高等学校试用教材

高等数学

〔日〕横手一郎 著

张 卿 赵为礼 于长敏 译

习题课教程

上 册

高等学校试用教材

高等数学
习题課教程

（上册）

〔日〕横　手　一　郎　著
张　卿　赵为礼　于长敏　译

一九八四年八月

内 容 提 要

该书理论系统，内容丰富，例、习题类型齐全。每节均有（1）内容提要；（2）例题；（3）练习题；（4）练习题解答。在叙述上由浅入深，通俗易懂，能紧密配合理工科院校的高等数学教学大纲，对读者掌握基本概念、基本理论、基本方法和解题的技能技巧均有裨益，是一本较好的习题课教材。

本书分上、下两册装帧，上册为一元微积分，下册包括多元函数微积分、无穷级数和常微分方程等内容。

高等数学习题课教程

上 册

〔日〕横 手 一 郎 著

张 卿 赵为礼 于长敏 译

*

86047部队青年印刷厂 印刷

*

787×1092毫米32开本 450,000字

1984年7月 出版 印数：1－6600

吉林省文化厅（83）294号批准 工本费2.23元

翻译前言

多年来，由于没有一本成型的高等数学习题课教本，广大师生深感不便。1981年译者偶得此书，阅后感到该书确属一本较为理想的习题课教材。于是，我们边翻译边在教学中试用。通过教学实践我们认为该书的特点是：内容丰富，深浅得当；对高等数学中的基本概念、基本理论和基本方法，都作了精练的归纳和总结，并配有典型例题和类型齐全的练习题。其中，既有足够数量的巩固基本概念、加强基本训练的题目；又有较多具有一定难度的富有思考性的题目；并汇编了许多理论联系实际的应用题；特别，还搜集了不少历史上著名的题目。书中对所有的题目，又都逐题给出了具有启发性的提示或略解，其中，有些习题的证法之新颖，解法之巧妙还是值得称道的。此外，该书还本着循序渐近的原则，对全部习题由易到难，由浅入深地作了统筹安排。这对读者逐步地系统掌握高等数学的基本内容，进一步提高分析问题和解决问题的能力均有所裨益。

由于上述特点，使得本书具有比较广泛地适应性。除了全日制理、工、农、医、师范理科等各大专院校的师生可用作习题课教材外，函授大学、电视大学、职工业余大学的师生还可选作辅导教材，自学高等数学的广大读者也可选为入门参考书。

在翻译过程中，我们曾得到吉林大学数学系李荣华教

授、长春地质学院基础部主任景毅教授和数学教研室主任杨天行付教授的盛情鼓励和支持，译者在此谨致谢忱。

经过再三斟酌，我们对原书的某些欠缺与不妥之处，在不失著者原意的原则下曾作了必要的补充、修改和更正。

由于译者水平所限，疏漏与不当之处在所难免，恳请读者不吝指正。

译　　者

1983年10月18日于长春

原 文 序 言

本书是一本高等数学习题课教材。作者认为本教材的内容是理工科大学生所必须掌握的。

目前，大学的高等数学基础课，由于内容多，进度快，有些重要内容也往往一带而过，或者不得不删掉，尤其又没有足够多的演题时间，从而，对课程内容的理解很可能只浮于表面，而将来无论学习哪一门专业课，又都需要高等数学知识，这必将给专业课的学习带来一定的困难。

编写本书的目的正是为了弥补上述之不足。当然本书也可以作为教学参考书或者自学辅导用书。关于习题的选择，则是在充分考虑到高等学校课程设置的基础上，尽可能地压缩与一般书上相重复的习题，而多选一些有利于培养学生独立思考能力的，中等程度以上的习题；并把历史上一些著名的习题也尽量收集在内。

至于常用的球坐标、柱坐标概念以及三角函数公式，在高等数学课程中不便多讲，我们将这些内容作为附录放在本书的后面。熟练地掌握这些知识，对演算本书的习题是有益的。

著　者

1979年秋

上 册 目 录

第一章　极限与连续

1.1 实　　数

提　　要

用R表示全体实数的集合。把可以表示为$\frac{m}{n}$(m，n为整数，$n\neq 0$)的数叫做**有理数**。非有理数的实数叫做**无理数**。

设a，b∈R，a<b。则把满足不等式$a\leqslant x\leqslant b$的所有实数x的集合，叫做以a、b为端点的**闭区间**，记之为$[a, b]$。把满足不等式$a<x<b$的所有实数x的集合叫做以a、b为端点的**开区间**，记之为(a, b)。把$a\leqslant x<b$，$a<x\leqslant b$所表示的全体实数x的集合分别记为$[a, b)$，$(a, b]$。上述四个实数的集合都叫做**有限区间**。

设a∈R，则$a\leqslant x$，$a<x$，$x\leqslant a$，$x<a$所表示的全体实数x的集合，分别用$[a, +\infty)$，$(a, +\infty)$，$(-\infty, a]$，$(-\infty, a)$来表示，并用$(-\infty, +\infty)$来表示R本身。这五个实数集合都叫做**无限区间**。

设M为某实数集合。若存在a∈R，使得对任意$x\in M$，恒有$x\leqslant a$，则称集合M**上方有界**，a叫做M的一个**上界**。若a是M的上界，则显然一切大于a的数都是集合M的上界。

若以$x\geqslant a$替换上述的$a\geqslant x$，则称集合M为**下方有界**，a为

M 的**下界**。若集合M上、下方都有界，则称M是**有界集合**。否则，称之为**无界集合**。

把集合M的最小上界叫做它的**上确界**，最大下界叫做它的**下确界**。分别用SupM，inpfM来表示。当M没有上界时，SupM = +∞，M没有下界时，infM = -∞。

1．显然，任意两个实数a，b(a≠b)之间，至少还存在一个实数c$\left(\text{例如，}\dfrac{a+b}{2}\right)$。把这种性质叫做实数的**稠密性**。

〈**注**〉有理数也具有稠密性。

2．设

$$I_1=[a_1,b_1],\ I_2=[a_2,b_2],\ \cdots I\ =[a_n,\ b_n],\ \cdots.$$

若

$$I_1\supset I_2\supset I_3\supset\cdots\supset I_n\supset I_{n+1}\supset\cdots,$$

并且，当n无限增大时，I_n的长度b_n-a_n趋于零，则必存在唯一实数c，属于所有闭区间$I_1,I_2,\cdots,\ I_n\cdots$。把实数的这种性质叫做实数的**连续性**。

〈**注**〉全体有理数不具有这种连续性，无理数也不具有这种性质。

3．设M为实数集合，a为实数。则

(1) a = SupM的充分必要条件是

(i)对于任意$x\in M$恒有$x\leqslant a$；

(ii)对于任给的$\varepsilon>0$，必存在$x'\in M$，使得$x'+\varepsilon>a$。

(2) a = infM的充分必要条件是

(i) 对于任意$x\in M$恒有$x\geqslant a$；

(ii) 对于任给的$\varepsilon>0$，必存在$x'\in M$，使得$x'-\varepsilon<a$。

4．**Weierstrass定理**：如果实数集合M有上界，则它必有上确界；如果M有下界，则它必有下确界。

练 习 题 一

1．确定下列集合的有界性、最大值、最小值、上确界和下确界。

（1）$[a, b]$；　　（2）$(a, b]$；

（3）{全体整数}；　（4）$\{x \mid x^2 < 2, x$为有理数$\}$；

（5）$\{\frac{1}{n} \mid n$为自然数$\}$；（6）$\{\frac{x}{x-1} \mid x > 1\}$。

2．若整系数的n次方程

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (1)$$

的根是有理数，则此有理数必为整数。

练 习 题 一 答 解

1 （**略解**）

	有界性	最大值	最小值	上确界	下确界
（1）	有　界	b	a	b	a
（2）	有　界	b	无	b	a
（3）	无　界	无	无	无	无
（4）	有　界	无	无	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
（5）	有　界	1	无	1	0
（6）	有下界	无	无	无	1

2（**略解**）设方程（1）的有理根为 $\alpha=\frac{p}{q}$（p、q为互质的整数，$q>0$）把它代入（1）式中，两端再乘以q^n得

$$p^n+a_1p^{n-1}q+a_2p^{n-2}q^2+\cdots+a_{n-1}pq^{n-1}+a_nq^n=0,$$

$$p^n=-q(a_2p^{n-1}+a_2p^{n-2}q+\cdots+a_{n-1}pq^{n-2}+a_nq^{n-1}).$$

因上式右端是q的整数倍，故p^n是q的整数倍，从而p也是q的整数倍。再由p和q互质知，必有$q=1$。故α是整数。

1．2 数列的极限

提　　要

数列a_1，a_2，a_3，…a_n，…，常用符号$\{a_n\}$来表示。

若对于一切自然数n，恒有

$$a_n \leqslant a_{n+1} \quad (a_n \geqslant a_{n+1}),$$

则称$\{a_n\}$为**单调增加(减少)数列**。单调增加与单调减少数列统称为单调数列．设$\{a_n\}$为某数列．若存在实数k，使得对于一切自然数n，恒有

$$a_n \leqslant k \qquad (a_n \geqslant k)$$

则称$\{a_n\}$为**上(下)方有界**。若$\{a_n\}$上、下都有界，则称$\{a_n\}$**有界**。

对于数列$\{a_n\}$，若当n无限增大时，a_n无限趋近于某常数a，则称$\{a_n\}$是收敛的，或者说$\{a_n\}$收敛于a，并把a叫做$\{a_n\}$的极限．记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad 或 \qquad a_n \longrightarrow a(n\to\infty).$$

$\{a_n\}$收敛于a的确切含意则是：任给$\varepsilon>0$，恒存在自然数N，使得当$n>N$时，

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

若数列$\{a_n\}$不收敛，则称之为发散。当n无限增大时，a_n亦无限增大，则称数列$\{a_n\}$发散于$+\infty$。记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \text{或} a_n \longrightarrow +\infty (n\to\infty).$$

上式的确切含意则是：任给$M>0$，恒存在自然数N，使得当$n>N$时

$$a_n > M.$$

对于数列$\{a_n\}$，若$\{-a_n\}$发散为$+\infty$，称$\{a_n\}$发散为$-\infty$。记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \text{或} a_n \longrightarrow -\infty (n\to\infty)$$

1．若数列$\{a_n\}$收敛于α，则$\{a_n\}$的子序列也收敛于α。

2．设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$，则

（1） $\lim (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$；

（2） $\lim\limits_{n\to\infty} (ka_n) = R\alpha$ （K为常数）；

（3） $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = \alpha \cdot \beta$；

（4） $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ （$b_n \neq 0$，$\beta \neq 0$）；

（5）当对任意的自然数n有$a_n \geqslant b_n$时，必有$\alpha \geqslant \beta$。

3．**Weierstrass定理**：如果$\{a_n\}$有界，则$\{a_n\}$的子序

列$\{a_{n_i}\}$必收敛。

4．单调有界数列必收敛。

5．**Cauchy定理**：数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是：对于任给$\varepsilon>0$，恒存在自然数N，使得当m，n>N时，恒有

$$|a_m-a_n|<\varepsilon.$$

例　　题

〔**例题1**〕试证$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n}{2n-1}=2$．

证：对任给$\varepsilon>0$，存在自然数N，使得当n>N时，

$$\left|\frac{4n}{2n-1}-2\right|<\varepsilon \qquad (1)$$

能成立即可。解不等式(1)得

$$\frac{2}{2n-1}<\varepsilon,\qquad n>\frac{2+\varepsilon}{2\varepsilon}.$$

所以，当$n>\dfrac{2+\varepsilon}{2\varepsilon}$ $\left(N-1<\dfrac{2+\varepsilon}{2\varepsilon}\leqslant N\right)$时，（1）式便成立．从而，对任给$\varepsilon>0$，存在$N=\dfrac{2+\varepsilon}{2\varepsilon}$，使得当n>N时，原式得证。

〔**例题2**〕试证$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$　　$(a>0)$．

证 取自然数$M>2a$，则对于一切$n>M$有

$$\frac{a^n}{n!}=\frac{\overbrace{aa\cdots\cdots a}^{n-M个}}{n(n-1)\cdots(M+1)}\cdot\frac{\overbrace{aa\cdots\cdots a}^{M个}}{M(M-1)\cdots2\cdot1}$$

$$<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-M}\frac{a^M}{M!}$$

$$=\frac{1}{2^{n-M}}\frac{a^M}{M!}=\frac{1}{2^n}\frac{(2a)^M}{M!}.$$

因此，对于任给$\varepsilon>0$，存在自然数N，使得当$N>M$时，

$$2^N>\frac{(2a)^M}{\varepsilon M!}$$

于是，对于所有的$n>N$，均有

$$\frac{1}{2^n}\frac{(2a)^M}{M!}<\varepsilon,\qquad \frac{a^n}{n!}<\varepsilon.$$

从而，原式得证。

〔例题3〕若数列$\{a_n\}$收敛，则$\{a_n\}$必有界。

证： 设$a_n\to a\quad(n\to\infty)$，即任给$\varepsilon>0$，存在自然数N，使得当$n>N$时，

$$|a_n-a|<\varepsilon.$$

即

$$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon.$$

因此，设$M=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_N|,|a-\varepsilon|,|a+\varepsilon|\}$，则恒有

$$|a_n|\leqslant M.$$

故$\{a_n\}$的有界性得证。

〔**例题4**〕设$a_1=1$，$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$，求极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。

解：假设所求的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$，则在$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$的两端当$n\to\infty$时取极限得$\alpha=\sqrt{2+\alpha}$（$\alpha\geqslant0$）。易见$\alpha=2$。由此，只须证明$a_n$单调有界即可，于是，根据提要4，$\alpha$即为所求之极限值，以下分两步证之。

(A)用数学归纳法证明$\{a_n\}$的有界性。即往证$0<a_n<2$，对一切n都成立。事实上，当$n=1$时，则$0<a_1=1<2$，显然，数列有界。假设$0<a_n<2$成立，则有

$$0<\sqrt{2+0}<a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}<\sqrt{2+2}=2$$

于是，对$n+1$时也成立，从而，对一切n都有$0<a_n<2$。所以数列$\{a_n\}$有界。

(B)证明$\{a_n\}$是单调增加的。由(A)的结果有

$$a^2_{n+1}-a^2_n=2+a_n-a^2_n=(2-a_n)(1+a_n)>0$$

故　$a^2_{n+1}>a^2_n$。而$a_n>0$，于是$a_{n+1}>a_n$。所以，$\{a_n\}$是单调增加的数列。

综上得证，所求极限存在且为2。

〔**例题5**〕证明数列$\{a_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$是收敛的。

证：仿例题4，以下分两步证之。(A)首先证明$\{a_n\}$是单调增加的。由二项式定理得

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\frac{n}{1!}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots2\cdot1}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$