^\circ44'$。

例 2 齿轮传动机构中，从动轮的齿数是主动轮的5倍，要使从动轮旋转120°，那末主动轮应旋转几度？如果主动轮旋转1200°，那末从动轮转几度？

解：∵ 从动轮齿数是主动轮的5倍，从动轮与主动轮旋转方向相反。∴ 从动轮旋转120°，则主动轮旋转$-5\times120^\circ=-600^\circ$；主动轮旋转1200°，则从动轮旋转

$1200^\circ\div(-5)=-240^\circ$。

例 3 如果角的始边在x轴正半轴上，写出终边在x轴上的角的集合。

解：在$0^\circ\sim360^\circ$之间，角的终边在x轴正半轴上的角为0°、角的终边在x轴负半轴上的角为180°，因此角的终边在x轴正半轴上，负半轴上的角的集合分别为：

$S_1=\{\theta|\theta=k\cdot360^\circ, k\in z\}$，

$S_2=\{\theta|\theta=180^\circ+k\cdot360^\circ, k\in z\}$

∵ $k\cdot360^\circ=2k\cdot180^\circ$，$180^\circ+k\cdot360^\circ=(2k+1)\cdot180^\circ$。

∴ 终边在x轴上的角的集合为：

$S=S_1US_2=\{\theta|\theta=n\cdot180^\circ, n\in z\}$。

例 4　如果角α是第一象限的角，那么$\frac{\alpha}{2}$是第几象限的角？

解：$\because$　α是第一象限的角，$\therefore 2k\cdot180^\circ<\alpha<2k\cdot180^\circ+90^\circ$　$k\in z$。因此　$k\cdot180^\circ<\frac{\alpha}{2}<k\cdot180^\circ+45^\circ$。

当k为偶数$2n$时。

$2n\cdot180^\circ<\frac{\alpha}{2}<2n\cdot180^\circ+45^\circ$，$n\in z$　下同

当k为奇数$2n+1$时，

$2n\cdot180^\circ+180^\circ<\frac{\alpha}{2}<2n\cdot180^\circ+225$

$\therefore$　$\frac{\alpha}{2}$是第一象限或第三象限的角。

练习

1．写出与下列各角共顶点、始边和终边的角组成的集合S，并写出其在$-360^\circ\sim720^\circ$之间的角：

(1) 20°；(2) -60°；(3) 372°。

2．表从12点走到15点，时针，分针和秒针分别走过多少度？

3．下列各角分别是第几象限的角：

(1) 3120°；(2) -3120°；(3) 1350°；(4) -2959°。

4．写出第二象限角的集合，再写出第二、四象限角的集合。

5．如果α是第三象限的角，那末$\frac{\alpha}{2}$是第几象限的角。

§ 2　角的度量

几何中规定一个周角的$\frac{1}{360}$的角作量度角的单位，称为

1°(度)的角，1°的$\frac{1}{60}$称为1′（分）；1′的$\frac{1}{60}$称为1″（秒）。以度、分、秒为角度量单位的量度制度称为六十分制，但在实用上与理论上，还有另一种度量角的制度，下面先谈其理论根据。

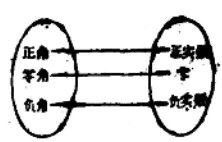
定理　**圆心角的大小，随其所对的弧长与圆的半径之比确定。**

证：设圆心角（$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$）$=\theta$，所对的弧长为$\overset{\frown}{AB}$，圆的半径$OA=OB=R$，∵ 同圆或等圆的圆心角之比等于所对弧长之比。

$$\therefore\quad \theta : 180^\circ = \overset{\frown}{AB} : \text{半圆周长，即}\ \theta = \frac{180^\circ}{\pi}\left(\frac{\overset{\frown}{AB}}{R}\right)$$

故当$\frac{\overset{\frown}{AB}}{R}$确定时，$\theta$的大小，就唯一确定了。

据此可以在角与实数$\frac{\overset{\frown}{AB}}{R}$之间建立一一对应关系，如果一角所对弧长是半径的两倍，则此角对应的实数为2；如果此角所对弧长与半径相等，则此角对应的实数为1；如果一角所对弧长是半径的10倍，而旋转方向是顺时针的，则此角对应的实数为-10，显然周角对应的实数为2π，平角对应的实数为π，即$180^\circ=\pi$。但这不应理解为$180=\pi$、而是180°的角对应的实数为π，这样我们在任意角的集合与实数集之间建立了一种一一对应法则。



任意角的集合S　　实数集合R

图 4

按此对应法则任意角对应的实数为α，则此角对的弧长：$l=R|\alpha|$，其中R为圆的半径，即$|\alpha|=\frac{l}{R}$，这就是任意角与实数之间的对应法则，α的正、负根据形成角的旋转方向确定。

这一弧长公式比六十分制中的弧长公式：$l=\frac{n\pi R}{180}$简单得多。相应扇形面积公式为：

$S=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{2}R^2|\alpha|$，其中$R$为扇形的半径、$\alpha$为扇形中心角对应的实数。

过去把所对弧长等于半径的角称为1弧度的角，即1弧度的角对应的实数就是1，因此一角对应的实数为α则此角就是α弧度。一般书写时常常略去弧度两字，今后一律用角对应的实数表示角的大小，不写单位。$180°=\pi$表示$180°$的角对应的实数为π，亦即$180°$等于π弧度，从此可知

$$1\text{弧度}=\frac{180°}{\pi}\approx 57°17'44.8''\text{或}57.2957795°$$

$$1°=\frac{\pi}{180}\text{弧度}\approx 0.017453\text{弧度}.$$

以“弧度”为单位量度角的制度称为弧度制。

按照上述规定与角的概念的推广，可知角的相加，可以据根角的形成方法进行：

$(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC})=(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OC})$即以$\overrightarrow{OA}$为始边，$\overrightarrow{OC}$为终边的角等于自$\overrightarrow{OA}$旋转到$\overrightarrow{OB}$，再自$\overrightarrow{OB}$旋转到$\overrightarrow{OC}$所形成的两角之和，据此可以推广到任意几个角相加的方法。

例 1　求108°角对应的实数。

解：∵　1°角对应的实数是$\frac{\pi}{180}$，∴　108°对应的实数为　$\frac{108}{180}\pi=\frac{3}{5}\pi$

例 2　与实数$\frac{11\pi}{12}$对应的角等于几度？

解：∵　与1对应的角等于$\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$．

∴　与实数$\frac{11\pi}{12}$对应的角等于：$\left(\frac{180}{\pi}\times\frac{11\pi}{12}\right)^\circ=165^\circ$

例 3　设三角形三个内角A、B、C满足下列条件：

$$\begin{cases} A+C=2B \\ \text{最小角的度数：最大角对应的实数}=60:\pi. \end{cases}$$

求A、B、C对应的实数。

解：∵　最小角的度数：最大角对应的实数$=60:\pi$，

∴　$A\cdot\frac{180}{\pi}:C=60:\pi$　　故　$C=3A$。

∵　$A+C=2B$，即$2B=4A$，∴　$B=2A$。

∵　$A+B+C=\pi$，∴　$6A=\pi$．

故　$A=\frac{\pi}{6}$，　$B=\frac{\pi}{3}$，　$C=\frac{\pi}{2}$。

例 4　一扇形的弧长是其周长的一半，试求其中心角对应的实数，若此扇形的半径为R，求其面积S．

解：设扇形弧长为l，则　$l+2R=2l$，即$l=2R$，

∴　中心角对应的实数　$\alpha=\frac{2R}{R}=2$。

此扇形的面积$S=\frac{1}{2}R^2\alpha=R^2$（面积单位）

练习

1． 填表：

度数	$0°$	$30°$			$75°$	$90°$	$120°$	$135°$				$225°$	$240°$
实数			$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$					$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$		

2． 已知：$\alpha=-10$，$\beta=\pi^2$，$\gamma=\sqrt{\pi}$分别说出α、β、γ　$\alpha+\beta$，$\beta-\gamma$是第几象限的角？

3． 求正五边形一个内角与一边所对中心角所对应的实数。

4． 顶点在原点，始边在x轴正半轴上，试写出终边在x轴上或在y轴上角的集合。

5． 一扇形的弧长是周长的$\frac{2}{3}$，试求其中心角对应的实数，若此扇形半径为R，试求其面积S。

☆　密位制

在军事上量角的制度采用密位制，理论上规定

$$1\text{ 密位}=\frac{1}{1000}\text{弧度}.$$

用记号“－”表示密位，实际各个国家常用周角的$\frac{1}{6000}$为1^{-}。（有的国家取周角的$\frac{1}{6200}$，或$\frac{1}{6250}$，或$\frac{1}{6400}$为1^{-}）

按密位的定义，可得军事上常用的定理如下：

定理　**炮目距离（即炮位到射击目标的距离）：**

☆是供学生课外阅读使用的材料，不在课内讲授，不作考查要求

$R(km)$，着弹点到目标的偏差$l(m)$，由炮位观测得着弹点与目标所张的角为：n^{-}，则 $l=Rn(m)$

证：∵ 弧长＝半径×中心角对应的实数，

$$\therefore \quad l=R(km)\times\frac{n}{1000}=Rn(m)$$

即偏差的米数等于炮目距离的公里数与偏差角的密位数之积。

密位的写法与读法有规定的格式，写密位数时应在百位数与十位数之间划一短线，短线前后无数字时就写零，读密位时，短线前后应分开读，例如

密位数	密位写法	密位读法
4555	45—55	四十五，五十五
130	1—30	一，三十
5	0—05	零，零五
1500	15—00	十五，零

例 5　根据飞机观测员报告，炮弹着弹点偏离目标左边200米，炮目距离为8000米，问大炮应向右旋转多少密位，才能命中目标。

解：$\because l=Rn$，$\therefore \quad n=\frac{l(m)}{R(km)}=\frac{200}{8}=25^{-}$记为0—25

答：大炮应向右旋转25^{-}，才能命中目标。

例 6　测得敌人坦克高 3 米、上下所张之角为 0—05，求测点到敌坦克的距离。

解：$\because \quad l=Rn \quad \therefore \quad R=\frac{l}{n}=\frac{3}{5}=0.6(km)$

答：测点到敌坦克的距离为600米。

例7 地球与太阳之平均距离为$1.5\times10^{8}(km)$，一人在地球上测得太阳所张的视角为$32'$，求太阳直径的近似值。

解：设太阳直径为$D(km)$，因为太阳所张视角很小，故太阳直径与以人目为中心，地球与太阳间平均距离为半径作圆所截得的圆弧近似相等，

$$32'=\left(\frac{32}{60}\right)^{\circ}=\frac{\pi}{180}\times\frac{32}{60}=\frac{2\pi}{675}\ (\text{弧度})$$

$$D=\frac{2\pi}{675}\times1.5\times10^{8}=\frac{\pi}{225}\times10^{8}\approx1.4\times10^{6}\ (km)$$

答：太阳直径近似等于一百四十万公里。

§3 单位圆上的一维坐标系

以单位长度为半径的圆称为单位圆．为了表达角所在范围（区间）的方便，我们将数轴按下列方式绕在一单位圆上，建立单位圆上的一维坐标系．所谓单位圆上的一维坐标系是单位圆上的点与实数之间一套对应法则，下面就来介绍这一对应法则．

以原点为中心的单位圆与x、y轴正半轴、负半轴依次交于A、B、A'、B'如图5，将数轴的原点放在A上，数轴的正半轴按逆时针方向绕在单位圆上，负半轴按顺时针方向绕在单位圆上．这样可以建立单位圆上的点与实数之间对应法则如下：

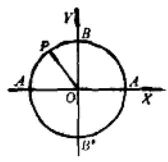


图5

1° **从点转化为数**（如何确定已知点的坐标）

设 P 为单位圆上的一点，这样可以唯一地确定一单位向量$\overrightarrow{OP}$，（即以单位圆中心为O始点，P为终点的向量），它的幅角（$\overrightarrow{OX}$，$\overrightarrow{OP}$）对应的实数 θ，即为点P的坐标，记为（θ）. 终边为OP的角的集合：$S=\{\alpha|\alpha=\theta+2k\pi, k\in z\}$，故单位圆上一点对应实数有无限多，如果把 θ 限制在〔$0,2\pi$）内，则点 P 对应的实数是唯一的，这一实数 θ 即$\overrightarrow{OP}$幅角的主值，而 θ 即等于有向弧$\overset{\frown}{AP}$的值.

2° **从数转化为点** （如何确定坐标为 θ 之点的位置）

单位圆中，将单位向量自$\overrightarrow{OA}$旋转角 θ（若 $\theta>0$，按逆时针方向旋转，若 $\theta<0$，按顺时针方向旋转）到达$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OP}$与单位圆的交点 P，即 θ 所对应的点，亦即点 P 的坐标为 θ，如果 $\theta=2n\pi$，$n\in z$，则点 P 与点 A 重合.

按上述方法，建立了单位圆上的点与实数之间的对应法则，和数轴上相同之处是：在单位圆上点 P 的坐标就是有向弧$\overset{\frown}{AP}$的值，在数轴上点 P 的坐标就是有向线段OP的数量，不同之处是数轴上点集与实数集成一一对应，但单位圆上的点集与实数集不是一一对应的，一个实数对应一个点；反过来，一个点对应无限多个实数.

按照单位圆上一维坐标系，可知：

点 A 的坐标为：0 或$2n\pi$、$n\in z$；下同，

点 B 的坐标为：$\frac{\pi}{2}$或$\frac{\pi}{2}+2n\pi$；

点A'的坐标为：π 或 $\pi+2n\pi$；

点B'的坐标为：$\frac{3\pi}{2}$或$\frac{3\pi}{2}+2n\pi$，或 $-\frac{\pi}{2}+2n\pi$.

如果 $\angle AOP=\frac{\pi}{3}$，则终边OP与单位圆的交点P的坐标为$(\frac{\pi}{3})$

如果 $\angle AOP=-\frac{2\pi}{3}$，则终边$OP$与单位圆的交点$P$的坐标为$(-\frac{2\pi}{3})$

由于单位圆上点的坐标不是唯一的，而是有无限多个，故单位圆上两点所确定的区间也不是唯一的，而是有无限多个区间。

例 1 单位圆上两点的坐标是 $B'(-\frac{\pi}{2})$、$B(\frac{\pi}{2})$ 试求自B到B'，所确定的闭区间；自B'到B的开区间。

解：自B到B'所确定的闭区间： $[\frac{\pi}{2}+2n\pi,\frac{3\pi}{2}+2n\pi]$ $n\in z$ 下同；自B'到B所确定的开区间：

$(-\frac{\pi}{2}+2n\pi,\ \frac{\pi}{2}+2n\pi)$.

例 2 单位圆上两点的坐标分别为 $P(\frac{\pi}{3})$、$Q(\frac{2\pi}{3})$ 试求自P到Q所确定的开区间；自Q到P的闭区间。

解：自P到Q所确定开区间：

$(\frac{\pi}{3}+2n\pi,\ \frac{2\pi}{3}+2n\pi)$. $n\in z$ 下同；

自Q到P所确定的闭区间：

$[-\frac{4\pi}{3}+2n\pi,\ \frac{\pi}{3}+2n\pi]$.

例 3 单位圆上四点$B(\frac{\pi}{2})$、$C(\frac{5\pi}{6})$、$B'(\frac{3\pi}{2})$、

$C'(\frac{11\pi}{6})$，试求自B到C与自B'到C'所确定的开区间。

解：自B到C所确定的开区间：

S_1：$(\frac{\pi}{2}+2n\pi,\ \frac{5\pi}{6}+2n\pi)$　$n\in z$下同。

自B'到C'所确定的开区间：

S_2：$(\frac{3\pi}{2}+2n\pi,\ \frac{11\pi}{6}+2n\pi)$

$\because\ \frac{3\pi}{2}+2n\pi=\frac{\pi}{2}+(2n+1)\pi,$

$\frac{11}{6}\pi+2\pi n=\frac{5\pi}{6}+(2n+1)\pi.$

$\therefore\ S_1\cup S_2$所确定的开区间：

$(\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{5\pi}{6}+k\pi)$　$k\in z$.

练习

1. 求自P到Q的开区间；自Q到P的闭区间：

已知：(1) $P(0)$、$Q(\frac{\pi}{2})$；(2) $P(\frac{\pi}{6})$、$Q(\frac{2\pi}{3})$；

(3) $P(-\frac{\pi}{3})$、$Q(\frac{2\pi}{3})$.

2. 求上半圆确定的闭区间；下半圆确定的开区间。
3. 求左半圆确定的开区间；右半圆确定的闭区间。
4. 求一、三象限确定的开区间。
5. 单位圆上$P(\alpha)$，$P'(-\alpha)$的直角坐标$(x_p、y_p)$、$(x_{p'}, y_{p'})$之间有何关系？
6. 单位圆上$P(\alpha)$、$P'(\alpha+\pi)$的直角坐标$(x_p、y_p)$$(x_{p'}, y_{p'})$之间有何关系？