

北京广播函授学校

高 中 班

平面几何复习讲义

目 录

总說明.....	1
第一部分 直綫图形.....	8
一 直綫、射綫、綫段.....	8
二 两条直綫的位置关系.....	12
三 三角形.....	18
四 四边形.....	33
五 多边形.....	45
第二部分 圓.....	51
一 圓的概念和性质.....	51
二 点、綫与圓以及两圓間的位置关系.....	52
三 角和圓的关系.....	54
四 圓和多边形的关系.....	54
五 圓的度量.....	56
第三部分 軌迹和作图.....	70
一 軌迹.....	70
二 作图題.....	72

总 說 明

同學們在中学里已經学過平面几何和立体几何，它們总称为初等几何，是研究平面图形和空間图形的形状、大小以及相互位置关系的一門学科。在进行各种建設工作中，例如规划耕地、兴修水利、制造生产用具和生活用具、建設厂房和住房、修造桥梁和隧道、鋪設鉄道等等，都要根据客观条件和实际需要先进行測量和設計，画好图样，然后按照图样施工，这样就要接触到許多图形。此外，我們在学习数学、物理、科学技术以及从事科学研究时，也都要接触到許多图形。所以，我們要参加伟大的社会主义建設，就必须很好地掌握图形的性质和运用这些性质来解决实际問題的技能。因此复习好几何对今后进一步学习和工作都具有重大的意义。

图形的形状、大小以及相互位置关系是几何研究的中心問題。如果我們仔細分析一下，就会知道在几何里所学过的公理、定义和定理都是圍繞图形的这些性质而提出的。例如联綫公理（过任意两点可以引一条直接，并且只能引一条直綫）、移形公理（几何图形可以在空間移动而不改变它的形状和大小）和平行公理（过已知直綫外的一个已知点，只能引一条直綫和已知直綫平行）；圆的定义（和一个已知点的距离等于定长的点的軌迹）和相似多边形的定义（在两个边数相同的多边形中，如果各角对应相等，并且对应边成比例）等；三角形的内角和等于 $2d$ 、直角三角

形的斜边中点到三个顶点的距离相等、直角三角形斜边的平方等于其他两条直角边的平方和以及分三角形的两边成比例的直线平行于这三角形的第三边等定理，无一不是描述图形或图形元素(点、边、角等)之间的形状、大小以及相互位置关系的。

几何图形的性质主要分为两类：第一类是关于图形形状和位置关系的，例如圆的外切平行四边形是菱形等；第二类是关于图形大小的度量的，例如线段或弧的长度、多边形和圆的面积等，这类性质一般是用数来表示量的。

几何图形有很多性质，比较起来其中有一些是更基本的，其余的则是可以用逻辑推理的方法推证出来的。我们用更基本的性质来定义图形，把其他的性质作为定理。例如“对边平行的四边形叫做平行四边形”是定义，“平行四边形的对角线互相平分”是定理。这里“对边平行”是平行四边形性质中的最基本的，“对角线互相平分”可以从“对边平行”推证出来。在复习几何时，我们必须认清定义和定理之间的这种关系，首先要记住每一个图形的定义，再进而复习图形的其他性质(即定理)，这样才能运用它们来解决問題。

研究图形的性质是采用逻辑推理的方法——演绎推理和归纳推理，演绎推理是从已被公认为正确的命题出发，经过推理来肯定一个特殊命题的结论，是从一般到特殊的推理。几何里基本是采用这种推理的方法。归纳推理是从个别的或者特殊的前提出发而得出一般的结论，是从特殊到一般的推理，几何里用这种推理方法进行论证的较少。

几何是逻辑性很强的一门学科，它是在几个公理的基础上，用定义和定理的形式把几何图形的性质一个一个依照逻辑

推理的順序排列起來的，這就是說，新的概念都要由已有的概念來解釋，後面的定理都要由公理、定義和它前面的定理來論證。因為定義新概念時，只有用已有的概念來解釋，概念才具有精確的含意；證明後面的定理時，只有用它前面的定理為依據，定理才具有嚴格的證明。這樣，幾何就形成了兩大系統，即定義系統和定理系統。因而定義的精確性和論證的嚴格性就成了幾何的兩大特點。

用定義明確幾何圖形的每一個概念時，不能引用尚未被定義的概念，例如，在定義綫段以前如果這樣定義直綫“把綫段向兩端引伸就成直綫”，就犯了引用尚未被定義的概念的錯誤；又記憶定義時，不要和公理定理混淆，例如對等腰三角形如果這樣定義“凡三角形一個頂角的平分綫垂直於底邊就是等腰三角形”，就犯了定義和定理混淆的錯誤。這些都是邏輯性的錯誤。此外，在給出定義時，還要防止循環定義的錯誤，即不能在用甲概念定義乙概念後，反過來又用乙概念定義甲概念。例如：假若我們用“直綫的部分叫做綫段”來定義綫段，又用“將綫段向兩端無限延長就是直綫”來定義直綫，這樣就既沒有說明什麼是綫段也沒有說明什麼是直綫。與此類似，在推理時要防止循環論證的錯誤。所謂循環論證就是在用甲定理證明乙定理後，反過來又用乙定理證明甲定理，例如：兩條平行綫被一條直綫所截，如果用內錯角相等證明同位角相等，又反過來用同位角相等證明內錯角相等就是循環論證。循環論證的錯誤是容易理解的，試看上面所舉的例子，假如內錯角相等是已經被證明的了，當然可以用它來證明同位角相等，但這說明：沒有內錯角相等就沒有同位角相等，又怎能反過來用同位角相等來證明內錯角相等呢？

这样就突出了一个问题，学习几何必须注意定义和定理的前后顺序。

那么依次将定义系统里的定义和定理系统里的定理分别按前后的顺序排列起来，排列在后边的定义和定理只能依靠排列在它们前边的定义和定理来解释和证明，试问对排在最前的一个定义和定理又怎样解释和证明呢？事实上，排在最前的几个定义所描述的概念，和排在最前的几个定理所论证的内容都是最简单的，对它们不需要再给予任何描述和证明，人类在实践中对它们早有了明确的认识，在反复检验中早肯定了它们是真理，因此在几何的两大系统里，对最初的一些概念（象点，线，面，体）不给予定义，称为原始或基本概念，对最初的少数定理不加证明称为公理。几何学象这样从原始概念和公理出发，通过论证步步发展，形成独立的科学，有了一定的实用价值，正符合于“实践—理论—实践”的唯物主义观点。

公理、定义和定理总称为数学命题。命题包括条件（或者叫前题）和终结（或者叫结论）两个部分。由一个命题可以推衍出来与它对应的三个其他命题，即逆命题、否命题和逆否命题。连同原命题一起，这四个命题可以列成下表：

原命题：若有条件 A 则有终结 B (I)

逆命题：若有条件 B 则有终结 A (II)

否命题：若没有条件 A 则没有终结 B (III)

逆否命题：若没有条件 B 则没有条件 A (IV)

从这个表中可以看出上列四种命题之间有如下的关系：
I 与 II、III 与 IV 是互逆的，I 与 III、II 与 IV 是互否的，I 与 IV、II 与 III 是互为逆否的。

很明显，一个命题的逆否命题就是它的逆命题的否命题，也就是它的否命题的逆命题

逻辑学告诉我们，原命题和逆否命题是等效的，就是说，如果原命题正确，其逆否命题也正确，反过来，如果逆否命题正确，其原命题也正确，同样，逆命题和否命题也是等效的。因此要想断定这四个命题全部正确，并不需要分别把每一个命题加以证明，只要证明(I)和(IV)中的一个以及(II)和(III)中的一个是正确的就可以了。

在这里我们必须注意，从一个命题的正确性并不能断定它的逆命题或否命题也是正确的。例如“如果两个角是对顶角，那么这两个角相等”这个命题是正确的，但它的逆命题“如果两个角相等，那么这两个角是对顶角”和否命题“如果两个角不是对顶角，那么这两个角不等”就不正确了。因此，在证明了一个定理之后，就认为这个定理的逆命题或否命题也正确，这个想法是十分错误的。

和四种命题的是否同时正确这个问题有密切联系的是关于充分条件与必要条件的讨论。如果具有条件 A ，就能证出终结 B ，我们就说条件 A 是获得终结 B 的充分条件；如果没有条件 A ，就不能证出终结 B ，我们就说条件 A 是获得终结 B 的必要条件。如果条件 A 是终结 B 的充分条件，同时也是它的必要条件，我们就说条件 A 是获得终结 B 的充要条件。因此要想证明条件 A 是终结 B 的充分条件，只要证明“若有条件 A 则有终结 B ”就可以了，要想证明条件 A 是终结 B 的必要条件，只要证明逆命题“若有条件 B 则有终结 A ”或否命题“若没有条件 A 则没有终结 B ”就可以了。如果两种情况都得到证明，我们就证明了

条件 A 是終結 B 的充要条件。

充要条件是用“当，仅当”，“必須，并且只須”这样的詞句来叙述的。例如：“当，仅当三角形的二边相等时，它們所对的角相等”，这里的条件“三角形的二边相等”，就是終結“它們所对的角相等”的充要条件。以后遇到这样命题，必須分別証明所給条件是充分和必要的；见到这样定理，就說明原定理的逆命题，否命题和逆否命题都是正确的，因而在証題或解題时都可以作为定理引用。

根据以上对于几何本质的概括介紹可以看到，学习几何的主要目的是学会邏輯推理，和能用几何知識解决有关图形的具体問題。因此作为练习，有两种习题是主要的，就是証明題和計算題。作証明題，前边已經提到，一般是用演繹法从題設的条件出发，引用定理推出求証的終結。推理的过程要完整，要簡捷，步步有理論的根据；表达的語言要簡單，要明确，层次分明，不使有科学性的錯誤。作計算題要注意問題里的証明因素，例如求图形中某点到某綫的距离，很明显这是求綫段长度的問題，但在計算以前先要証明某条綫段的长就是所求的距离。如果忽略計算題里的証明因素，便可能导致錯誤的結果，这一点是很重要的。

想提高証題和解題的能力，首先要明确概念和熟悉定理。例如一个問題涉及两个圓的內公切綫和外公切綫，假若不清楚内外公切綫的概念便无从入手。証一个問題常要連續用好几个定理，如果忘記了其中的某一个，就会使推理时的思路中断。此外必須重視画图，尽量将图画得正确，因为証題或解題时要根据图来探求条件和終結之間的关系，要在图上进行推算。一个不正确的图有增減条件的錯觉，例如：将任意三角形的图画成等腰

三角形，在推論过程中就有可能錯誤地认为三角形的两腰相等因而引用等腰三角形的定理。反之，将等腰三角形的图画成任意三角形，在推理时就看不到等腰三角形的某些因素。而正确的图則有直观的启发作用，使我們根据图的形象能得出論証或解题的方法。对于計算題，图的作用更大。实际上在一个正确的图中，答数已經被画了出来，很可以从图大致看出答数是否正确。例如：在符合于已知条件的图中，一个角近似于 30° ，而計算的結果这个角是 60° ，可以肯定这个答数是錯誤的。

其次是軌迹題和作圖題。軌迹是指“点的軌迹”——在平面內具有某种条件的点集合而成的图形。这个图形可能是点也可能是綫；可能是直綫也可能是曲綫。軌迹有两个重要属性：純粹性和完备性。論証一个图形是具有某种条件的点的軌迹时，应当既証它的純粹性又証它的完备性。前者是証明在图形上的点都具有某种条件，后者是証明具有某种条件的点都在图形上。目前在中学几何里不要求对軌迹問題作严格的証明，但应当根据所学的几何知識，能正确地想出具有所給条件的点的軌迹是怎样的图形。例如我們应当想出：过两个已知点的圓的圆心（点）的軌迹是，連結这两个点的綫段的垂直平分綫；到一个已知圓的距离等于这个圓的半径的点的軌迹是一个点——已知圓的圆心，和一个圓——和已知圓同心，半径等于已知圓的半径的2倍。

两个軌迹交截可以确定一个点，有两个已知点又可以确定一条直綫，所以軌迹交截是尺规作图中經常使用的“定点”方法，现在学习軌迹的主要原因在此。

解尺规作圖題对于几何本身起巩固知識和培养分析能力的

作用，基本作图方法又是以后学习画法几何和制图的基础。严格要求，解作图题除需要画出足以表达作法的图外，还要写出：已知，求作，作法，证明和讨论五个部分。讨论是指出在什么情况下有一个解，两个解……或者无解。轨迹和作图题也是平面几何的重要内容。

基础知识的重要性在几何里是非常突出的，而基础知识中又是有重点的，例如求证两条直线平行，常是通过证明两个角（同位角或内错角）相等而得出结论，而证明两个角相等又常是转化成为证明两个三角形全等的問題。在有关多边形、圆和立体几何以及三角里，很多問題也是归结到，或者应用三角形的知識来进行解决。所以三角形就是几何基础知识之一，并且是基础知识中的一个重点。为了将平面几何的复习工作作好，我們不能舍本求末，下面就依次复习基础知识。

第一部分 直綫圖形

一、直綫、射綫、綫段

1 基本概念 直綫

射綫 在直綫上某一点一旁的部分叫做射綫，它是一端有界另一端无界的。

綫段 直綫上任意两点間的部分叫做綫段，它是两端都有界的。

連結两点的线段的长叫做两点间的距离。

关于直线的公理 过任意两点可以引一条直线，并且只能引一条直线。由此推得：两条直线不能有一个以上的交点。

II 线段的相等和不等，线段的加減

对线段可以进行加法和减法运算，但必须在同一条直线上进行。

III 线段的度量

线段的长度是用数来表示的，就是用某一长度单位来量一条线段所得的量数。

用长度单位来度量线段，必然遇到这条线段和长度单位有无公度的问题。由于被量的线段和长度单位可能有公度，也可能没有公度，因而所得的量数就有各种不同的情况，它们的关系可用下表表示出来：

已知线段 和 长度单位	有公度	最大公度是 长度单位	量数是 正整数	} 正有理数
		最大公度不 是长度单位	量数是 正分数	
	无公度	——	量数是正无理数	} 正实数

IV 线段的比和比例线段

两条线段 a 和 b 的比就是用同一个长度单位来量 a 和 b 所得的量数的比，两条线段的比与所取的长度单位无关。

如果线段 a 和 b 的比等于线段 c 和 d 的比，就是 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，我们就说线段 a, b, c, d 成比例。线段的比和由线段所组成的比例，分别具有数的比和由数所组成的比例的性质。常用的一些性质如下：

1. 比的前项和后项乘以，或除以同一个不等于零的数，比

的值不变。

2. 如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 則 $ad = bc$;

3. 如果 $ad = bc$, 則 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$;

4. 如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 則 $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$; (反比定理).

5. 如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 則 $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$; (更比定理).

6. 如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 則 $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$; (合比定理).

7. 如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 且 $a < b$,

則 $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$; (分比定理).

8. 如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 且 $a > b$,

則 $\frac{a-b}{a-b} = \frac{c-d}{c-d}$ (合分比定理)

9. 如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots$,

則 $\frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots$

V. 折綫

1. 折綫的概念 定义、凹折綫、封閉折綫。(封閉折綫又叫做多边形)

2. 折綫的性质

(1) 連結任意两点的綫段, 小于以这两点为端点的任何一条折綫.

(2) 凸折綫的长小于包围它的任何折綫的长。

例題 按已知比內分或外分一条已知綫段,分点只有一个。

已知: 綫段 AB , $m:n$ 是一定比。

求证: 依 $m:n$ 的比內分或外分 AB 的分点只有一个。

証明: 如果依 $m:n$ 的比

內分 AB , 得到两个分点 C

和 C' , 則分別有

$$AC:CB=m:n; \quad AC':C'B=m:n;$$

于是 $AC:CB=AC':C'B$,

依合比定理,得

$$(AC+CB):CB=(AC'+C'B):C'B,$$

即 $AB:CB=AB:C'B$,

因而 $CB=C'B$,

因此,点 C 和 C' 重合,

故依 $m:n$ 的比內分 AB 的分点只能有一个。

同理 我們可以通得依 $m:n$ 的比外分 AB 的分点也只能有一个。

註: 上題中 C 点在 A, B 之間时叫做內分点, 在 AB 或 BA 的延長綫上时, 叫做外分点。

又上例的証法叫做同一法, 是間接証法的一种。这种証法是首先假定有另一个图形符合于題設条件, 然后証明它和原来題設的图形同一, 这样就証明了原命題是成立的。

复习題一

1. 在一条直綫上有順序的三个点 A, B, C ; 如果 M 是 AC 的

中点, N 是 BC 的中点, 求证: $AB=2MN$.

3. 如果 M 是线段 AB 的中点, P 是 MB 内的任意一点, 求证:

$$1) PM = \frac{1}{2}(PA+PB)$$

$$2) PA^2+PB^2=2AB \cdot PM$$

又 P 点如果是 AB 或 BA 的延长线上的任意点, 上面的结果有什么样的变化?

3. 在一条直线上有顺序的四个点 A, B, C, D ; (1) 如果线段 AB, CD 的中点分别是 M, N , 且 $MN=a, BC=b$, 求 AD 长.

$$(2) \text{ 如果 } \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}, \text{ 求证: } \frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

4. 已知 O 是线段 AB 上的一点, D 是 AB 的延长线上的一点, 且 $AD:DB=AC:CB$; 如果 $AB=6\text{cm}$, $AC=3.6\text{cm}$, 求 AD 和 BD 的长.

5. 内、外分线段 AB 于 P, Q 两点, 已知 $AB=a$, 并且 $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB} = \frac{3}{2}$, 求 PQ 的长.

二 两条直线的位置关系

I. 重合

II. 相交

和两条直线相交有关的知識有:

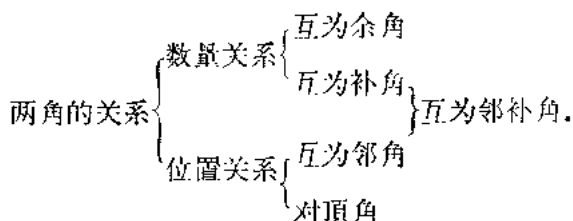
1. 角

(1) 角的定义

(2) 角的相等和不等, 角的加減.

(3) 角的度量.

(4) 两角的关系.



2. 垂线和斜线

(1) 垂线和斜线的定义.

(2) 垂线和斜线的性质:

1) 过一点可以引已知直线的一条垂线, 并且只能引一条垂线.

2) 从直线外的一点到这条直线所引的垂线的长, 小于从这点到这条直线所引的任意一条斜线的长.

从直线外的一点到这条直线所引垂线的长, 叫做从这点到这条直线的距离.

3) 从直线外一点向这条直线引垂线和任意两条斜线:

如果两个斜线足到垂线足的距离相等, 这两条斜线的长相等;

如果两个斜线足到垂线足的距离不等, 斜线足离垂线足较远的斜线较长.

附射影

(1) 点的射影

(2) 线段的射影

线段 AB 和它在直线 l 上的射影 $A'B'$ 之间的长度关系式

为(設 α 是 AB 或其延長綫与 l 的交角):

$$A'B' = AB \cos \alpha.$$

① 当 $\alpha < 90^\circ$ 时, $AB > A'B'$;

② 当 $\alpha = 0^\circ$ 时, $AB = A'B'$, 即 $AB \parallel l$;

③ 当 $\alpha = 90^\circ$ 时, $A'B' = 0$, 即 $AB \perp l$. 这时綫段 AB 在直綫 l 上的射影是一个点.

III. 平行

1. 定义

2. 平行公理 过已知直綫外的一个已知点, 只能引一条直綫和已知直綫平行.

3. 判定方法

(1) 用平行綫的定义判定.

(2) 用判定定理判定.

1) 两条直綫和第三条直綫相交, 如果具有下列条件中的任何一个条件, 那末这两条直綫平行:

① 一組同位角相等;

② 一組内(外)錯角相等;

③ 一組同旁内(外)角的和等于 $2d$;

2) 垂直于同一条直綫的两条直綫互相平行.

3) 平行于同一条直綫的两条直綫互相平行.

4. 性质:

(1) 如果两条平行直綫和第三条直綫相交, 那末:

1) 同位角相等;

2) 内(外)錯角相等;

3) 同旁内(外)角的和等于 $2d$;

(2) 夹在两条平行线间的平行线段相等;

(3) 两条平行线间的距离处处相等;

(4) 两条直线被若干条平行线所截, 那末这两条直线被这些平行线分为成比例的线段, 据此可知, 如果两条直线被若干条平行线所截, 在一条直线上所截出的线段相等, 那末在另一条直线上所截出的线段也相等.

(5) 如果两条平行线被一个线束所截, 那末这两条平行线被这线束分为成比例的线段.

5. 对应边互相平行或垂直的两个角.

(1) 如果一个角的两边与另一个角的两边对应平行, 这两个角相等或互补.

(2) 如果一个角的两边与另一个角的两边对应垂直, 这两个角相等或互补.

例题 点 C 依 $m:n$ 内分线段 AB , 过 A, B, C 引三条平行线, 分别交直线 l 于 A', B', C' , 如果 $AA' = a, BB' = b$; 求线段 CC' 的长.

解 A, B, C 三点和直线 l 所在的位置有三种不同情况.

1. 设 A, B, C 在 l 的同侧.

连接 $A'B$ 交 CC' 于 D .

