預科代数

（試用本）

第一册

清华大学附属中学編

1965.8.

預 科 代 數

(試 用 本)

第 一 冊

附中 002

編　者：清華大学附屬中学
排印者：清 華 大 学 印 刷 厂
發行者：清華大学印刷厂發行組

印 数：450　　定 價：0.80 元

目　录

第一章　近似計算

第二章　排列　組合　二項式定理

第三章　概率計算初步

第四章　不等式

第五章　行列式初步

第一章　近似計算

§1.1　为什么要学习近似計算

在度量工作中，度量的结果常是近似数．例如，度量得黑板的长度为 2.861 米，寬度为 1.013 米，它们都是近似数．利用这些数据計算黑板的面积，所得结果当然也是近似数．

在解决实际問題时，有时近似数比准确数更切合实用．例如，要在一块大鋼板上切下一块面积为 2 平方米的圓形鋼板，圓的半径应是$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$米，$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$是一个准确数，但要实际切下圓形鋼板时，我们一定要先算出$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$米的近似值 0.798 米，这样才便于量出半径、画出圆形、进行切割．

在日常生活中，近似数也是很有用的．例如：北京市今年参加国庆游行的队伍約有 50 万人；我们学校約有学生 2 千人；我校每天参加体育鍛鍊的学生的百分比約是 95%，这些近似数都簡单而明确地說明了实际情况．

在物理实驗中，在几何、三角、代数的計算問題中，我们也常遇到近似計算的問題．

由此可見，学习近似計算是十分重要的．

在学习近似計算过程中，应該注意三个問題：第一，近似計算要达到合理的精确度．近似計算的精确度太差，就会达不到实际問題的要求，近似計算的精确度太高，就会白白浪費許多时間，在实际工作中还会造成国家财产的巨大浪費．第二，要踏踏实实地进行数字計算，書写整潔、不怕麻煩、不出錯誤，計算后要再估算一下，避免严重的差錯．第三，要善于运用計算工具，明确地知道，我们的四位数学用表中有哪些內容，用計算尺能解决什么样的計算

問題.

§ 1.2 四舍五入法

将一个准确数的某一个数位以后的部分进行四舍五入，我们就得到一个近似数. 例如，对于准确数 362.749进行四舍五入，精确到 0.01 的近似数是 362.75，精确到 0.1 的近似数是 362.7，精确到1 的近似数是 363，精确到 10 的近似数是 36_0，（个位上的 0 写得小一点，这說明，在个位上已进行了四舍五入，这个 0 只起填补空位的作用）.

对一个准确数进行四舍五入时，所謂精确到某一个数位，就是說，对于这个数位以后的部分进行四舍五入. 根据这个规定，当我们看到一个由四舍五入法得到的近似数 a，我们就可以知道准确数 A 在什么范围內. 例如，已知 $a=362.7$ 是一个由四舍五入法得来的近似数，我们就知道近似数 a 精确到 0.1，准确数 A 在 362.65 与 362.75 之間. 已知 $a=36_0$ 是一个由四舍五入法得来的近似数，我们就知道近似数 a 精确到 10，准确数 A 在 355 与 365 之間.

应該注意下面两个关于近似数的写法問題.

第一、把准确数 5.403 四舍五入精确到 0.01，所得近似数是 5.40，我们不能把末尾的 0 去掉而写作 5.4. 因为近似数 5.40 表明它精确到 0.01，它的准确数在 5.395 与 5.405 之間，而近似数 5.4 表明它精确到 0.1，它的近似数在 5.35 与 5.45 之間.近似数 5.40 与近似数 5.4 的精确程度不同，不能将它们混同起来.

第二、把准确数 3704 四舍五入精确到 10,所得近似数是 370_0，这里，十位上的 0 表示了一定的精确度，而个位上的 0 只起填补空位的作用，应該写得小一点. 不要把这个近似数 370_0 写成 3700，因为近似数 3700 表示它精确到 1. 为了避免近似数 370_0 中两个不同的 0 在書写上的麻煩，我们常把近似数 370_0 写成 3.70×10^3 这样就可以把填补空位的 0 略去不写了.

习　　題

1.1　把下列各数四舍五入精确到 0.001，并将所得结果写成带一位整数的小数与 10 的整数次幂的乘积的形式：

$$0.02836,\quad 38.75449,\quad 0.0055,\quad 0.5995.$$

1.2　把下列各数四舍五入精确到1000，并将所得结果写成带一位整数的小数与 10 的整数次幂的乘积的形式：

$$1023440,\quad 6083.56,\quad 99982.$$

△1.3　利用四位数学表或計算尺求下列各数的近似值，精确到 0.01.

$$\frac{43}{27},\quad \frac{1}{1.79},\quad \lg 126,\quad \cos 76°,\quad \sqrt{0.29},$$

$$0.84^3,\quad \frac{\pi}{4}\times 1.56^2,\quad 2.74\pi,\quad \lg\operatorname{tg} 70°,\quad 10^{\sqrt{2}}.$$

1.4　每一个瓶子能装 $300C.C.$药水，从藥房取回$1000C.C.$藥水要用几个瓶子？ 鉄絲长 129 寸，从这根鉄絲上截取 5 寸长的鉄絲，問能截取多少根？买一斤油要付 0.84 元，問买 4 大两油要付多少錢？（由这个习題可以看出，四舍五入法并非永远可用的，在实际問題中，有时要用收尾法，有时也要用去尾法）.

*1.5　将正的小数 N(包括带有整数部分的小数与純小数）写成带一位整数的小数与 10^n（n 为整数）的乘积的形式时，試研究一下冪指数 n 的規律性．明确这規律后，試再研究一下这个冪指数 n 与 $\lg N$ 的首数有什么关系？为什么？

§ 1.3　絕对誤差　絕对誤差界

对于准确数 A 与它的近似数 a，我們称 $|a-A|$ 为近似数 a 的絕对誤差.

例如，学校生产小組制造了 1000 个鉄皮圓規，成本費是 173

元，那么，每个圓規的成本是 0.173 元．向同学们出售圓規时，以 0.17 元算作成本．0.17 元是一个近似数，它的絕对誤差是

$$|0.17-0.173|=0.003\ (\text{元}).$$

当近似数 a 具有单位时，絕对誤差也是具有单位的，它的单位与准确数、近似数的单位相同．

在很多具体情况中，我们只知道近似数 a 而不知道准确数 A，这时，絕对誤差就无法算出．例如，用米尺量得黑板的长度是 0.8814 米，这是一个近似数，由于黑板长度的准确数是未知的，我们就无法算出这个近似数的絕对誤差．但是，我们还是可以設法估計絕对誤差的范围．就上面这个例子来說，如果米尺上具有毫米刻度，那么，近似数 0.8814 米中，前面三个数字是可靠的，而最后一个数字是用目測估計出来的，近似数 0.8814 米的絕对誤差大致不会超过 0.2 个毫米，即 0.0002 米．

对于准确数 A 与它的近似数 a，如果 $|a-A|\leqslant\delta$，我们称 δ 为近似数 a 的絕对誤差界．（亦称絕对誤差限，在工程技术中，也攏統地称为絕对誤差）．

当近似数具有单位时，絕对誤差界也具有相同的单位．

很明显，如果某一正数 δ 是近似数 a 的絕对誤差界，那末，任何大于 δ 的数都可以当作近似数 a 的絕对誤差界。在实用中，我们总是选用尽可能小、且較簡单的正数作为絕对誤差界．

对于由四舍五入法得来的近似数 a，如果我们不知道准确数 A，也容易看出它的絕对誤差界．例如，3.76 是一个由四舍五入法得到的近似数，由于准确数在 3.755 与 3.765 之間，立即可知这个近似数的絕对誤差界是 0.005．一般說来，如果 a 是由四舍五入法得来的精确到某一数位的近似数，那么，a 的絕对誤差界就是这个数位的半个单位．

我们經常用 $a\pm\delta$ 来表示：近似数 a 的絕对誤差界是 δ，也就是說，准确数 A 在 $a-\delta$ 与 $a+\delta$ 之間．

例如，鉄皮圓規的成本为 0.17 ± 0.005 元，这表示，0.17 元

是一个近似数，它的絕对誤差界是 0.005 元， 也就是說，成本的准确数 A 在 0.165 元与 0.175 元之間．也就是說， 0.17 元是一个由四舍五入法得来的、精确到 0.01 元的近似数．

例如， 計算尺的 C 尺上讀得 4.53 ± 0.01， 这表示 4.53 是一个近似数，它的絕对誤差界是 0.01．

例如，做一批机器另件，規定长度为 2.17 ± 0.02 厘米，这就是說，凡是长度在 2.15 厘米与 2.19 厘米之間的机器另件都是合格品，它們的长度都可以近似地用 2.17 厘米来表示．

§ 1.4 有效数字

一个近似数的絕对誤差，如果不超过它最末一个数位的半个单位，那么，这个近似数从左边第一个非零数字起到末位数字止，所有的数字都叫做这个近似数的有效数字．

由此可知，对于一个由四舍五入法測得的近似数，从左边第一个非零数字起到末位数字止，所有数字都是这个近似数的有效数字．例如，2.205×10^{-3} 即 0.002205 有四个有效数字 2,2,0,5；2.60×10^{4} 即 260_{00} 有三个有效数字 2，6，0（前者的絕对誤差界是 0.0005×10^{-3}，后者的絕对誤差界是 0.005×10^{4}）．

应該注意，在不同的場合，有效数字具有不同的含义．例如，在計算尺的 C 尺上， 讀出 4.53 ± 0.01， 我們仍認为这个讀数具有三个有效数字，这里，只能按“絕对誤差不超过末一个数位的一个单位”来理解．对于不同意义的有效数字，我們經常在近似計算中不加区別而混同地予以使用．其所以要混同使用，原因有二：第一，以后講到的近似計算規則都是“大概”适用的規則，并不是絕对无誤的規則，混同地使用不同意义的有效数字，在实用上大致也不会出差錯．第二，混同地使用可以使近似計算簡单化，否則，数学表上的数字、計算尺上的讀数、以及其他实驗数据都要区別对待，近似計算就太煩瑣了．

§ 1.5　相对誤差相对誤差界

某甲度量长約1米的一段鋼材，量得结果的絕对誤差为 0.01 米，某乙度量长約5米的一段鋼材，量得结果的絕对誤差也是0.01米．虽然他们的测量结果的絕对誤差都是 0.01 米，但对甲来說，絕对誤差約佔所量鋼材长的 1%，而对乙来說，絕对誤差約佔所量鋼材长的 0.2%．由此可知，要比較甲乙二人的度量结果的好坏，不能只看絕对誤差的大小，还要看絕对誤差对于所度量的量本身所佔百分数的大小．

对于准确数 A 与它的近似数 a $(a>0)$，我们称 $\frac{|a-A|}{a}$ 为近似数 a 的相对誤差．如果 $\frac{|a-A|}{a}\leqslant\delta^*$，我们称 δ^* 为近似数 a 的相对誤差界．（亦称相对誤差限，在工程技术中，也攏統地称为相对誤差）．

也可以将 $\frac{|a-A|}{A}$ 規定为近似数 a 的相对誤差，但准确数 A 常是未知的，这种規定就不便于計算相对誤差界．实际上，$|a-A|$ 与 A 或 a 相比是一个很小的数，$\frac{|a-A|}{A}$ 与 $\frac{|a-A|}{a}$ 的差也極为微小．

記近似数 a 的絕对誤差界为 δ，由于

$$\frac{|a-A|}{a}\leqslant\frac{\delta}{a},$$

$\frac{\delta}{a}$ 就可以用作近似数 a 的相对誤差界 δ^*，故得常用的公式

$$\frac{\delta}{a}=\delta^*.$$

相对誤差与相对誤差界經常用百分数来表示．在实用上，这个百分数只要算出一两个有效数字就足够了．很明显，相对誤差与相对誤差界都是不具单位的数量．

例 1. 某人民公社今年的棉花产量約为 38.4 万斤. 这个近似数是由四舍五入法得来的。问这个近似数絕对誤差界相对誤差界各是多少? 问这个近似数有几个有效数字?

解: 这个近似数的絕对誤差界是

$$\delta=0.05 \text{ 万斤}.$$

相对誤差界是

$$\delta^*=\frac{0.05}{38.4}=\frac{0.05}{38.4}\times 100\%=\frac{5}{38.4}\%\approx 0.2\%.$$

(最后一步, 我們采用了收尾法, 这是为了保証相对誤差总不得超过相对誤差界).

由于近似数 38.4 万斤的絕对誤差界是 0.05 万斤, 近似数 38.4 万斤具有三个有效数字.

例 2. 制造一根車軸, 規定长度为 135±1 厘米, 问合格品的长度应在什么范围内? 制造这根車軸所容許的相对誤差界是多少?

解: 合格品的长度应在 135−1 厘米与 135+1 厘米之間, 即在 134 厘米与 136 厘米之間.

所容許的絕对誤差界是 $\delta=1$ 厘米, 故得所容許的相对誤差界为 $\delta^*=\frac{1}{135}=\frac{100}{135}\%\approx 0.8\%$.

例 3. 已知近似数 11.2, 1.12, 0.0112 都具有三个有效数字, 近似数 11, 1.1, 0.011 都具有两个有效数字, 試求它們的相对誤差界.

解: 記 $a_1=11.2,\quad a_2=1.12,\quad a_3=0.0112.$

a_1 的絕对誤差界 $\delta_{a_1}=0.05.$

a_1 的相对誤差界 $\delta^*_{a_1}=\frac{0.05}{11.2}=\frac{5}{11.2}\%\approx 0.5\%.$

同理, $\delta_{a_2}=0.005,$

$$\delta^*_{a_2} = \frac{0.005}{1.12} = \frac{0.5}{1.12}\% \approx 0.5\%.$$

同理， $\delta_{a_3}=0.00005$,

$$\delta^*_{a_3} = \frac{0.00005}{0.0112} = \frac{0.005}{0.0112}\% \approx 0.5\%.$$

記 $b_1=11$, $b_2=1.1$, $b_3=0.011$.

同样可以求得 $\delta_{b_1}=0.5$, $\delta_{b_2}=0.05$, $\delta_{b_3}=0.0005$.

$$\delta^*_{b_1} = \delta^*_{b_2} = \delta^*_{b_3} \approx 5\%.$$

由例 3 可以看出，近似数的有效数字个数愈多，相对誤差界就愈小．对于有效数字个数相同且有效数字本身也相同时，不論小数点在什么位置，相对誤差界总是相同的．

三个有效数字的近似数 100 的相对誤差界是 0.5%，三个有效数字的近似数 999 的相对誤差界是 0.05%， 由此可見，任何具有三个有效数字的近似数（不管小数点在什么位置）的相对誤差界总在 0.05% 与 0.5% 之間．这样小的相对誤差界，在一般的工程问题中都是可容許的．因此，在工程问题的近似計算中，一般采用三个有效数字的近似数就已經足够了．

在 25 厘米长的計算尺上，一般讀数都有三个有效数字．因此，在工程问题的近似計算中，計算尺是旣方便又切实用的計算工具．

习　　題

1．6　对准确数 0.08196 公斤进行四舍五入，精确到 0.0001 公斤．并将结果写成带一位整数的小数与 10 的整数次幂的乘积的形式．这个近似数有几个有效数字？它的絕对誤差、相对誤差各是多少？

1．7　下列各数都是通过四舍五入法得来的近似数，它們的絕对誤差界、相对誤差界各是多少？它們各有几个有效数字？

34，　68.0，　68.00，1.36×10^5，　8.05×10^{-3}．

1．8　制造一个另件，規定重量为 450 克，容許的相对誤差界是 0.3%．问合格品的重量应在什么范围內？

*1．9　对于具有三个有效数字的近似数 6.17，它的第一个有效数字是 6，它的相对誤差界的計算过程是：

$$\frac{0.005}{6.17}=\frac{0.5}{6.17}\%\leqslant\frac{0.5}{6}\%\approx0.09\%$$

所求相对誤差界是 0.09%．按照同样的方法，試填写下列說明有效数字个数、第一个有效数字与相对誤差界的关系的表格

相对誤差界% ＼ 第一个有效数字 ＼ 有效数字的个数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2									
3						0.09			

1.10　用算尺計算：　3.68π，$\dfrac{0.0854}{\pi}$．

1.11　用算尺計算　$\dfrac{\pi}{4}\times15.2^2$．試用在 A、B 尺上进行乘法来計算．

1.12　用算尺計算　$\dfrac{23.8\times0.0876}{5.37}$．(1) 先估計一下答案大概是多少．(2) 先乘后除好还是先除后乘好？

1.13　用算尺計算　$\dfrac{18.3\times0.00578}{0.0294}$，$\dfrac{38.7\times21.4}{77.5\times683}$．

1.14　用算尺計算 2×4 时，先把 C 左 1 放在 $D2$ 上，于是，对 $C4$ 在 D 上讀出乘积 8．这时，对 $CF4$ 也能在 DF 上讀出 8 来．为什么会有这种現象？

1.15　用算尺計算：$\frac{4\times9}{3}$，$\frac{3.58\times0.830}{24.2}$，$\frac{456\times113}{0.765}$．

§ 1.6　近似数的加减法

我们来看四个近似数 1.458、65.3、6.819、74 相加的豎式：

$$
\begin{array}{r}
1.458\\
65.3??\\
6.819\\
+)\ \underline{74.???}
\end{array}
$$

豎式里的“？”表示不能确定的数字．由于第四个近似数 74 只精确到个位，个位以后的数字就不能确定，从而所得的和从个位以后的数字起也都是不能确定的．这就是說，和也只能精确到个位．

因此，已知的近似数相加时，精确度最低的已知数精确到哪一数位，和也只能精确到这一数位．

具体做加法时，应先确定所求的和能精确到哪一个数位，然后对已知数进行四舍五入，保留到这个数位的下一位，再进行加法，加好后，对末一位数再进行四舍五入就得到所求的结果．

象上面举的例子，首先明确所求得的和只能精确到个位，然后对加数进行四舍五入，保留到十分位，再进行加法，

$$
\begin{array}{r}
1.5\\
65.3\\
6.8\\
+)\ \underline{74}\\
147._{6}
\end{array}
$$

对于所求得的和 $147._{6}$，将十分位进行四舍五入，得到结果

148. 将这个計算过程用横式来表示：

$$1.458+65.3+6.819+74\approx 1.5+65.3+6.8+74$$

$$=147._6\approx 148.$$

对于近似数的减法，情况也相仿．

总起来說，对于近似数的加减法，要先确定計算结果能精确到那一个数位．

例 1. 計算 $0.075-0.001263$.

解： 可以看出，計算结果只能精确到千分位．故有

$$0.075-0.001263\approx 0.075-0.0013=0.073_7\approx 0.074.$$

两个近似数相减，也可把計算过程写得簡单些：

$$0.075-0.001263\approx 0.075-0.001=0.074.$$

例 2. 計算

$$2.09\times10^6+1.84\times10^5+1.41\times10^4-2012.4\times10^3.$$

解：

$$原式=2.09\times10^6+0.184\times10^6+0.0141\times10^6-2.0124\times10^6$$

$$=(2.09+0.184+0.0141-2.0124)\times10^6.$$

括号内的計算结果只能精确百分位，故有

$$原式\approx(2.09+0.184+0.014-2.012)\times10^6$$

$$=(2.28_8-2.01_2)\times10^6=0.27_6\times10^6\approx 0.28\times10^6$$

$$=2.8\times10^5.$$

例 3. 计算 $\pi+\sqrt{2}+\frac{2}{7}$的近似值，精确到 0.1. （π、$\sqrt{2}$、$\frac{2}{7}$都是准确数）．

解： 应該先将各加数写为近似数．由于原题要求计算结果精确到 0.1，我们取各近似数时，应多取一位，即精确到 0.01.

$$\pi+\sqrt{2}+\frac{2}{7}\approx 3.14+1.41+0.29=4.84\approx 4.8.$$

§1.7　近似数的乘除法

我们来看近似数 24.78 与 0.32 相乘的豎式：

```
       2 4 . 7 8 ?
  ×)     0 . 3 2 ?
  ------------------
       ? ?   ? ? ?
     4 9 5   6 ?
   7 4 3 4   ?
  ------------------
```

豎式里的“？”表示不能确定的数字．从具体的计算可以看出，已知数 24.78 有四个有效数字，已知数 0.32 有两个有效数字，积也只有两个有效数字．这就是說，两个已知的近似数相乘时，有效数字个数較少的已知数具有几个有效数字，积也只能具有几个有效数字．这个结果不仅适用于这个具体例子，一般說来，大致也是正确的．

近似数 7.9 除以近似数 24.78 的豎式是：

```
                  0 . 3 2
          --------------------
 2 4 7 8 ) 7 9 ? . ? ?
             7 4 3   4
          --------------------
               5 ?   ? ?
               4 9   5 6
          --------------------
                 ?   ? ?
```

商的有效数字也只有两个．

因此，两个已知的近似数相乘或相除时，有效数字較少的已知数具有几个有效数字，积或商也只能有几个有效数字．

具体做乘法或除法时，应先确定积或商能有几个有效数字，然后对已知数中有效数字个数較多的那一个数进行四舍五入，使它的