



中 華 文 庫

初 中 第 一 集

代 數 學 問 題 解 法 研 究

張 鵬 飛 編

中 華 書 局 印 行



代數學問題解法研究

目 次

第一編 代數式的數值和整式的四則	
第一章 代數式的數值	1
代數式數值計算的研究	1
問題一	3
第二章 整式的加法	3
整式加法的研究	3
1. 一項式加法的研究	
2. 多項式加法的研究	
問題二	7
第三章 整式的減法	8
整式減法的研究	8
1. 一項式減法的研究	
2. 多項式減法的研究	
3. 括號的研究	
問題三	11
第四章 整式的乘法	14
整式乘法的研究	14
1. 一項式乘法的研究	

2. 多項式和一項式乘法的研究	
3. 多項式和多項式乘法的研究	
問題四	17
第五章 整式的除法	19
整式除法的研究	19
1. 一項式除法的研究	
2. 法是一項式除法的研究	
3. 法是多項式除法的研究	
問題五	22
測驗第一	23
第二編 一次方程式	
第一章 一元一次方程式	25
一元一次方程式解法的研究	25
1. 等式的研究	
2. 方程式解法的研究	
3. 一元一次方程式根的研究	
問題六	28
第二章 聯立一次方程式	30
聯立一次方程式解法的研究	30
1. 同值方程式的研究	
2. 方程式解法的研究	
代入法 加減法 等置法	

3. 聯立一次方程式根的研究	
問題七	35
第三章 一次方程式應用問題	41
一次方程式應用問題解法的研究	41
1. 應用問題解法的歷程	
2. 方程式根和問題答的關係	
3. 問題不定和不能的研究	
問題八	44
測驗第二	49
第三編 因式分析和約式倍式	
第一章 因式分析的基礎	53
因式分析基礎的研究	53
1. 乘法公式的研究	
2. 二次三項式符號的研究	
第二章 因式分析法	56
因式分析法的研究	6
1. 依乘法公式分析因式的研究	
2. 二次三項式因式分析的研究	
問題九	59
第三章 約式和倍式	64
關於約式性質的研究	64
最高公約式約求法的研究	65

最低公倍式求法的研究.....	67
二式和最高公約式關係的研究.....	70
最高公約式和最低公倍式關係的研究.....	71
問題十.....	72
測驗第三.....	76
第四編 分式和分方程式	
第一章 分式	78
分式四則的研究.....	78
繁分式的研究.....	79
問題十一.....	80
第二章 分方程式	84
分方程式解法的研究.....	84
聯立分方程式解法的研究.....	86
問題十二.....	87
測驗第四.....	91
第五編 二次方程式	
第一章 冪和根	93
冪的研究.....	93
根的研究.....	94
相似根的研究.....	95
分母有理化的研究.....	96

計算法的研究	96
$\sqrt[n]{A}$ 和 $\sqrt[m+n]{B}$ 大小比較的研究	99
問題十三	99
第二章 一元二次方程式	104
一元二次方程式解法的研究	104
問題十四	106
虛數的研究	108
一元二次方程式根的研究	109
問題十五	110
第三章 聯立二次方程式	112
聯立二次方程式解法的研究	112
代入法 加減法 因式法 公約式法 補助式法	
問題十六	121
第四章 二次方程式應用問題	125
二次方程式應用問題解法的研究	125
問題十七	127
測驗第五	130
第六編 比和比列	
第一章 比	134
比率計算的研究	134
連比計算的研究	135

應用問題解法的研究	136
問題十八	136
第二章 比例	138
比例定理的研究	138
比例解法的研究	140
1. 求值的研究	
2. 證明的研究	
應用比例解方程式的研究	143
比例中項的研究	144
問題十九	145
第三章 比例的應用	148
單比例的研究	148
複比例的研究	150
配分的研究	152
混合的研究	153
問題二十	155
測驗第六	157
附錄 測驗的答或略解	159

代數學問題解法研究

第一編

代數式的數值和整式的四則

第一章

代數式的數值

代數式數值計算的研究

數值計算，算式最要整齊，要清楚簡單，才不容易錯誤，錯時也易查出，不致枉費許多工夫！

例一 設 $x = -.2$ ，求 $x^3 - 8x^2 + 2x + 5$ 的值！

[解] 這式是 x 的三次式，宜如下求數值。

$$x^3 = (-.2)^3 = -.008$$

$$-8x^2 = -8 \times (-.2)^2 = -.80$$

$$2x = 2 \times (-.2) = -.4$$

$$5 = \frac{5}{5-.728} (+)$$

$$= 2.272$$

答 4.272。

注意一 若 x 表的數不止一位，如 -1.2 ，宜顛倒前三行的次序。

$$2x = 2 \times (-1.2) = -2.4$$

$$-8x^2 = -8 \times (-1.2)^2 = -8 \times 1.4 = -11.62$$

$$x^3 = (-1.2)^3 = -1.728$$

注意二 式或字母所表的數，都叫他們的數值，也可以叫做他們的值或他們值。又式表數，可做數看；但是有時必須特別注意，如整式並非都表整數，不能看做整數一樣。

例二 設 $a=0$, $b=2$, $c=-1$ 求 $a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3 - (a-b)(b-c)(c-a)$ 的值！

[解] 這式不是一個字母的幾次式，不必仿前法求值。

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 0 \times (2+1)^3 + 2 \times (-1)^3 + (-1) \times (-2)^3 \\ &\quad - (-2) \times (2+1) \times (-1) \\ &= 0 \times 27 + 2 \times (-1) + (-1) \times (-8) - (-2) \\ &\quad \times 3 \times (-1) \\ &= 0 - 2 + 8 - 6 = 0. \end{aligned}$$

答. 0.

例三 設 $x=-3$, $y=4$, $z=5$ 求下式的值！

$$\frac{(x+y)(x-y) - (x+z)(y-z)}{xy + yz + zx}$$

[解] 這式是分式，宜先分求母子的值，

$$\text{子} = (-3+4)(-3-4) - (-3+5)(4-5) = -7+2 = -5.$$

$$\text{母} = (-3) \times 4 + 4 \times 5 - 5 \times (-3) = -12 + 20 + 15 = 23.$$

$$\text{所以全式} = -\frac{5}{23}.$$

$$\text{答. } -\frac{5}{23}.$$

注意 繁複的代數式(沒 $=, >, <$ 等關係說的), 都宜先求部份值, 並不限定分式。

問 題 一

1. 設 $x=1, y=2, z=3, w=4$. 求下各式的值!

$$(1) 2xyzw(x+y+z+w). \quad \text{答. } 480.$$

$$(2) \frac{3z(w^3-z^3)-x}{2w+y} - 10. \quad \text{答. } 23.2.$$

2. 設 $x = -\frac{1}{2}$. 求 $x^3 - x + 1$ 和 $3x^3 - 5x^2 + 8x + 7$ 的值.

$$\text{答. } 1\frac{3}{8}, 1\frac{3}{8}.$$

3. 設 $x=3, y=5, z=7$. 求下式的值!

$$3(x+y+z)^3 - (x^3+y^3+z^3) - xyz. \quad \text{答. } 235.$$

4. 給 n 各正整數的值, 證明下各等式成立!

$$(1) 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(2) 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(3) 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

$$(4) 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2).$$

第 二 章

整式的加法

整式加法的研究

1. 一項式加法的研究

加幾個一項式，可照原式的正負，一一順次接寫，再行整理。

例一 求 x^2 , $-2yx$, y^2 的和！

[解] $x^2 + (-2yx) + (+y^2) = x^2 - 2xy + y^2$ 答. $x^2 - 2xy + y^2$.

例二 求 $\frac{3}{5}a$, $-\frac{2}{3}c$, $-\frac{1}{8}b$ 的和！

[解] $\frac{3}{5}a + (-\frac{2}{3}c) + (-\frac{1}{8}b) = \frac{3}{5}a - \frac{2}{3}c - \frac{1}{8}b$
 $= \frac{3}{5}a - \frac{1}{8}b - \frac{2}{3}c$.

答. $\frac{3}{5}a - \frac{1}{8}b - \frac{2}{3}c$.

例三 求 m^2 , mn , $-mn$, $-n^2$ 的和！

[解] $m^2 + (+mn) + (-mn) + (-n^2) = m^2 + (1-1)mn - n^2$
 $= m^2 + 0mn - n^2$
 $= m^2 - n^2$. 答. $m^2 - n^2$.

2. 多項式加法的研究

加幾個多項式，要看相似項的有無多少，或仿前法或不仿前法。

例一 求 $6x^2 - 8xy + 3y^2$, $5x^2 + 6xy - 10y^2$, $x^2 - y^2$, $2xy - 3y^2$, $y^2 - 5$ 的和！

[解] 各式相似項很多，宜如下求和。

$$6x^2 - 8xy + 3y^2$$

$$5x^2 + 6xy - 10y^2$$

$$x^2 - y^2$$

$$2xy - 3y^2$$

$$\frac{y^2 - 5(+}{12x^2 - 10y^2 - 5}$$

$$12x^2 - 10y^2 - 5$$

答. $12x^2 - 10y^2 - 5$.

注意 各式相似项多的,都宜仿此求和差.

例二 求 $\frac{2}{5}x^2 + 3xy - y^2, 3\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}xy + \frac{2}{3}y^2, \frac{3x^2}{5} - 2\frac{xy}{2}, y^2 - 2yx + x^2$ 的和!

[解] 宜先整理第三式的数碼係數,而後求和.

$$\frac{3x^2}{5} - 2\frac{xy}{2} = \frac{3}{5}x^2 - 2 \times \frac{1}{2}xy$$

$$= \frac{3}{5}x^2 - xy.$$

$$\frac{2}{5}x^2 + 3xy - y^2$$

$$3\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}xy + \frac{2}{3}y^2$$

$$\frac{3}{5}x^2 - xy$$

$$\frac{x^2 - 2xy + y^2(+}{5\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}xy + \frac{2}{3}y^2}.$$

$$5\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}xy + \frac{2}{3}y^2.$$

答. $5\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}xy + \frac{2}{3}y^2$.

注意 一式各项的数碼,都宜盡移項首,合表一數.

例三 求 $\frac{x}{a} - 2\frac{y}{b}, 2\frac{x}{a} - \frac{3y}{b}, \frac{3x}{a} + \frac{y}{b} - 2\frac{z}{c}, 3\frac{y}{b} -$

$\frac{3z}{2c}, -\frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ 的和!

【解】 各式複雜，宜分求各相似項數碼係數的和。

$$\frac{x}{a} \text{ 的係數和 } = 1 + 2 + 3 + (-1) = 5,$$

$$\frac{y}{b} \text{ 的係數和 } = (-2) + (-3) + 1 + 3 + 1 = 0,$$

$$\frac{z}{c} \text{ 的係數和 } = (-2) + \left(-\frac{3}{2}\right) = -3\frac{1}{2}.$$

所以 全和 $= 5\frac{x}{a} - 3\frac{1}{2}\frac{z}{c}.$

答. $5\frac{x}{a} - 3\frac{1}{2}\frac{z}{c}.$

註 數碼係數也可省做係數。

注意 繁複的代數式，都宜分部計算。

例四 求 $3(x-y)^2 + (y+z)^2 - (z-x)^2, (x-y)^2 - (x-y)(y+z), (y+z)^2 + 3(z-x)^2 - 2(x-y)(y+z), 2(z-x)^2 - (x-y)(y+z)$ 的和！

【解】 宜把 $(x-y), (y+z), (z-x)$ 都做一個字母看待，

先求和。

$$(x-y)^2 \text{ 的係數和 } = 3 + 1 = 4,$$

$$(y+z)^2 \text{ 的係數和 } = 1 + 1 = 2,$$

$$(z-x)^2 \text{ 的係數和 } = (-1) + 3 + 2 = 4,$$

$$(x-y)(y+z) \text{ 的係數和 } = (-1) + (-2) + (-1) = -4.$$

所以 全和 $= 4(x-y)^2 + 2(y+z)^2 + 4(z-x)^2 -$

$$4(x-y)(y+z).$$

答. $4(x-y)^2 + 2(y+z)^2 + 4(z-x)^2 - 4(x-y)(y+z).$

注意一 若各式都是同字母的幾次式，宜用分離

係數加法求和。但他們如缺某次項時，須拿 0 來補缺，絕對不能忘記。

注意二 式的一部份，都可看做一個字母或拿一字母代以求簡便。

問 題 二

1. 分求下各組式的和！

$$(1) x^2 + 3x + 2, 3x^2 - 4x - 5, -2x^2 - x - 3.$$

$$\text{答. } 2x^2 - 2x - 6.$$

$$(2) 2a^2 - 2ax + 4x^2, 2a^2 + 3ax - 5x^2, -a^2 - ax - x^2.$$

$$\text{答. } 3a^2 - 2x^2.$$

$$(3) x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2y - x^2z - xyz, y^3 + yz^2 + yx^2 - y^2z - y^2x - xyz, z^3 + zx^2 + zy^2 - z^2x - z^2y - xyz.$$

$$\text{答. } x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

$$(4) -a^4 - 4\frac{1}{4}a^2 - 5\frac{1}{3}a + 2\frac{1}{5}, 2\frac{1}{3}a^4 + 3a - 6\frac{1}{2}, 8\frac{1}{2}a^4 - 6a^3 - 4\frac{1}{3}a^2 + a + 3.$$

$$\text{答. } 4\frac{5}{6}a^4 - 6a^3 - 8\frac{7}{12}a^2 - 1\frac{1}{3}a - 1\frac{3}{10}.$$

2. 設 $z = a - b$, $y = b - c$, $x = c - a$, 證明 $x + y + z = 0$!

3. 化簡下列各式！

$$(1) 3\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{2x}{a} + \frac{2y}{b} + \frac{x}{a} + \left(-\frac{y}{b}\right) + \frac{2y}{b} + \left(-\frac{5}{7}\right) +$$

$$\frac{x}{a} + 2\frac{y}{b}.$$

$$\text{答. } 7\frac{x}{a} + 6\frac{y}{b} - \frac{5}{7}.$$

$$(2) m^2n + \left(-\frac{9}{11}mn^2\right) + m + \left(-\frac{2}{7}m^2n\right) + \frac{5}{11}mn^2 + \left(-\frac{4}{5}m\right).$$

$$\text{答. } \frac{5}{7}m^2n - \frac{4}{11}mn^2 + \frac{1}{5}m.$$

$$(3) 5m + (p+q) + 8m + 2(p+q) - 12m + [-9(p+q)].$$

$$\text{答. } m - 6(p+q).$$

4. 某人旅行：第 1 日乘人力車行 p 里，乘馬車行 q 里，乘腳踏車行 r 里；第 2 日乘人力車行 m 里，乘腳踏車行 n 里；第 3 日乘腳踏車行 m 里，乘馬車行 s 里，乘人力車行 p 里。問這人 3 日的車費多少。但人力車費， a 分 1 里；馬車 b 角 1 里，腳踏車 c 分 1 里。

$$\text{答. } \frac{a(m+2p) + 10b(q+s) + c(m+n+r)}{100} \text{ 圓.}$$

注意 本題三種車費，要用一個單位計算。

$$3 \text{ 日的人力車費} = (ap + am + ap) \text{ 分} = a(m+2p) \text{ 分},$$

$$2 \text{ 日的馬車費} = (10bq + 10bs) \text{ 分} = 10b(q+s) \text{ 分},$$

$$3 \text{ 日的腳踏車費} = (cr + cn + cm) \text{ 分} = c(m+n+r) \text{ 分},$$

第三章

整式的減法

整式減法的研究

1. 一項式減法的研究

一式減一項式，可反一項式的正負，改減做加。

例一 從 $5x^2 - 3x + 1$ 減去 $-3x^2$!

$$\begin{aligned}
 \text{[解]} \quad 5x^2 - 3x + 1 - (-3x^2) &= 5x^2 - 3x + 1 + (+3x^2) \\
 &= 5x^2 + 3x^2 - 3x + 1 \\
 &= 8x^2 - 3x + 1. \quad \text{答. } 8x^2 - 3x + 1.
 \end{aligned}$$

例二 化簡 $7ax + 3by - (-2ax) - (+2y) - (-ax) - (+by)$!

$$\begin{aligned}
 \text{[解]} \quad 7ax + 3by - (-2ax) - (+2by) - (-ax) - (+by) \\
 &= 7ax + 3by + 2ax - 2by + ax - by \\
 &= 7ax + 2ax + ax + 3by - 2by - by \\
 &= 10ax. \quad \text{答. } 10ax.
 \end{aligned}$$

2. 多項式減法的研究

一式減多項式,可反多項式各項的正負,改減做加.

例一 從 $x^2 - 2ax + a^2$ 減去 $x^2 + 2ax + a^2$!

$$\begin{aligned}
 \text{[解]} \quad x^2 - 2ax + a^2 \quad x^2 - 2ax + a^2 \\
 \underline{x^2 + 2ax + a^2 (- \text{ 或 } -x^2 - 2ax - a^2 (+} \\
 -4ax \quad -4ax \quad \text{答. } -4ax.
 \end{aligned}$$

例二 從 $5ax^3 + 2bx^2y - xy^2 + cy^3$ 減去 $3ax^3 - 2bx^2y + axy^2 - by^3$!

$$\begin{aligned}
 5ax^3 + 2bx^2y - xy^2 + cy^3 \\
 \underline{3ax^3 - 2bx^2y + axy^2 - by^3 (-} \\
 2ax^3 + 4bx^2y - (1+a)xy^2 + (b+c)y^3
 \end{aligned}$$

$$\text{答. } 2ax^3 + 4bx^2y - (1+a)xy^2 + (b+c)y^3$$

$$\text{注意 } -xy^2 - (+axy^2) = -1xy^2 - axy^2 = -(1+a)xy^2,$$

$$cy^3 - (-by^3) = cy^3 + by^3 = (b+c)y^3,$$

上是 xy^2 的兩個相似項，下是 y^3 的兩個相似項，而 -1 ， $+a$ ， $+c$ ， $-b$ 是他們的數碼係數或字母係數。

3. 括號的研究

(1) 括號前有 $+$ 的，可以直接去掉。

例 去 $2x - y + (3x - y + 5)$ 的括號

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad 2x - y + (3x - y + 5) &= 2x - y + 3x - y + 5 \\ &= 5x - 2y + 5. \end{aligned} \quad \text{答. } 5x - 2y + 5.$$

(2) 多項式的任意幾項，可以直接放在前有 $+$ 的括號之內。

例 把 $3x - 2y + 5$ 的末兩項，放在前有 $+$ 的括號之內！

$$\text{[解]} \quad 3x - 2y + 5 = 3x + (-2y + 5). \quad \text{答. } 3x + (-2y + 5).$$

(3) 括號前有 $-$ 的，須先反號內各項的正負，而後可以去掉。

例 去 $2x - y - (3x - y + 5)$ 的括號。

$$\begin{aligned} \text{[解]} \quad 2x - y - (3x - y + 5) &= 2x - y - 3x + y - 5 \\ &= -x - 5. \end{aligned} \quad \text{答. } -x - 5.$$

(4) 多項式的任意幾項，須先反他們的正負而後，可以放在前有 $-$ 的括號之內