齿轮啮合原理

文 集

一九八一年七月

成 都

目　录

齿轮啮合理論数学基础(四)

严志达

（南开大学）

本文*) 討論齿輪啮合的点接触传动中两个基本问题，即：工作线方向和传动比导数问题。我们知道錐齿輪和双曲型齿輪都是属于经过整修的齿輪，因此是非共轭的，所以他们接触运动时是属于点接触的。目前就我们所知本文的結果在形式上是最簡单、最富几何意义的。由此得出一些有意义的結果，例如传动比公式的特例說明了苏联学者李特文的近似啮合理論和Gleason Works的单夹配齿輪是一致的。

§1. 预备知識

首先証明一个引理，它是Rodrique 公式的一个推广。

引理 令$\vec{v}$和$\vec{t}$是一曲面上任一点的两个互垂的切么矢，而且$\vec{t}=\vec{n}\times\vec{v}$，$\vec{n}$为该点曲面的一法么矢，令$\varphi$为任一切线方向与$\vec{v}$的夹角，则$\vec{n}$沿此方向的导數$\frac{d\vec{n}}{ds}$为

$$\frac{d\vec{n}}{ds}=\left(\frac{1}{\rho_v}\cos\varphi+\frac{1}{\tau_v}\sin\varphi\right)\vec{v}+\left(\frac{1}{\rho_t}\sin\varphi+\frac{1}{\tau_v}\cos\varphi\right)\vec{t}.$$

式中$\frac{1}{\rho_v}$, $\frac{1}{\rho_t}$为对应于方向$\vec{v}$, $\vec{t}$的法曲率，$\frac{1}{\tau_v}$为对应方向v的测地挠率.

証 令$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ 为曲面在M处的两个主方向，令$\vec{v}=\cos\lambda\vec{e}_1+\sin\lambda\vec{e}_2$，则 $\vec{t}=-\sin\lambda\vec{e}_1+\cos\lambda\vec{e}_2$.

---

*) 本文是〔1，2〕的继续，一些资料可参考〔1，2〕的参考文献.

令 $\dfrac{d\vec{r}}{ds}$ 为任一给定的方向为

$$\frac{d\vec{r}}{ds}=\cos\theta\vec{e}_1+\sin\theta\vec{e}_2,$$

从 φ 的定义知上面的矢量又可以表为 $\cos\varphi\cdot\vec{v}+\sin\varphi\vec{t}$，因此

$$\varphi=\theta-\lambda. \qquad (1.1)$$

根据 Rodrique 公式

$$\frac{d\vec{n}}{ds}=\frac{1}{\lambda_1}\cos\theta\vec{e}_1+\frac{1}{\lambda_2}\sin\theta\vec{e}_2 \qquad (1.2)$$

其中 $\dfrac{1}{\lambda_1}$，$\dfrac{1}{\lambda_2}$ 是分别对应于 $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$ 的主曲率．将关系（1.1）以及 $\vec{v}$，$\vec{t}$ 代入（1.2）式得

$$\frac{d\vec{n}}{ds}=\frac{1}{\lambda_1}\cos(\varphi+\lambda)(\cos\lambda\vec{v}-\cos\lambda\vec{t})+\frac{1}{\lambda_2}\sin(\varphi+\lambda)(\sin\lambda\vec{v}+\cos\lambda\vec{t})$$

$$=\left[\left(\frac{\cos^2\lambda}{\lambda_1}+\frac{\cos^2\lambda}{\lambda_2}\right)\cos\varphi+\left(\frac{1}{\lambda_2}-\frac{1}{\lambda_1}\right)\sin\lambda\cos\lambda\sin\varphi\right]\vec{v}+\left[\left(\frac{\cos^2\lambda}{\lambda_2}+\frac{\sin^2\lambda}{\lambda_1}\right)\right.$$

$$\left.\sin\varphi+\left(\frac{1}{\lambda_2}-\frac{1}{\lambda_1}\right)\sin\lambda\cos\lambda\cos\varphi\right]\vec{t}.$$

根据 Euler 和 Bertrand 公式即得到

$$\frac{d\vec{n}}{ds}=\left(\frac{1}{\rho_v}\cos\varphi+\frac{1}{\tau_v}\sin\varphi\right)\vec{v}+\left(\frac{1}{\rho_t}\sin\varphi+\frac{1}{\tau_v}\cos\varphi\right)\vec{t}. \qquad (1.3)$$

証毕．

利用这个引理就可以得到方向 $\vec{v}$ 的法曲率

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{d\vec{n}}{ds}=\frac{1}{\rho_v}\cos^2\varphi+\frac{2}{\tau_v}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{1}{\rho_t}\sin^2\varphi, \qquad (1.4)$$

和该方向的测地挠率

$$\frac{1}{\tau}=\left(\vec{n}\times\frac{d\vec{r}}{ds}\right)\cdot\frac{d\vec{n}}{ds}=\left(\frac{1}{\rho_t}-\frac{1}{\rho_v}\right)\sin\varphi\cos\varphi+\frac{1}{\tau_v}(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi). \qquad (1.4)'$$

这两式的証明只要将 $\frac{d\vec{r}}{ds}=\cos\varphi\vec{v}+\sin\varphi\vec{t}$ 以及 $\vec{n}\times\frac{d\vec{r}}{ds}=-\sin\varphi\vec{v}+\cos\varphi\vec{t}$ 代入并利用（1.3）即可。

下面我们还将导出共轭齿面诱导曲率及诱导测地挠率的一些公式，它们不但在本文内要应用，而且也是对其它问题非常有用的。

假定 S_t^1，S_t^2 在瞬时 t 啮合于M的两齿面，$\vec{v}$，$\vec{t}$ 为沿纵向和法向的两么矢，这样（1.4），（1.4）′中的 $\frac{1}{\rho_v}$，$\frac{1}{\rho_t}$ 就表示纵向及法向法曲率，而 $\frac{1}{\tau_v}$ 是纵向测地挠率．这里还假定它们是对齿面 S_t^1 定义的。从（1.4）及（1.4）′就得到诱导曲率和诱导测地挠率．下面是诱导曲率的公式：

$$\frac{1}{\tilde{\rho}}=\frac{1}{\tilde{\rho}}\cos^2\varphi+\frac{2}{\tilde{\tau}_v}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{2}{\tilde{\rho}_t}\sin^2\varphi。\quad(1.4)''$$

根据[1]§7的（7）和（8）可知

$$\frac{1}{\tilde{\rho}}=\frac{1}{\psi}(\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta)^2=\frac{1}{\psi}(\alpha\cos(\varphi+\lambda)+\beta\sin(\varphi+\lambda))^2$$

$$=\frac{1}{\psi}(A\cos\varphi+B\sin\varphi)^2，\quad(1.5)$$

其中

$$A=\alpha\cos\lambda+\beta\sin\lambda,\quad B=-\alpha\sin\lambda+\beta\cos\lambda\quad(1.6)$$

展开（1.5）与（1.4）″ 相比，就得到

$$\frac{1}{\tilde{\rho}_v}=\frac{A^2}{\psi},\quad\frac{1}{\tilde{\rho}_t}=\frac{B^2}{\psi},\quad\frac{1}{\tilde{\tau}_v}=\frac{AB}{\psi}。\quad(1.7)$$

要計标A和B，只要将[1]§7中（7）式代入（1.6）即可。这个計标在该文所引的章节中已经给出，结果是

$$A=(\vec{n},\vec{\omega},\vec{v})-\frac{|\vec{v}^{(12)}|}{\rho_v},\quad B=\vec{\omega},\vec{v}-\frac{|\vec{v}^{(12)}|}{\tau_v}.\quad(1.8)$$

注意 $\frac{1}{\rho_v}$，$\frac{1}{\tau_v}$ 为齿面 S_t^1 的纵向曲率和测地挠率，公式（7）中前

两式在上述文中已经得出.

十分明显 $\frac{1}{\tilde{\rho}}=0$ 所定的方向就是瞬时接触线方向，它与 $\vec{v}$ 的夹角为 w，那么就有

$$A\cos w+B\sin w=0,$$

即

$$-\operatorname{tg} w=A/B \qquad (1.9)$$

现在再求任意方向的诱导测地挠率、根据（1.4）′，它可表为

$$\frac{1}{\tilde{\tau}}=\frac{1}{\Psi}\left[(B^2-A^2)\sin\varphi\cos\varphi+AB(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\right]$$

$$=\frac{1}{\Psi}(A\cos\varphi+B\sin\varphi)(B\cos\varphi-A\sin\varphi).$$

我们已知

$$A\cos\varphi+B\sin\varphi=\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta,$$

则

$$A\cos\varphi-B\sin\varphi=(\alpha\cos\lambda+\beta\sin\lambda)\cos\varphi-(\beta\cos\lambda-\alpha\sin\lambda)\sin\varphi$$

$$=\beta\cos\theta-\alpha\sin\theta,$$

所以 $\frac{1}{\tilde{\tau}}$ 又可写作

$$\frac{1}{\tilde{\tau}}=\frac{1}{\Psi}(\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta)(\beta\cos\theta-\alpha\sin\theta). \qquad (1.10)$$

最后指出，根据（1.4）″ 知 $\frac{1}{\tilde{\rho}}$ 是切平面上的二次型，并且从（1.5）知它是退化的，所以有

$$\frac{1}{\tilde{\rho}_v}\cdot\frac{1}{\tilde{\rho}_t}-\frac{1}{\tilde{\tau}_v^2}=0 \qquad (1.11)$$

这从（1.7） 也可见其满足.

应该注意由于二次型的退化性不依赖于标架的选取，所以（1.11）仍能成立，即使 $\vec{v}$ 和 $\vec{t}$ 不是共轭齿面的纵向和法向。

§2. 点接触传动的工作线和传动比

2.1 我们在［1,2］中所研究的问题，主要属于线接触的啮合，那里任一瞬时 t 两齿面沿一瞬时接触线相切．例如用铣刀或砂轮

切削或研磨齿轮时的运动属于这类啮合问题，但通常齿轮在实际工作时，特别是经过鼓形整修的齿轮，从几何学的观点属于所谓点接触运动，这时两轮齿面在任一瞬时 t 仅以一个孤立的点相接触。我们以前称空间瞬时接触线构成的曲面（指接触点在空间构成的集合）为啮合面，在点接触情况下，啮合点的集合就构成所谓啮合线。啮合线在两齿面上的轨迹称为该齿面的工作线。

点接触传动的传动比可以是常值，也可以是变值。本文第一部分就要求对于在给定一点啮合的两齿面在该点的工作线方向，以及传动比的时间导数，

为简单计，我们假定空间传动装置的两个运动，一个是绕过定点 O 的轴的旋转，另一个是绕过 O' 的另一个轴的旋转。我们指出对于更普遍的运动形式，其讨论与这种特殊情况完全一样，令 $\vec{\omega}$，$\vec{\omega}'$ 分别是两个转动的角速度矢，我们不妨假定 $\frac{d\vec{\omega}}{dt}=0$，一般说

$$\frac{d\vec{\omega}'}{dt}\neq 0$$

假定 S_t^1，S_t^2 是和运动固接的两齿面在瞬时 t 的位置，它们在 M 啮合；因此 S_t^1，S_t^2 在 M 相切，

令 $\vec{n}$ 是它们的公法線矢，

令 $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$，$\overrightarrow{O'M}=\vec{r}'$，$\overrightarrow{OO'}=\vec{r}_0$，于是有

$$\vec{r}'+\vec{r}_0=\vec{r} \tag{2.1}$$

在啮合过程中，它们还要适合基本关系[1]

$$\frac{d_2\vec{r}'}{dt}-\frac{d_1\vec{r}}{dt}=\vec{v}^{(12)}, \tag{2.2}$$

其中 $\vec{v}^{(12)}$ 是相对速度矢，即

$$\vec{v}^{(12)}=\vec{r}'\times\vec{\omega}'-\vec{r}\times\vec{\omega}. \tag{2.3}$$

另外还有

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{d_2\vec{n}}{dt}-\frac{d_1\vec{n}}{dt}=\vec{n}\times\vec{\omega},\\
&\vec{\omega}=\vec{\omega}'-\vec{\omega}.
\end{aligned}\right\} \tag{2.4}
$$

啮合条件是

$$\vec{v}^{(12)}\cdot\vec{n}=0 \tag{2.5}$$

由于(2.5) 事实上由(2.1)与(2.4)所构成的矢量关系式各等价于两个数值关系式．将(2.2) 和 (2.4)联立有

$$
(\alpha)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{d_2\vec{r}'}{ds'}\,\frac{ds'}{dt}-\frac{d_1\vec{r}}{ds}\,\frac{ds}{dt}=\vec{v}^{(12)},\\
&\frac{d_2\vec{n}}{ds'}\,\frac{ds'}{dt}-\frac{d_1\vec{n}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\vec{n}\times\vec{\omega}
\end{aligned}\right.
$$

其中 $\dfrac{d_1\vec{r}}{ds}$ 就是 S_t^1 上的工作线方向的切么矢，同样 $\dfrac{d_2\vec{r}'}{ds'}$ 是 S_t^2 的工作线方向切么矢。

令 $\vec{\omega}_0$, $\vec{\omega}_0'$ 为与 $\vec{\omega}$, $\vec{\omega}'$ 同向的么矢，可以假定 $\vec{\omega}=\vec{\omega}_0$，那么 $\vec{\omega}'=i(t)\vec{\omega}_0'$，$i(t)$ 就是传动比。由于M是啮合点，(2.5)所代表的啮合条件必需满足，即

$$\vec{v}^{(12)}\cdot\vec{n}=(\vec{r}'\times i\vec{\omega}_0')\cdot\vec{n}-(\vec{r}\times\vec{\omega})\cdot\vec{n}=0,$$

所以传动比 i，在M处应满足

$$i=\frac{(\vec{r},\vec{\omega}_0,\vec{n})}{(\vec{r}',\vec{\omega}_0',\vec{n})}. \tag{2.6}$$

此式右端在M点是已知量，由此就确定 i，同时也确定 $\vec{v}^{(12)}$ 的方向，自然这里假定(6)的右端分子和分母均非零，对于锥齿轮我们常假定接触点M是节点，即 $\vec{v}^{(12)}=0$，因此条件(2.5)自然满足，所以 i 就不需要满足(2.6)式，我们以下的讨论仅注意一般情况，许多结果往往只需令 $\vec{v}^{(12)}=0$ 即可对锥齿轮成立。对此不再作必要的论证，因为这些往往是简单的。

现在问题就化为寻求满足(α)的 $\dfrac{d_1\vec{r}}{ds}$ 和 $\dfrac{d_2\vec{r}'}{ds'}$ 了。

我们利用上节引理可将(α)化为等价的下面的四个公式

$$(\alpha)'\quad\begin{cases}\cos\varphi'\dfrac{ds}{dt}-\cos\varphi\dfrac{ds}{dt}=\left|\vec{v}^{(12)}\right|,\\[2mm] \sin\varphi'\dfrac{ds'}{dt}-\sin\varphi\dfrac{ds}{dt}=0,\\[2mm] \left(\dfrac{1}{\rho'_v}\cos\varphi'+\dfrac{1}{\tau'_v}\sin\varphi'\right)\dfrac{ds'}{dt}-\left(\dfrac{1}{\rho_v}\cos\varphi+\dfrac{1}{\tau_v}\sin\varphi\right)\dfrac{ds}{dt}=(\vec{n},\vec{\omega},\vec{v}),\\[2mm] \left(\dfrac{1}{\rho'_t}\sin\varphi'+\dfrac{1}{\tau'_v}\cos\varphi'\right)\dfrac{ds'}{dt}-\left(\dfrac{1}{\rho_t}\sin+\dfrac{1}{\tau_v}\cos\varphi\right)\dfrac{ds}{dt}=\vec{\omega}\cdot\vec{v}.\end{cases}$$

解这个方程组，消去 φ，$\dfrac{ds}{dt}$ 得到

$$(\beta)\quad\begin{cases}\dfrac{1}{\bar{\rho}_v}\cos\varphi'\dfrac{ds'}{dt}+\dfrac{1}{\bar{\tau}_v}\sin\varphi'\dfrac{ds'}{dt}=A,\\[2mm] \dfrac{1}{\bar{\rho}_t}\sin\varphi'\dfrac{ds'}{dt}+\dfrac{1}{\bar{\tau}_v}\cos\varphi'\dfrac{ds'}{dt}=B.\end{cases}$$

因传动为点接触，所以在M点的工作线就应确定，为此假定 (β) 左端的行列式

$$\Delta=\frac{1}{\bar{\rho}_v}\cdot\frac{1}{\bar{\rho}_t}-\left(\frac{1}{\bar{\tau}_v}\right)^2\neq 0. \qquad (2\cdot7)$$

这里 $\dfrac{1}{\bar{\rho}}=\dfrac{1}{\rho'}-\dfrac{1}{\rho}$ 是两齿面 S_t^1 和 S_t^2 在M处的曲率 $\dfrac{1}{\rho}$，$\dfrac{1}{\rho'}$ 之差，称为相对曲率．同样 $\dfrac{1}{\bar{\tau}}=\dfrac{1}{\tau'}-\dfrac{1}{\tau}$ 为相对测地挠率．指标 v，t 分别表示决定相对曲率和测地挠率的方向 $\vec{v}$ 和 $\vec{t}$，即是纵向和法向．

我们称 $\Delta\neq 0$ 的条件为局部点接触条件．在以后的讨论里，只要不是完全共轭的齿面常假定这个条件是适合的．在以下的讨论中还给出了它们的几何意义．注意到共轭齿面在啮合点不存在唯一的工作线方向，所以对于诱导曲率恒有

$$\frac{1}{\tilde{\rho}_v}\cdot\frac{1}{\tilde{\rho}_t}-\left(\frac{1}{\tilde{\tau}_v}\right)^2=0 \qquad (2\cdot8)$$

这在上节已经论及．

解方程组 (β) 就得到 S_t^2 上的工作线方向，令 φ' 是它和纵向

$\vec{v}$的夹角，则得

$$-\operatorname{tg}\varphi'=\left(\frac{1}{\rho_v}\cos w+\frac{1}{\tau_v}\sin w\right)\Big/\left(\frac{1}{\rho_t}\sin w+\frac{1}{\tau_v}\cos w\right), \tag{2.9}$$

其中 $-\operatorname{tg}w=A/B$，w 由前节已知为 S_t^1 在M点的瞬时接触线方向与 $\vec{v}$ 的夹角。

定理　局部点接触传动在齿面上有唯一的工作方向，对于这个方向由（2.9）决定。

推论1　齿面 S_t^1 上的工作线方向与 $\vec{v}$ 的夹角 φ 可以由类似于（2.9）的公式得到

$$-\operatorname{tg}\varphi=\left(\frac{1}{\rho_v}\cos w'+\frac{1}{\tau_v}\sin w'\right)\Big/\left(\frac{1}{\rho_t}\sin w'+\frac{1}{\tau_v}\cos w'\right), \tag{2.9$'$}$$

其中 w' 为 S_t^2 上的瞬时接触线方向角。

推论2　两齿面上工作线方向一致的必要充分条件是

$$\operatorname{tg}w=\operatorname{tg}w' \tag{2.10}$$

即两齿面的瞬时接触线方向一致。

推论3　锥齿轮传动的工作线方向对两齿面一致。这是因为从诱导曲率公式有

$$\operatorname{tg}w=\operatorname{tg}w'=-\frac{(\vec{n},\vec{\omega},\vec{v})}{\vec{\omega}\cdot\vec{v}}. \tag{2.11}$$

2.2 传动比导数

根据[1]中4.1中公式(2)，我们推得

$$d\Phi=\vec{v}^{(12)}\cdot d_1\vec{n}-(\vec{n},\vec{\omega},d_1\vec{r})+\Phi_t\,dt+(\vec{r}',d\vec{\omega}',\vec{n})=0. \tag{2.12}$$

注意这里 $\vec{\omega}'$ 是 t 的函数，令 $\vec{\omega}'=i(t)\vec{\omega}_0'$，$\vec{\omega}_0'$ 为公矢，且是常矢，所以

$$\frac{d\vec{\omega}'}{dt}=\frac{di}{dt}\vec{\omega}_0'=\frac{1}{i}\frac{di}{dt}\vec{\omega}',$$

于是（2.12）可写作

$$\frac{1}{i}(\vec{r}',\vec{\omega}',\vec{n})\frac{di}{dt}=-\Phi_t-\overline{\vec{v}}^{(12)}\cdot\frac{d_i\vec{n}}{ds}+\left(\vec{n},\overline{\vec{\omega}},\frac{d_i\vec{r}}{ds}\right)\frac{ds}{dt}$$

$$(2.12)'$$

这里导数是沿啮合线而取的，首先从上节（1·1）可得

$$-\overline{\vec{v}}^{(12)}\cdot\frac{d_i\vec{n}}{ds}=\left|\overline{\vec{v}}^{(12)}\right|\left(\frac{1}{\overline{\rho}_v}\cos\varphi+\frac{1}{\overline{\tau}_v}\sin\varphi\right),$$

$$\left(\vec{n},\overline{\vec{\omega}},\frac{d_i\vec{r}}{ds}\right)=\overline{\vec{\omega}}\cdot\vec{v}\sin\varphi+(\vec{n},\overline{\vec{\omega}}\,\overline{\vec{v}})\cos\varphi,$$

由此可将（2.12）′右端后一项写作

$$(A\cos\varphi+B\sin\varphi)\frac{ds}{dt} \tag{2.13}$$

之形，其中 A，B 定义见 § 1，对于曲面 S_t^2 可以定义同样的函数 A′和 B′，从它们的定义可得

$$\left.\begin{aligned}A'&=A-\frac{|\overline{\vec{v}}^{(12)}|}{\overline{\rho}_v},\\ B'&=B-\frac{|\overline{\vec{v}}^{(12)}|}{\overline{\tau}_v}.\end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

为了求出（2.13）的具体表示，可以从 2.1（α）′公式中解出 $\cos\varphi\frac{ds}{dt}$ 和 $\sin\varphi\frac{ds}{dt}$，它们分别是

$$\cos\varphi\frac{ds}{dt}=\frac{1}{\Delta}\left(\frac{A'}{\overline{\rho}_t}-\frac{B'}{\overline{\tau}_v}\right),\ \sin\varphi\frac{ds}{dt}=\frac{1}{\Delta}\left(\frac{B'}{\overline{\rho}_v}-\frac{A'}{\overline{\tau}_v}\right). \tag{2.15}$$

将其代入（2.13），利用关系（2.8），可以简化为

$$\frac{1}{\Delta}\left(\frac{AA'}{\overline{\rho}_t}+\frac{BB'}{\overline{\rho}_v}-\frac{AB'+A'B}{\overline{\tau}_v}\right)=\frac{1}{\Delta}\left(\frac{A^2}{\overline{\rho}_t}+\frac{B^2}{\overline{\rho}_v}-\frac{2AB}{\overline{\tau}_v}\right)-A|\overline{\vec{v}}^{(12)}|. \tag{2.16}$$

利用诱导曲率公式（1·7），则上式第一部分为

$$\frac{\psi}{\Delta}\left(\frac{1}{\overline{\rho}_v}\cdot\frac{1}{\rho_t}+\frac{1}{\overline{\rho}_t}\cdot\frac{1}{\rho_v}-\frac{2}{\overline{\tau}_v\tau_v}\right). \tag{2.17}$$

我们知道在上面的讨论中，$\frac{1}{\rho}$ 表 S_t^1 的法曲率，$\frac{1}{\overline{\rho}}$ 表 S_t^1 的诱导法曲率，定义

$$\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right)=\frac{1}{\bar{\rho}}-\frac{1}{\tilde{\rho}}$$

为 S_t^1 的法曲率偏差，同样可以定义 S_t^2 的法曲率偏差，从定义有

$$\frac{1}{\bar{\rho}_v}=\frac{1}{\tilde{\rho}_v}+\Delta\left(\frac{1}{\rho_v}\right),\ \frac{1}{\bar{\rho}_t}=\frac{1}{\tilde{\rho}_t}+\Delta\left(\frac{1}{\rho_t}\right),\quad \frac{1}{\bar{\tau}_v}=\frac{1}{\tilde{\tau}_v}+\Delta\left(\frac{1}{\tau_v}\right).$$

等等，于是（2.17）式可写作

$$\frac{\psi}{\Delta}\left[\frac{1}{\tilde{\rho}_v}\Delta\left(\frac{1}{\rho_t}\right)+\frac{1}{\tilde{\rho}_t}\Delta\left(\frac{1}{\rho_v}\right)-\frac{2}{\tilde{\tau}_v}\Delta\left(\frac{1}{\tau_v}\right)\right].\tag{2.17$'$}$$

如果注意到诱导法曲率的关系（2.8）

定义 $\Delta'=\Delta\left(\frac{1}{\rho_v}\right)\Delta\left(\frac{1}{\rho_t}\right)-\Delta\left(\frac{1}{\tau_v}\right)^2$，那么同样注意到上述诱导曲率关系，就有

$$\Delta=\frac{1}{\tilde{\rho}_t}\Delta\left(\frac{1}{\rho_v}\right)+\frac{1}{\tilde{\rho}_v}\Delta\left(\frac{1}{\rho_t}\right)-\frac{2}{\tilde{\tau}_v}\Delta\left(\frac{1}{\tau_v}\right)+\Delta'$$

将此式代入（2.17）或（2.17）′ 就得到该式为 $\frac{\psi}{\Delta}(\Delta-\Delta')=\psi-\frac{\psi\Delta'}{\Delta}$。于是（2.16）式就等于 $\psi-\frac{\psi\Delta'}{\Delta}-A\left|\vec{U}^{(12)}\right|$，以 i 代入（2.1）式，同时考虑到[1] 的基本关系 5.1（5），就得到

$$\frac{1}{i}(\vec{r}',\vec{\omega}',\vec{n})\frac{di}{dt}=-\frac{\psi\Delta'}{\Delta},\tag{2.18}$$

或者同等的公式

$$\frac{1}{i}(\vec{r},\vec{\omega},\vec{n})\frac{di}{dt}=-\frac{\psi\Delta'}{\Delta}.\tag{2.18}$$

推论　点接触时传动比导数为零的必要充分条件是

$$\Delta'=\Delta\left(\frac{1}{\rho_v}\right)\Delta\left(\frac{1}{\rho_t}\right)-\Delta\left(\frac{1}{\tau_v}\right)^2=0,$$

§3. 失　配

齿轮传动如果传动比为常值，并是线接触的，那么两齿面必须共轭，显然共轭的齿面不但传动比为常值，而且是全齿面接触

的。共轭齿面仅在理论上重要．实际上这样的齿轮对于制造及装配等的误差是非常敏感的，所以不是实用上需要的。

实用的齿轮则是在共轭齿面的基础上给以些许变形，使得它们在运动时传动比基本上保持常值，而且形成局部接触区，这种非共轭齿面的齿轮称为失配的．或称鼓形整修的。

令 S_t^1，S_t^2 为失配齿轮两齿面在瞬时 t 的位置，它们在参考点M相接触。令 $\vec{\upsilon}$ 为该点的纵向切么矢，$\vec{\tau}$ 为该点法向切么矢，令 $\dfrac{d\vec{r}}{ds}$ 为公切面上任一么矢，它与 $\vec{\upsilon}$ 的夹角为 φ。从（1.4）S_t^1 对于 $\dfrac{d\vec{r}}{ds}$ 的法向曲率为

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\rho_\upsilon}\cos^2\varphi+\frac{2}{\tau_\upsilon}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{1}{\rho_t}\sin^2\varphi \qquad (3.1)$$

其中符号同上节公式（2.4），同样对于 S_t^2 有类似的公式

$$\frac{1}{\rho'}=\frac{1}{\rho_\upsilon'}\cos^2\varphi+\frac{2}{\tau_\upsilon'}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{1}{\rho_t'}\sin^2\varphi \qquad (3.2)$$

对于两齿面的相对曲率 $\dfrac{1}{\rho'}-\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{1}{\bar{\rho}}$ 有

$$\frac{1}{\bar{\rho}}=\frac{1}{\bar{\rho}_\upsilon}\cos^2\varphi+\frac{2}{\bar{\tau}_\upsilon}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{1}{\bar{\rho}_t}\sin^2\varphi \qquad (3.3)$$

对于 S_t^1 的诱导法曲率也有类似的公式

$$\frac{1}{\tilde{\rho}}=\frac{1}{\tilde{\rho}_\upsilon}\cos^2\varphi+\frac{2}{\tilde{\tau}_\upsilon}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{1}{\tilde{\rho}_t}\sin^2\varphi \qquad (3.4)$$

同样对于 S_t^2 的诱导法曲率也是如此。

以前我们曾经定义曲率偏差，更确地说 S_t^1 的曲率偏差 $\Delta\left(\dfrac{1}{\rho}\right)=\dfrac{1}{\rho}-\dfrac{1}{\tilde{\rho}}$，$S_t^2$ 的曲率偏差以 $\Delta\left(\dfrac{1}{\rho'}\right)$ $\left(\text{或}\,\Delta'\left(\dfrac{1}{\rho}\right)\right)$ 表示之，它们都有类似的公式

$$\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right)=\Delta\left(\frac{1}{\rho_\upsilon}\right)\cos^2\varphi+2\Delta\left(\frac{1}{\tau_\upsilon}\right)\sin\varphi\cos\varphi+\Delta\left(\frac{1}{\rho_t}\right)\sin^2\varphi \qquad (3.5)$$

分三种情况讨论(1) $\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right)\equiv 0$. 则两齿面在M点共轭或更确切地说是局部共轭的。

(2) $\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right)$ 作为二次型(切平面上)是退化的，或者同等的条件

$$\Delta'=\Delta\left(\frac{1}{\rho_v}\right)\Delta\left(\frac{1}{\rho_t}\right)-\Delta\left(\frac{1}{\tau_v}\right)^2=0,$$

称为单纯失配，或更确切地局部单纯失配。

(3) $\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right)$ 为非退化的，则称为复合共配或称失配，一般失配齿轮都是属于这种情况。

首先讨论单失配，这时由于 $\Delta'=0$，所以 $\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right)$ 可以表为

$$\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right)=\Delta\left(\frac{1}{\rho_v}\right)\cos\varphi+\left(\frac{\Delta\left(\frac{1}{\tau_v}\right)}{\Delta\left(\frac{1}{\rho_v}\right)}\sin\varphi\right)^2. \tag{3.6}$$

根据(2.9)，特别是它的另一形式下面的公式(3.10)，容易得出 S_t^2 上的工作线方向由

$$-tg\,\varphi'=\Delta\left(\frac{1}{\rho_v}\right)\Big/\Delta\left(\frac{1}{\tau_v}\right) \tag{3.7}$$

决定可知对于这个方向 $\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right)=0$. 根据(1.11)的说明

$$\Delta\left(\frac{1}{\rho_v}\right)\Delta\left(\frac{1}{\rho_t}\right)-\Delta\left(\frac{1}{\tau_v}\right)^2=0 \tag{3.8}$$

对于任意互垂的二么矢 $\vec{v}$, $\vec{t}$ 也能成立. 假设 $\vec{v}$ 为 S_t^2 工作线方向，于是 $\Delta\left(\frac{1}{\rho_v}\right)=0$, 所以 $\Delta\left(\frac{1}{\tau_v}\right)$ 也为零. 于是有:

命题 单失配由下性质所确定，即它存在唯一的一个方向，对此 $\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right)=\Delta\left(\frac{1}{\tau}\right)=0$. 称为单失配的失配方向.

最后还要指出如果 $\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right)$ 为退化，则 $\Delta'\left(\frac{1}{\rho}\right)$ 也是退化的，所以 S_t^2 为出发齿面，所作偏差曲率也是退化的，而且有同一共轭方向。它与齿面工作线一致。这些结论都是易于証明的。

从（2.18）可以看出传动比的导数为零的必要充分条件是齿轮是单共轭的。我们知道传动比导数为零就是李特文取作他的近似啮合理论的假设。因此可知他的理论实际上是单共轭理论。

为了给与上面的讨论以几何意义，可以仿照微分几何中曲率的 Dnpin 标形，我们可以定义誘导曲率，相对曲率以及偏差曲率标形。其中尤以偏差标形为重要，我们对它定义如下。在两齿面接触点 Mo 的公切平面内，对任何一方向所定的直线上取一点 M 使得它与 M_0 的距离为 $1/\sqrt{\left|\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right)\right|}$。这些点的轨迹称为偏差标形，同样可定义相对标形或誘导标形。令（X，Y）为标形上一点对于标架（M_0；$\vec{v}$，$\vec{t}$）的坐标，那么

$$X=\cos\varphi\Big/\left|\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right)\right|^{1/2},\quad Y=\sin\varphi\Big/\left|\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right)\right|^{1/2},$$

于是有

$$\begin{aligned}&\Delta\left(\frac{1}{\rho_v}\right)X^2+2\Delta\left(\frac{1}{\tau_v}\right)XY+\Delta\left(\frac{1}{\rho_t}\right)Y^2\\&=\left(\Delta\left(\frac{1}{\rho_v}\right)\cos^2\varphi+2\Delta\left(\frac{1}{\tau_v}\right)\sin\varphi\cos\varphi+\Delta\left(\frac{1}{\rho_t}\right)\sin^2\varphi\right)\Big/\left|\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right)\right|\\&=\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right)\Big/\left|\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right)\right|=\pm 1.\end{aligned}$$

所以标形的方程为 $\Delta\left(\frac{1}{\rho_v}\right)X^2+2\Delta\left(\frac{1}{\tau_v}\right)XY+\Delta\left(\frac{1}{\rho_t}\right)Y^2=\pm 1$

（3.9）

因之，标型是一个以 Mo 为心的二次曲线，对于单共轭而言，该标型是退化的，即为两平行直线。下面将看到在实际情况下偏差标型为椭圆曲线。

从（2.9）得到

$$-\operatorname{tg}\varphi'=\frac{\left(\frac{1}{\tilde{\rho}_v}+\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)\cos w+\left(\frac{1}{\tilde{\tau}_v}+\Delta\left(\frac{1}{\tau_v}\right)\right)\sin w}{\left(\Delta\left(\frac{1}{\tau_v}\right)+\frac{1}{\tilde{\tau}_v}\right)\cos w+\left(\frac{1}{\tilde{\rho}_t}+\Delta\left(\frac{1}{\rho_t}\right)\right)\sin w}$$

由于 $\operatorname{tg} w=-\frac{1}{\tilde{\rho}}\Big/\frac{1}{\tilde{\tau}_v}$，所以上式可表为

$$-\operatorname{tg}\varphi'=\left[\Delta\left(\frac{1}{\rho_v}\right)\cos w+\Delta\left(\frac{1}{\tilde{\tau}_v}\right)\sin w\right]\Big/\left[\Delta\left(\frac{1}{\tilde{\tau}_v}\right)\cos w+\Delta\left(\frac{1}{\rho_t}\right)\sin w\right] \tag{3.10}$$

从这个公式和标形的表示式（3.9），即可看出 S_t^2 上的工作线方向是 S_t^1 的瞬时接触线方向对于 S_t^1 的偏差标形的共轭方向。

命题 S_t^2 的工作线方向与 S_t^1 的瞬时接触线方向对于 S_t^1 的偏差标形是共轭的。

同样对于 S_t^1 的工作线方向有类似的结果。

推论 命题中的两个方向对于相对曲率标形也是共轭的。

参考文献

[1] 南开大学数学系齿轮啮合研究小组，齿轮啮合理论的数学基础（一）、（二），数学的实践与认识，1976年，第1.2期，52～62；41～58.

[2] 南开大学数学系，齿轮啮合理论的数学基础（三），应用数学学报，1976年，第2期，84～88.

共轭齿面的界限点

南开大学　骆家舜

引　言

在啮合理论的研究中，两类界限点和诱导法曲率[1]有其重要作用。

本文的内容采用求极限的方法，将诱导法曲率公式应用于界限点处求相对法曲率。并用来探讨相错轴传动中的二次包络的理论，阐述了第一次包络时，第一齿面S_1上的第二类界限点的共轭点（在S_1的共轭齿面S_2上）是第二次包络（即反包络）时的接触线上的奇异点以及给出了在接触线上的奇异点处，S_2和新接触线产生的新接触面S_1^*的相对法曲率等于零的证明、这是二次包络中直接展成法的啮合特性的主要特点；它有利于提高承载能力，并可用来指导平面二次包络弧面蜗杆传动的设计，在工业应用中获得了较好的效果。

为了节省篇幅，文中有关的概念及符号请参见〔1，2〕。

§1．符号说明

在一对线接触的共轭齿面啮合传动时，由第一齿面S_1在给定的相对运动条件下，求得其共轭齿面S_2。以下将有关的主要符号略作说明。

σ：空间的基准坐标系（又称固定坐标系、

S_1：第一齿面．

S_2：第二齿面（S_1的共轭齿面）．

σ_1：和S_1固连的动标．

σ_2：和S_2固连的动标．

$\vec{V}_{12}$：相对速度矢

$\vec{\omega}_{12}$：相对角速度矢

$\vec{n}$：啮合点处两齿面的公共单位法矢．