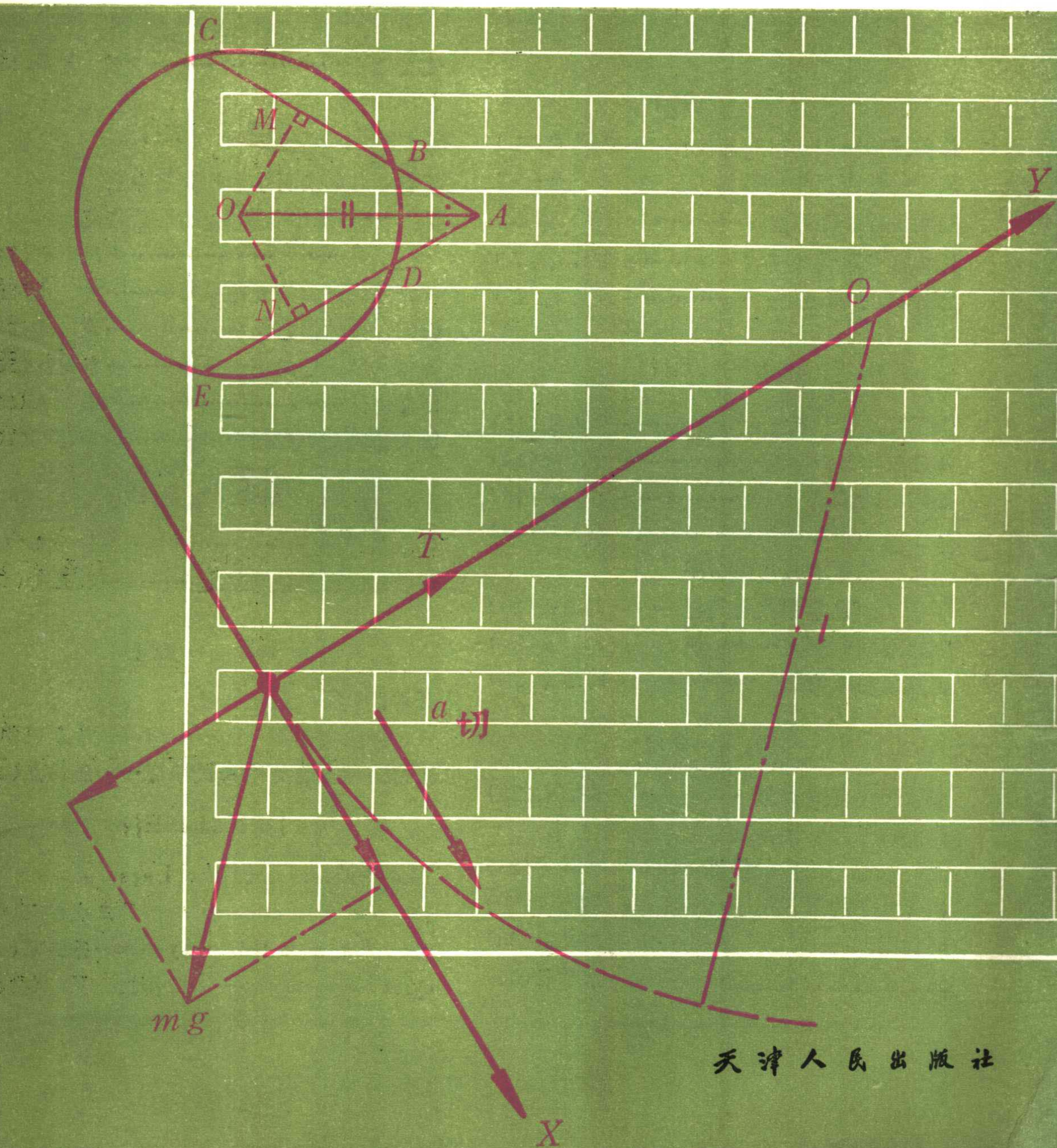
2

# GAOZHONG KECHENGFUDAO

# 高中课程辅导




天津人民出版社

*Key to Quiz:*

I.

1.a　2.b　3.b　4.d　5.b　6.d　7.c　8.a　9.c

10.c　11.c　12.b　13.c　14.b　15.a　16.c　17.a

18.b　19.d　20.d　21.a　22.c　23.d　24.b　25.b

II.

1. left ⟶ leaving.
2. disappointing ⟶ disappointed.
3. boiled ⟶ boiling.
4. interested ⟶ interesting
5. painting ⟶ painted
6. happened ⟶ which happened
7. breaking ⟶ broken
8. my father sent me to school ⟶ I was sent to school by my father
9. there was nothing to do ⟶ I had nothing to do
10. having not ⟶ not having
11. Building ⟶ Built
12. Having ⟶ Having been
13. the lake lay ⟶ he saw the lake
14. Being ⟶ It being
15. were ⟶ being


高中课程辅导

第二辑〔高一上学期〕

编辑出版　天津人民出版社

（天津市赤峰道124号）

印　刷　天津新华印刷二厂

发　行　天津市新华书店

1980年9月第一版

1982年8月第三版第三次印刷

统一书号：7072·1181

定价：0.26元

# 高中课程辅导

## 第二辑

〔高一上学期〕

## 目录

# 数学

## 单位圆

赵慈庚

传统的三角学都借单位圆定义任意角的三角函数．我国最早的综合性初等数学《数理精蕴》，把三角函数合称为“割圆八线”．所以三角学又叫做八线学．所谓八线就是现在的正弦、余弦、正切、余切，和近年来从中学数学中删去的正割、余割、正矢、余矢．

从单位圆上任意一点$P$向横轴作垂线，设垂足为Q，令$\angle AOP=x$，从单位圆与横纵轴的交点$A$，$B$作切线，交射线$OP$于$T$，$S$．因为$OP=OA=OB=1$．所以，

$$\sin x=\frac{QP}{OP}=QP,\quad \cos x=\frac{OQ}{OP}=OQ,$$

$$\operatorname{tg}x=\frac{AT}{OA}=AT,\operatorname{ctg}x=\frac{OA}{AT}=\frac{BS}{BO}=BS.$$

每个函数之值等于一个线段之长，这就是八线中的前四个．这四个线段能直观地表示四个函数的变化情况．比如当$x$由0增大到$\frac{\pi}{2}$，$\sin x=QP$从0增加到1，$\cos x=OQ$从1减小到0．如果$x$在其他象限，把$QP$，$OQ$，$AT$，$BS$当作有向线段，就能连带符号表示这些函数．$QP$，$OQ$分别是弦$P'P$，$P''P$的一半，所以称为正弦、余弦．$AT$，$BS$是切线，所以称为正切、余切．

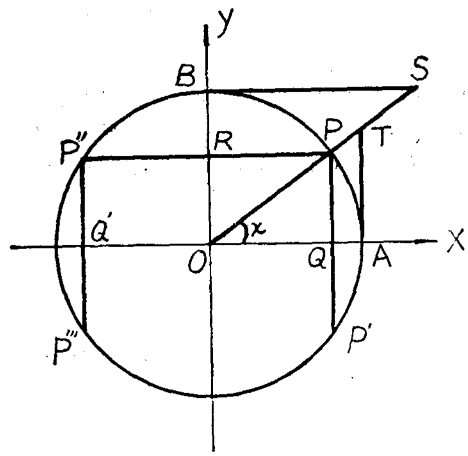
$x$终边上的$OT$，$OS$是单位圆的割线，分别叫做$x$的正割与余割．记作$\sec x$，$\csc x$，定义是

$$\sec x=\frac{OP}{OQ}=\frac{OT}{OA}=OT,$$

$$\csc x=\frac{OP}{QP}=\frac{OS}{OB}=OS.$$

图里的$\overset{\frown}{P'AP}$好象一张弓，$P'P$是弓弦，$QA$就是扣在弦上的箭，同样地$RB$是扣在弦$P''P$上的箭．所以中国把$QA$，$RB$称为$x$的正矢和余矢，记作$\operatorname{versin}x$，$\operatorname{covers}x$，定义是

$$\operatorname{versin}x=1-\cos x=OA-OQ=QA,$$
$$\operatorname{covers}x=1-\sin x=OB-OR=RB.$$




当$\frac{\pi}{2}<x<\pi$时，$\cos x<0$．比如$OP''$是$x$的终边，$\operatorname{versin}x=Q'A>1$．有趣的是这时的弓是$\overset{\frown}{P''AP'''}$，既然把弓拉圆了，箭被拉到弓内的部分自然要加长。这四个有向线段又是四个函数，和前边说的四个共是八线．这是三角函数的线定义，三角函数的线定义还可以直观地表示三角函数间的若干关系．例如从$OQP$，$OAT$，$OBS$三个直角三角形来看，

$QP^2+OQ^2=OP^2$，就是$\sin^2x+\cos^2x=1$，

$OA^2+AT^2=OT^2$，就是$1+\operatorname{tg}^2x=\sec^2x$，

$OB^2+BS^2=OS^2$，就是$1+\operatorname{ctg}^2x=\csc^2x$．

讲三角函数不用单位圆行不行？要看正弦余弦怎样定义的，如果用

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cdots,$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\cdots.$$

作定义，就可以不用单位圆．如果用几何方法定义三角函数，就避不开单位圆．用坐标定义三角函数，暗中还得借用圆周．例如定义$\sin\alpha=\frac{y}{r}$时，$r$实际是$\sqrt{x^2+y^2}$，那么$\sqrt{x^2+y^2}=r$和$x^2+y^2=r^2$在几何上又有什么区别！没有线定义，如何观察函数的变化呢？用三角函数表吗？不恰当，因为函数表是从①那样的公式造成的，这公式已经超出了坐标法定义的范畴．如果按定义固定了$r$，让$y$变化来看$\sin\alpha$的变化，那实际是把$(x,y)$限制在圆$x^2+y^2=r^2$上，还是用了圆周．至于说这是不是

单位圆．那倒是次要的——三角比并不挑拣圆的大小．

高等数学说到三角函数，都用弧度作角的单位．原因是讲理论或写公式用弧度最简单．初等数学画三角函数的图象又为什么用弧度作单位呢？适应高等数学自然是一个原因，而为了使图纸上纵横坐标的长度标准一致，是更重要的原因．用弧度时弧与角的量数永远相同．从数量上说可以通用，因其如此，很可以不说是角的函数，而说是弧的函数．英文的“弧”字是“arc”，现反函数的记号，例如arcsin$x$，按意义译成中文，应该是“以$x$为正弦的弧”．把圆心角和弧等同起来，就是为了使函数的自变量与因变量取得同样的单位，这样才能正确地表示两变量的对比关系．所以用弧度作单位，一方面符合公式①的要求（那里$x$，$y$都是数，都可以用有向线段表示）另一方面也使得函数的图象规范化．尽管图象可以因为单位圆不同而有大小之不同，但是形状总是相似的．这样总比大家在图象上各是其所是要好得多．为了大家对于三角函数有共同的观感，总得有个共同的约定啊！根据以上的考虑，不用弧度，不用单位圆能把问题处理得好吗？

# 怎样认识“弧度”

缪秉成

“弧度”这一角度的单位，人们对它比较生疏，不象对“度”那样熟悉。可是在高中的数学、物理课程中都要用到“弧度”这一单位．

在匀速圆周运动中只有用“弧度”作为角度的单位，圆心角$\theta$，圆半径$R$，圆弧长$S$之间才能出现公式$\theta=\dfrac{S}{R}$，$S=\theta R$，从而导出公式

$$\frac{S}{t}=\frac{\theta}{t}R,\ \ V=\omega R.$$

什么叫1弧度呢？“弧长等于半径的一截圆弧，它在圆心所张的圆心角叫做1弧度.”为了对1弧度的大小有个清楚的认识，建议你在课余时间分作两步来理解这个单位．

（一）画一个圆，作它的内接正六边形，那么每个弦的长度就等于半径$R$，弦长等于$R$的弦$AB$所对的圆心角显然是60°，因为$\triangle ABO$是个等边三角形．弧长等于半径$R$的圆弧就不是弧$\overset{\frown}{AB}$，而是比弧$\overset{\frown}{AB}$短一点的圆弧$\overset{\frown}{AC}$，$\overset{\frown}{AC}$所对的圆心角叫做1弧度．由于$\overset{\frown}{AC}<\overset{\frown}{AB}$，因此1弧度<60°，但从图中可以看出1弧度的大小和60°的大小相比，差别不是很大，见图1．

（二）1弧度的角究竟是多大呢？你可以动手量一下．在纸上画一线段，使它的长度等于你的量角器的半径，然后把量角器立直，把0°刻线对准右端点，使量角器沿着线段向左作无滑移的滚动，当量角器滚到在左端点处跟线段相切时，立即停止，观察左端点所对的刻度线，可以读出57°多．从而对1弧度$=\dfrac{180°}{\pi}\approx57.3°$，增添了感性认识，见图2．

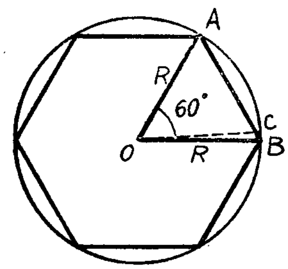



图1

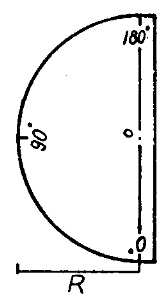



图2

对1弧度的定义理解以后，就可填写下列表格：

| S | 1R | 1.5R | 2R | 2.5R | 3R | … | S |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\theta$（弧度） | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 | … | $\frac{S}{R}$ |

从而得出$\theta=\dfrac{S}{R}$的公式，也就是说圆弧长度是半径的多少倍，那么圆心角就是多少弧度．

此外还要掌握“度”和“弧度”间的换算关系，即

$$360°=2\pi(\text{弧度})$$

$$\therefore\ 1°=\frac{2\pi}{360}(\text{弧度});$$

$$1(\text{弧度})=\frac{360°}{2\pi}.$$

# 周期函数与三角函数的周期性

余　凤　冈

周期函数与周期的知识，对研究机械振动、电学、热学、光学特别是无线电技术有着很大的实用价值，对于学习高等数学也是一个重要的基础知识．在实际生活中，有许多事物是具有周期现象的，它们的特点是：这些事物在运动变化过程中，经过一定的时间（或角度、长度）之后，又恢复到原来的状态，然后再重复进行同样的运动，周而复始，循环不息．例如：交流电压的大小，交替变化，每隔一定时间重复一次；时钟的钟摆每隔一定时间回到原来的位置；蒸气机、内燃机的活塞总是在一定区间内往复地平行滑动；三角函数值，由三角函数线可知，当$x$由$-\infty$增大到$+\infty$时，$\sin x$和$\cos x$的值每隔$2\pi$重复出现，$\operatorname{tg} x$和$\operatorname{ctg} x$的值每隔$\pi$重复出现，……这些都是周期现象．

什么叫做周期函数呢？我们作如下的定义：当自变量在函数的定义域内变化，如果对于它的一切值每增加一个定值的时候，函数值重复出现，那末这样的函数叫做周期函数．这个定值，叫做这个周期函数的周期．

从三角函数的诱导公式得知：

$$\sin(x\pm 2\pi)=\sin(x\pm 4\pi)=\sin(x\pm 6\pi)=\cdots=\sin x.$$

这就告诉我们：正弦函数是周期函数．$\pm 2\pi$，$\pm 4\pi$，$\pm 6\pi$，…都是它的周期．同样我们也可以知道，其他的三角函数也都是周期函数，$\pm 2\pi$，$\pm 4\pi$，$\pm 6\pi$，…也都是它的周期．

在讨论三角函数的性质时，最常遇到的就是在所有的周期中的最小的正数，我们称它为最小正周期，即对函数$y=f(x)$定义域内的自变量$x$的一切值都能满足$f(x+l)=f(x)$的最小正数$l$叫做函数$f(x)$的最小正周期．

我们谈到三角函数的周期时，一般是指的最小正周期．在以上定义中，我们应注意：对函数$y=f(x)$定义域内自变量$x$的一切值中的“一切”两个字．“一切”就是全部，不是部分，更不是个别，我们看这个例子：$\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\frac{\pi}{6}$．

能不能把$\frac{\pi}{6}$作为$x$，而把$\frac{2\pi}{3}$作为周期呢？显然不行，我们只要把$\frac{\pi}{6}$换一个别的值，例如换成$\frac{\pi}{3}$，$\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)$就不等于$\sin\frac{\pi}{3}$了．

我们已经知道$2\pi$是$\sin x$的周期，但它是不是最小正周期呢？我们用反证法来加以证明：

假设存在一个比$2\pi$小的正数$l$，使$\sin(x+l)=\sin x$对一切$x$成立，我们取$x=\frac{\pi}{2}$，则按上式应有：

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+l\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1,$$

但按诱导公式却有：$\sin\left(\frac{\pi}{2}+l\right)=\cos l$，

$\therefore\ \cos l=1$．

但因$l$是小于$2\pi$的正数，$\cos l=1$是不可能的，说明原假设不能成立，即$\sin x$的最小正周期是$2\pi$．

下面举几个求三角函数的最小正周期的例子．

**例1**

求　$y=\sin\omega x$　$(\omega>0)$的最小正周期．

解　令$t=\omega x$，

因为$\sin t$的最小正周期是$2\pi$，所以

$\sin(t+2\pi)=\sin t$，

即　$\sin(\omega x+2\pi)=\sin\omega x$．

$\sin\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)=\sin\omega x$对一切$x$都成立，

所以$\frac{2\pi}{\omega}$就是$\sin\omega x$的最小正周期．

同样也可以知道$y=A\sin(\omega x+\varphi)$，$(A\neq 0,\ \omega>0)$的最小正周期也为$\frac{2\pi}{\omega}$．

**例2**

求　$y=|\sin x|$的最小周期．

**解**　据诱导公式有：

$$|\sin(x+\pi)|=|-\sin x|=|\sin x|$$

所以$y=|\sin x|$有一个周期是$\pi$，但它是不是最小正周期呢？仿前面的证明，我们同样也能证明它就是最小正周期．

**例3**

求　$y=\sin^2x$的最小正周期.

**解**　$y=\sin^2x=\frac{1}{2}(1-\cos2x)$

显然，$\cos2x$的最小正周期为$\pi$，

即$y=\sin^2x$的最小正周期为$\pi$.

从上例可以看出，利用适当的三角恒等变换的公式可以简化运算，找到解题的途径.

**例4**

求　$y=\sin x+\cos x$的最小正周期.

**解**　$y=\sin x+\cos x$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x+\sin\frac{\pi}{4}\cos x\right)$$

$$=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

因为$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的最小正周期是$2\pi$，所以$y=\sin x+\cos x$的最小正周期为$2\pi$.

**例5**

求　$y=\sin x+\sin2x$的最小正周期.

**解**　我们知道$\sin x$和$\sin2x$的最小正周期分别为$2\pi$和$\pi$，而能被$2\pi$和$\pi$整除的最小正数是$2\pi$.

$\sin(x+2\pi)+\sin(2x+2\pi)=\sin x+\sin2x$,

所以$2\pi$是它的周期，但这是不是最小正周期呢？再用反证法来加以证明：

假设存在一个比$2\pi$小的正数$l$使

$\sin(x+l)+\sin(2x+l)=\sin x+\sin2x$

对一切$x$都成立，我们取$x=\frac{\pi}{2}$，据假设有：

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+l\right)+\sin(\pi+l)=\sin\frac{\pi}{2}+\sin\pi=1.$$

据诱导公式有：

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+l\right)+\sin(\pi+l)=\cos l-\sin l,$$

即　$\cos l-\sin l=1$　①

我们又取$x=\frac{3\pi}{2}$，据假设有：

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+l\right)+\sin(3\pi+l)=\sin\frac{3\pi}{2}+\sin3\pi=-1.$$

据诱导公式有：

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+l\right)+\sin(3\pi+l)=-\cos l-\sin l,$$

即　$-\cos l-\sin l=-1$.　②

①－②

$2\cos l=2$，　$\cos l=1$.

由于$l$是比$2\pi$小的正数，所以$\cos l\neq1$.说明原假设不能成立，即$y=\sin x+\sin2x$的最小正周期是$2\pi$.

实际上我们已把正整数中的最小公倍数的定义推广到实数中来，能不能这样说两个三角函数和的最小正周期就是它们各个函数的最小正周期的最小公倍数呢？不能！我们只能肯定如下的结论：各个三角函数的最小正周期的最小公倍数是他们的和函数的周期（注意：不一定是最小正周期）尽管在大多数情况下，它确是最小正周期，我们还是要仿例5逐题证明.

**例6**

求　$y=|\sin x|+|\cos x|$的最小正周期.

**解**　从例2知$|\sin x|$的最小正周期是$\pi$，同样也能求得$|\cos x|$的最小正周期也是$\pi$，显然，他们的最小公倍数也是$\pi$，即$\pi$是$y=|\sin x|+|\cos x|$的周期，但却不是它的最小正周期，事实上有：

$$\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|=|\cos x|,$$

$$\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|=|-\sin x|=|\sin x|,$$

即　$$\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|+\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|=|\sin x|+|\cos x|.$$

显然$\frac{\pi}{2}$也是$y=|\sin x|+|\cos x|$的周期.但怎样证明$\frac{\pi}{2}$就是它的最小正周期呢？此时除了以上用的反证法外，注意到这个函数是恒正的，因此$y$和$y^2$的最小正周期应该相等.

我们把$y=|\sin x|+|\cos x|$两边平方　得

$$y^2=|\sin x|^2+2|\sin x||\cos x|+|\cos x|^2=1+|\sin2x|.$$

你能不能从例1和例2的解得到启发来证明$y=|\sin x|+|\cos x|$的最小正周期是$\frac{\pi}{2}$这个结论呢？

**例7**

求　$y=\sin x+\sin\pi x$的最小正周期.

**解**　我们考虑到$\sin x$的最小正周期是$2\pi$，$\sin\pi x$的最小正周期是2，二者不存在一个最小公倍数，即根本不存在周期，也就是没有最小正周期.

从上例知，两个周期函数的和不一定是周期函数，利用三角函数的和差化积也可得出两个周期函数的积也不一定是周期函数.

# 三角函数积化和差

严以诚

新编课本高中第一册第三章，两角和与差的三角函数3·4中指出："在计算与化简的过程中，有时需要把三角函数乘积的形式与三角函数和差的形式进行互化"，在解决有关三角函数的具体问题时，有时要用三角函数表，有时要用三角函数对数表．在用三角函数表时，最好把三角函数的乘积化为和差；而在用三角函数对数表时，最好把三角函数的和差化为乘积，在求三角函数的积分时，也是把三角函数的积化为和差．所以熟练掌握三角函数的和差与乘积的互化是很重要的，本文就谈谈三角函数积化和差问题．

## 一　关于公式的掌握

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)];$$

$$\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)];$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)];$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)].$$

上面四个公式，不要死记硬背，但要在掌握最基本的公式——二角和差的正弦与余弦的基础上，来推导和熟记这些公式，要注意公式的特点，一角的正弦与另一角的余弦之积可以化为正弦函数的和或差；而两个角正弦之积或两个角余弦之积可以化为余弦函数的和或差，正确与否，验算便知（由二角和差的正弦与余弦公式来验算）．

## 二　关于公式的初步运用

同学可以通过一些简单的题目，初步掌握积化和差公式．

**例1**

**求**　$\cos75°\sin15°$的值．

**解**　$\cos75°\sin15°$

$$=\frac{1}{2}(\sin90°-\sin60°)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2-\sqrt{3}}{4}.$$

如分别求$\cos75°$，$\sin15°$的值，然后再求它的积就比较麻烦，本题虽然也可以用下法来解，但仍以用三角函数积化和差的方法较为简便．

$$\cos75°\sin15°=\sin^2 15°$$

$$=\frac{1-\cos30°}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}.$$

$$\cos75°\sin15°=\cos^2 75°$$

$$=\frac{1+\cos150°}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}.$$

通过这个例子，说明有时利用积化和差公式，求两个三角函数之积时，比较简便，大家可以做求$\sin75°\cos15°$，$\cos75°\cos15°$，$\sin75°\sin15°$的值的练习，来巩固和差化积公式．

**例2**　**化简**　$\dfrac{\sin(\theta+45°)\sin(\theta-45°)}{\sin^2\theta-\cos^2\theta}$.

**解**　原式

$$=\frac{-\frac{1}{2}(\cos2\theta-\cos90°)}{-(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}=\frac{\frac{1}{2}\cos2\theta}{\cos2\theta}=\frac{1}{2}.$$

**例3**　**化简**

$$2\cos\frac{9\pi}{13}\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}.$$

**解**　原式

$$=\cos\frac{10\pi}{13}+\cos\frac{8\pi}{13}+\cos\left(\pi-\frac{8\pi}{13}\right)+\cos\frac{3\pi}{13}$$

$$=\cos\left(\pi-\frac{3}{13}\pi\right)+\cos\frac{8\pi}{13}-\cos\frac{8\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}$$

$$=-\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}=0.$$

**例4**

**求证**　$\cos(x+y)\sin(x-y)$

$$+\cos(y+z)\sin(y-z)$$

$$+\cos(z+x)\sin(z-x)=0.$$

**证**　左边$=\dfrac{1}{2}(\sin2x-\sin2y)$

$$+\frac{1}{2}(\sin2y-\sin2z)$$

$$+\frac{1}{2}(\sin2z-\sin2x)=0.$$

## 三　关于公式的灵活运用

在初步掌握公式之后，还要通过较复杂的题目，达到灵活运用．下列各题可供参考．

**例1 求证** $\sin20^\circ\sin40^\circ\sin60^\circ\sin80^\circ=\frac{3}{16}$.

**证明**

左边 $=\frac{1}{2}(\cos20^\circ-\cos60^\circ)\sin80^\circ\sin60^\circ$

$=\frac{1}{2}(\sin80^\circ\cos20^\circ-\frac{1}{2}\sin80^\circ)\sin60^\circ$

$=\frac{1}{4}(\sin100^\circ+\sin60^\circ-\sin80^\circ)\sin60^\circ$

$=\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{16}$.

**例2 求证**

$4\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha)=\sin3\alpha$.

**证明**

左边 $=2\sin\alpha(\cos2\alpha-\cos120^\circ)$

$=2\sin\alpha\cos2\alpha+\sin\alpha$

$=\sin3\alpha-\sin\alpha+\sin\alpha=\sin3\alpha$.

在化到$2\sin\alpha\cos2\alpha+\sin\alpha$这一步时，如果不直接利用积化和差公式，而把$2\sin\alpha\cos2\alpha+\sin\alpha$化为$2\sin\alpha(1-2\sin^2\alpha)+\sin\alpha$并进而化为

$3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$就比较繁琐了.

**例3**

**求证**$\sin3A\sin^3A+\cos3A\cos^3A=\cos^32A$.

**证明**

左边 $=-\frac{1}{2}(\cos4A-\cos2A)\sin^2A$

$+\frac{1}{2}(\cos4A+\cos2A)\cos^2A$

$=\frac{1}{2}\cos4A(\cos^2A-\sin^2A)$

$+\frac{1}{2}\cos2A(\sin^2A+\cos^2A)$

$=\frac{1}{2}\cos4A\cos2A+\frac{1}{2}\cos2A$

$=\frac{1}{2}\cos2A(1+\cos4A)$

$=\frac{1}{2}\cos2A\cdot2\cos^22A=\cos^32A$.

这题如果不用积化和差公式，把$\sin3A$，$\cos3A$化为单角三角函数式，也可证出，证法如下，不过稍繁。

$\sin3A\sin^3A+\cos3A\cos^3A$

$=(3\sin A-4\sin^3A)\sin^3A+$

$(4\cos^3A-3\cos A)\cos^3A$

$=3(\sin^4A-\cos^4A)-4\sin^6A+4\cos^6A$

$=3(\sin^4A-\cos^4A)(\sin^2A+\cos^2A)$

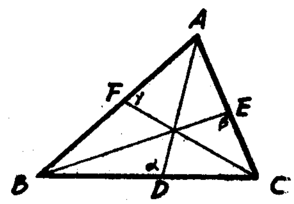
$-4\sin^6A+4\cos^6A$

$=\cos^6A-3\cos^4A\sin^2A+3\cos^2A\sin^4A$

$-\sin^6A=(\cos^2A-\sin^2A)^3=\cos^32A$.

通过这两个证法的比较，可以看出有时应用三角函数积化和差公式证明三角恒等式，比较简单.

**例4** 三角形$ABC$各角的平分线为$AD, BE$、$CF$，$\angle ADB=\alpha$，$\angle BEC=\beta$，$\angle CFA=\gamma$，




**求证** $a\sin2\alpha+b\sin2\beta+c\sin2\gamma=0$.

**证明** 利用三角形外角定理：

$\sin2\alpha=\sin2(C+\frac{A}{2})=\sin(A+2C)$,

$\sin2\beta=\sin2(A+\frac{B}{2})=\sin(2A+B)$,

$\sin2\gamma=\sin2(B+\frac{C}{2})=\sin(2B+C)$.

再利用正弦定理：$a=2R\sin A, b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$.（$R$表示三角形外接圆的半径）于是：

$a\sin2\alpha+b\sin2\beta+c\sin2\gamma$

$=2R[\sin A\sin(A+2C)+\sin B\sin(2A+B)$

$+\sin C\sin(2B+C)]$

$=R[\cos2C-\cos2(A+C)+\cos2A$

$-\cos2(A+B)+\cos2B-\cos2(B+C)]$

$=R(\cos2C-\cos2B+\cos2A-\cos2C$

$+\cos2B-\cos2A)=0$.

**例5 求证** $\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha+\cdots+\cos n\alpha$

$$=\frac{\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}\ \sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\quad(\alpha\neq2m\pi,\ m\in J)$$

**证明**

设$S=\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha+\cdots+\cos n\alpha$,

$\because\ \sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha=\frac{1}{2}(\sin\frac{3\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2})$,

$\sin\frac{\alpha}{2}\cos2\alpha=\frac{1}{2}(\sin\frac{5\alpha}{2}-\sin\frac{3\alpha}{2})$,

$\sin\frac{\alpha}{2}\cos3\alpha=\frac{1}{2}(\sin\frac{7\alpha}{2}-\sin\frac{5\alpha}{2})$,

……

$\sin\frac{\alpha}{2}\cos n\alpha=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}-\sin\frac{(2n-1)\alpha}{2}\right]$.

相加得：

$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot S=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right]$,

# 怎样证明三角恒等式

贺 信 淳

证明三角恒等式的练习题，不仅能帮助我们熟悉三角公式，提高三角恒等变换的技能技巧，并且还能培养我们逻辑推理和综合分析能力。所以，学好这部分知识，演算好这类习题，对学好三角这门课程是有很大意义的。这里，就三角恒等式的证明方法进行初步的分析和归纳，供同学们参考.

## 一、*左右法*

一个三角恒等式，一边较简，一边较繁，我们常从分析两端的特点，与两端的区别和联系，再应用三角公式和代数中的变形技巧，从一端推证至另一端，这种证法我们称之为“左右法”.

**例1** 证明

$$\frac{1+\sin A-\cos A}{1+\sin A+\cos A}+\frac{1+\sin A+\cos A}{1+\sin A-\cos A}=2\csc A.$$

**分析：** 显然，左端较繁，右端较简，我们可以引用代数中的乘法公式和三角公式逐步化简而得到右端的结果.

**证：**

$$左=\frac{(1+\sin A-\cos A)^2+(1+\sin A+\cos A)^2}{(1+\sin A)^2-\cos^2 A}$$

$$=\frac{2+2(\sin^2 A+\cos^2 A)+4\sin A}{2\sin^2 A+2\sin A}$$

$$=\frac{4(\sin A+1)}{2\sin A(\sin A+1)}=\frac{2}{\sin A}=2\csc A=右$$

∴ 原式成立.

**例2** 求证

$$\sin^4\alpha\cdot\cos^2\alpha$$

$$=\frac{1}{32}(2-\cos 2\alpha-2\cos 4\alpha+\cos 6\alpha).$$

**分析：** 通过审题可以发现，左端为单角 $\alpha$ 的函数，次数较高，右端是 $\alpha$ 的倍角的函数、次数较低，所以我们既可以用倍角公式从右端推证至左端，又可

---

$$\therefore\quad S=\frac{\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}},$$

即 $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots+\cos n\alpha$

$$=\frac{\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

**例6 求证** $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$

$$+4\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}+1=0.$$

**证明**

$$左边=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$$

$$+2\left(\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\right)\left(-\cos\frac{2\pi}{7}\right)+1$$

$$=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$$

$$-2\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+1-2\cos^2\frac{2\pi}{7}$$

$$=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$$

$$-\cos\frac{6\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}-\cos\frac{4\pi}{7}=0.$$

上题也可以用和差化积证明：

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+1$$

$$=2\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}+2\cos^2\frac{3\pi}{7}$$

$$=2\cos\frac{3\pi}{7}\left(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}\right)$$

$$=4\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}.$$

但 $\cos\frac{2\pi}{7}=\cos\left(\pi-\frac{5\pi}{7}\right)=-\cos\frac{5\pi}{7}$

$$\therefore\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+1$$

$$=-4\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}.$$

$$\therefore\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$$

$$+4\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}+1=0$$

通过上面的例题可以看出一个三角函数的恒等变形，有时既可以利用积化和差解之，有时也可以利用和差化积解之. 我们要深刻体会三角函数乘积的形式与三角函数和差的形式进行互化的辩证思想，熟练地掌握这种变形的技巧.

以用"降次公式"（见解法）从左端推证至右端.

证1：右 $=\frac{1}{32}[2(1-\cos4\alpha)-\cos2\alpha+\cos6\alpha]$

$=\frac{1}{32}[4\sin^2 2\alpha+(\cos6\alpha-\cos2\alpha)]$

$=\frac{1}{32}(4\sin^2 2\alpha-4\sin^2 2\alpha\cos2\alpha)$

$=\frac{1}{8}\sin^2 2\alpha(1-\cos2\alpha)$

$=\frac{1}{8}\cdot4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\cdot2\sin^2\alpha$

$=\sin^4\alpha\cdot\cos^2\alpha=$ 左.

∴ 原式成立.

证2：左 $=\sin^4\alpha\cdot\cos^2\alpha$

$=\left(\frac{1-\cos2\alpha}{2}\right)^2\cdot\frac{1+\cos2\alpha}{2}$

$=\frac{(1-\cos2\alpha)(1-\cos^2 2\alpha)}{8}$

$=\frac{1}{8}(1-\cos2\alpha)\cdot\sin^2 2\alpha$

$=\frac{1}{16}(1-\cos2\alpha)(1-\cos4\alpha)$

$=\frac{1}{16}(1-\cos2\alpha-\cos4\alpha+\cos2\alpha\cos4\alpha)$

$=\frac{1}{16}[1-\cos2\alpha-\cos4\alpha+\frac{1}{2}(\cos6\alpha+\cos2\alpha)]$

$=\frac{1}{32}(2-\cos2\alpha-2\cos4\alpha+\cos6\alpha)=$ 右

∴ 原式成立.

例3 在△$ABC$中，若$2b=a+c$，

求证 $\cos A+2\cos B+\cos C=2$.

分析：这是在"$2b=a+c$"条件下证明恒等关系，所以称之为条件恒等式.证明这类问题时，如引用"左右法"则应注意在推证过程中，适时运用这个已知条件.

证：∵ $2b=a+c$,

∴ $2\cdot2R\sin B=2R(\sin A+\sin C)$.

$4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}$,

$4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}=2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{A-C}{2}$,

则 $\cos\frac{A-C}{2}=2\sin\frac{B}{2}$.

又 $\cos A+2\cos B+\cos C$

$=2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}+2\left(1-2\sin^2\frac{B}{2}\right)$

$=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A-C}{2}-4\sin^2\frac{B}{2}+2$

$\left(\because \cos\frac{A-C}{2}=2\sin\frac{B}{2}\right)$

$=4\sin^2\frac{B}{2}-4\sin^2\frac{B}{2}+2=2$.

∴ 原式成立。

## 二、左右同一法

如果恒等式两端繁简相近，或仅由一端推证至另一端不易实现，则可以采取使两端同时变形，化繁为简，求得相同结果的证法，我们称之为"左右同一法"。

例4 求证 $\frac{1-\sec A+\mathrm{tg}A}{1+\sec A-\mathrm{tg}A}=\frac{\sec A+\mathrm{tg}A-1}{\sec A+\mathrm{tg}A+1}$.

证：左 $=\frac{1-\sec A+\mathrm{tg}A}{1+\sec A-\mathrm{tg}A}$

$=\frac{(1-\sec A+\mathrm{tg}A)(1+\mathrm{tg}A+\sec A)}{(1+\sec A-\mathrm{tg}A)(1+\sec A+\mathrm{tg}A)}$

$=\frac{(1+\mathrm{tg}A)^2-\sec^2 A}{(1+\sec A)^2-\mathrm{tg}^2 A}$

$=\frac{1+2\mathrm{tg}A+\mathrm{tg}^2 A-\sec^2 A}{1+2\sec A+\sec^2 A-\mathrm{tg}^2 A}$

$=\frac{2\mathrm{tg}A}{2(1+\sec A)}=\frac{\sin A}{1+\cos A}$.

右 $=\frac{\sec A+\mathrm{tg}A-1}{\sec A+\mathrm{tg}A+1}$

$=\frac{(\sec A+\mathrm{tg}A-1)(\sec A-\mathrm{tg}A+1)}{(\sec A+\mathrm{tg}A+1)(\sec A-\mathrm{tg}A+1)}$

$=\frac{\sec^2 A-(\mathrm{tg}A-1)^2}{(\sec A+1)^2-\mathrm{tg}^2 A}$

$=\frac{\sec^2 A-\mathrm{tg}^2 A+2\mathrm{tg}A-1}{\sec^2 A+2\sec A+1-\mathrm{tg}^2 A}$

$=\frac{2\mathrm{tg}A}{2(\sec A+1)}=\frac{\sin A}{1+\cos A}$.

∴左＝右 即原式成立。

## 三、转化法

某些三角恒等式的证明，引用"左右法"或"左右同一法"虽也是可能的，但变形过程或过于繁琐或不够顺畅，则可以考虑把原题的等式加以转化，使之易于入手，证法简单。如前面的"例4"，我们如不采用"左右同一法"，则可转而证明两端函数式之差为零（或两式之比为1），则有下面的证法：

**证：** $\because$ $\dfrac{1-\sec A+\mathrm{tg}A}{1+\sec A-\mathrm{tg}A}-\dfrac{\sec A+\mathrm{tg}A-1}{\sec A+\mathrm{tg}A+1}$

$$=\frac{[(1+\mathrm{tg}A)^2-\sec^2 A]-[\sec^2 A-(1-\mathrm{tg}A)^2]}{(1+\sec A)^2-\mathrm{tg}^2 A}$$

$$=\frac{2\mathrm{tg}A-2\mathrm{tg}A}{(1+\sec A)^2-\mathrm{tg}^2 A}=0,$$

$$\therefore\ \frac{1-\sec A+\mathrm{tg}A}{1+\sec A-\mathrm{tg}A}=\frac{\sec A+\mathrm{tg}A-1}{\sec A+\mathrm{tg}A+1}.$$

这种把原式加以变形，转而证明和它等价的另一个等式的证法叫"转化法"。这种方法使用灵活，变化很多，请看以下几个例题。：

**例5** 求证 $\dfrac{\mathrm{tg}\phi\sin\phi}{\mathrm{tg}\phi-\sin\phi}=\dfrac{\mathrm{tg}\phi+\sin\phi}{\mathrm{tg}\phi\sin\phi}$

**证：**

$\because$ $(\mathrm{tg}\phi-\sin\phi)(\mathrm{tg}\phi+\sin\phi)=\mathrm{tg}^2\phi-\sin^2\phi$
$=\sin^2\phi(\sec^2\phi-1)=\mathrm{tg}^2\phi\sin^2\phi.$

$\therefore$ $\dfrac{\mathrm{tg}\phi\sin\phi}{\mathrm{tg}\phi-\sin\phi}=\dfrac{\mathrm{tg}\phi+\sin\phi}{\mathrm{tg}\phi\sin\phi}$.

**例6** 求证

$\cos(n-1)A\cdot\cos A-\cos nA=\sin(n-1)A\cdot\sin A$

**分析：** 如采用"左右法"，可把$\cos(n-1)A$展开后，经过比较繁琐的变形推证至右端. 也可以把$\cos nA$改写为$\cos[(n-1)A+A]$展开后化简，也得到同样的结果，但变形技巧上要求较高，不易掌握. 如果采用"转化法"，问题就变得十分简单，而且也易于掌握了.

**证：**

$\because$ $\cos(n-1)A\cdot\cos A-\sin(n-1)A\cdot\sin A$
$=\cos[(n-1)A+A]=\cos nA.$

$\therefore$ $\cos(n-1)A\cdot\cos A-\cos nA$
$=\sin(n-1)A\cdot\sin A.$

**例7** 求证

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+h)+\cos(\alpha+2h)+\cdots+\cos(\alpha+99h)=\frac{\sin 50h}{\sin\frac{h}{2}}\cdot\cos\left(\alpha+\frac{99}{2}h\right)$$

**分析：** 应该说，这是一个难以入手的题目，如果只从"左右法"考虑，则要求有较高的变形技巧. 但如果考虑变化原题的条件，转而证明右端的分母 $\sin\frac{h}{2}$与左端的式子的乘积恰等于右端的分子 $\sin 50h\cdot\cos\left(\alpha+\frac{99}{2}h\right)$，问题就变难为易了。

**证：** 由于

$$\cos\alpha\cdot\sin\frac{h}{2}=\frac{1}{2}\sin\left(\alpha+\frac{h}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\alpha-\frac{h}{2}\right),$$

$$\cos(\alpha+h)\cdot\sin\frac{h}{2}=\frac{1}{2}\sin\left(\alpha+\frac{3h}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\alpha+\frac{h}{2}\right),$$

$$\cos(\alpha+2h)\cdot\sin\frac{h}{2}=\frac{1}{2}\sin\left(\alpha+\frac{5h}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\alpha+\frac{3h}{2}\right),$$

$$\cdots=\cdots$$

$$\cos(\alpha+99h)\cdot\sin\frac{h}{2}=\frac{1}{2}\sin\left(\alpha+\frac{199}{2}h\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\alpha+\frac{197}{2}h\right).$$

各式相加，得

$$\sin\frac{h}{2}[\cos\alpha+\cos(\alpha+h)+\cos(\alpha+2h)+\cdots+\cos(\alpha+99h)]$$
$$=\frac{1}{2}\sin\left(\alpha+\frac{199}{2}h\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\alpha-\frac{h}{2}\right)$$
$$=\cos\left(\alpha+\frac{99}{2}h\right)\cdot\sin 50h.$$

$\therefore$ $\cos\alpha+\cos(\alpha+h)+\cos(\alpha+2h)+\cdots+\cos(\alpha+99h)$
$=\dfrac{\sin 50h}{\sin\frac{h}{2}}\cos\left(\alpha+\dfrac{99}{2}h\right).$

## 四、 综合法

有时，我们要证的恒等式，实际上是由某些已知的等式演化而来的，由已知的等式出发，逐步推证出所求的结果，这种证法称之为综合法。

**例8** 求证：

$$\mathrm{tg}35°+\mathrm{tg}25°+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}35°\mathrm{tg}25°=\sqrt{3}.$$

**分析：** 显然，由于$35°+25°=60°$，而且已知$\mathrm{tg}60°=\sqrt{3}$从而得出下面的"综合法"证明.

**证：**

$\because$ $\mathrm{tg}60°=\mathrm{tg}(35°+25°)=\sqrt{3},$

$\therefore$ $\dfrac{\mathrm{tg}35°+\mathrm{tg}25°}{1-\mathrm{tg}35°\cdot\mathrm{tg}25°}=\sqrt{3}.$

去分母，得

$$\mathrm{tg}35°+\mathrm{tg}25°=\sqrt{3}-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}35°\mathrm{tg}25°,$$

$\therefore$ $\mathrm{tg}35°+\mathrm{tg}25°+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}35°\mathrm{tg}25°=\sqrt{3}.$

**例9** 设$\phi$和$\theta$都是锐角，且

$$\frac{2}{\cos\phi}=\frac{1}{\cos(\phi+\theta)}+\frac{1}{\cos(\phi-\theta)}.\quad\left(\phi+\theta\neq\frac{\pi}{2}\right)$$

求证　$\cos\phi=\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}$.

**分析**：这是个条件恒等式，如果我们只考虑待证的等式“$\cos\phi=\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}$”采用“左右法”“左右同一法”或“转化法”，都由于式子太简单而无从入手．这时，则应当从已知的等式出发，用综合法推证本题的结果．

**证**

$$\because\quad \frac{2}{\cos\phi}=\frac{1}{\cos(\phi+\theta)}+\frac{1}{\cos(\phi-\theta)}$$

$$\therefore\quad \frac{2}{\cos\phi}=\frac{\cos(\phi-\theta)+\cos(\phi+\theta)}{\cos(\phi+\theta)\cdot\cos(\phi-\theta)}$$

$$=\frac{2\cos\phi\cos\theta}{\frac{1}{2}(\cos2\phi+\cos2\theta)}$$

$$=\frac{2\cos\phi\cos\theta}{\frac{1}{2}(2\cos^2\phi-1+1-2\sin^2\theta)}$$

$$=\frac{2\cos\phi\cos\theta}{\cos^2\phi-\sin^2\theta}.$$

$$2\cos^2\phi\cdot\cos\theta=2(\cos^2\phi-\sin^2\theta),$$

$$\therefore\quad \cos^2\phi=\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$$

$$=\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$=2\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

$\because$　$\phi$和$\theta$都是锐角，

$\therefore$　$\cos\phi=\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}$.

## 五、分　析　法

有些条件恒等式，条件和结论间的关系不很明显，如果采用前面几种证法，仅从已知条件出发，难以确定变形方向，这时就可以从题目的结论出发，从题断逆推到题设，如果其中每个步骤都是可逆的，实际上就等同于“综合法”的证明．这个过程，我们称之为“分析法”证明．

**例**10　若$A+B=225°$,

求证

$$\frac{\operatorname{ctg}A}{1+\operatorname{ctg}A}\cdot\frac{\operatorname{ctg}B}{1+\operatorname{ctg}B}=\frac{1}{2}.$$

**证**：

若$\dfrac{\operatorname{ctg}A}{1+\operatorname{ctg}A}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}B}{1+\operatorname{ctg}B}=\dfrac{1}{2}$,

应有　$(1+\operatorname{ctg}A)(1+\operatorname{ctg}B)=2\operatorname{ctg}A\cdot\operatorname{ctg}B$,

即　$\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B=\operatorname{ctg}A\cdot\operatorname{ctg}B-1$,

$$\frac{\operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B-1}{\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B}=1$$

则应有　$\operatorname{ctg}(A+B)=1$,

$\because$　$A+B=225°$，$\therefore$　可知$\operatorname{ctg}(A+B)=1$是正确的．又由于这个过程每一步都是可逆的，所以原式成立．

**例**11

$$若\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta}=\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin\theta},$$

**求证**$\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\theta=\operatorname{ctg}(\alpha+\theta)+\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$

**分析**：　本题如果采用“综合法”证明，难以确定从$\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta}=\dfrac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin\theta}$出发的变形方向，如果采用“左右法”又不易看出如何利用这个已知条件，所以采用“分析法”，从结果逆推回去，就能找出解题的途径．

**证**：

若$\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\theta=\operatorname{ctg}(\alpha+\theta)+\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$,

则应有

$$\frac{\cos\beta}{\sin\beta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\cos(\alpha+\theta)}{\sin(\alpha+\theta)}+\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)},$$

移项得

$$\frac{\cos\beta}{\sin\beta}-\frac{\cos(\alpha+\theta)}{\sin(\alpha+\theta)}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)},$$

通分得　$$\frac{\sin(\alpha+\theta)\cos\beta-\cos(\alpha+\theta)\sin\beta}{\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\theta)}$$

$$=\frac{\sin(\alpha-\beta)\cos\theta+\cos(\alpha-\beta)\sin\theta}{\sin\theta\cdot\sin(\alpha-\beta)},$$

则应有

$$\frac{\sin(\alpha-\beta+\theta)}{\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\theta)}=\frac{\sin(\alpha-\beta+\theta)}{\sin\theta\cdot\sin(\alpha-\beta)}.$$

$\because$　分子相同，则只须
$\sin\beta\sin(\alpha+\theta)=\sin\theta\cdot\sin(\alpha-\beta)$

即应有　$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta}=\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin\theta}.$$

而这等式恰为已知条件，且每一步均可逆推，故原式成立．

值得注意的是，“分析法”的推论过程，既可看作证明方法，也可以当作寻求解法的一种手段，而且是相当有效果的手段．很多问题（如前面的“例10”）都可先用“分析法”找出条件和结论的因果关系，然后用“综合法”写出证明过程．

这里介绍了几种证明恒等式的方法，各种方法各有特点，各有自己的适用范围，但又没有严格的界限，在应用中，可以互相补充，互相印证．同学们应在练习中，灵活掌握，逐步做到融会贯通．在开始时，对同一个题目，用每种方法都去证一遍，将是十分有益，也是十分有趣的，有志于学好恒等式证明的同学不妨试一试．

# 物理

## 关于联结体问题的讨论

郑　人　凯

在解决联结体运动问题时，同学们都知道用隔离法来解。但是为什么要用隔离法？是否所有的联结体运动都要用隔离法呢？例如，一台机车牵引着两节车厢在平直轨道上加速前进，如图1(a)所示。如果我们研究

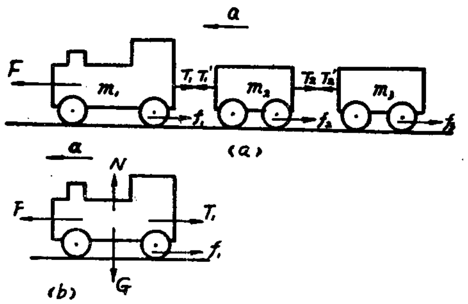



图1

的对象是整个列车的运动情况，例如求列车的加速度$a$，那么根据牛顿定律$F_{合外}=ma$，则在水平方向上$F-f_1-f_2-f_3=(m_1+m_2+m_3)\cdot a$，这时机车与第一节车厢之间的相互作用力$T_1$和$T_1'$，和第一节车厢与第二节车厢之间的相互作用力$T_2$和$T_2'$，对于整个列车来说是内力，对列车运动是不会有影响的。因此只要知道火车的牵引力$F$和$m_1$、$m_2$、$m_3$以及铁轨和车轮间的摩擦系数$\mu$，就可以直接求出$a$，并不需用隔离法。如果要求内力$T_1$和$T_1'$，那么选择整个列车为研究对象就求不出来了，必须把机车从整个列车中隔离出来，单独分析机车受力情况。此时内力$T_1$就是机车受到的外力中的一个。在水平方向对机车应用牛顿定律知$F-f_1-T=m_1a$，参看图1(b)。因此联结体问题，要根据题目的要求来确定研究的对象。从解题方法说有整体法和隔离法两种。在求内力时，则必须用隔离法。

在利用隔离法解决联结体问题时，在解题方法和步骤上大体如下：（1）将联结体中每个物体从整体中隔离出来，分析每个隔离体受外力情况，并画出力的分析图；(2)正确地判断出这部分物体的运动状态，其中包括标出运动初速度方向和加速度方向，如果需要还要分析隔离体之间加速度的关系；（3）选择好坐标系后，再运用牛顿第二定律列出每一个隔离体的运动方程；（4）解方程组求未知量。

在分析联结体运动问题时，还有以下几点要特别注意的问题：

一、在联结体的加速运动中，如果认为力可以不变的从一个连接体传递到另一个连接物体上就错误了，因为物体产生加速度是需要力的。例如，设在光滑的水平面上有两个木块$M$和$m$，当外力$F$作用于$M$，使两木块一起从静止开始加速运动。如图2(a)所示。那么$m$受到$M$的作用力还是$F$吗？不是！试看下面分析：

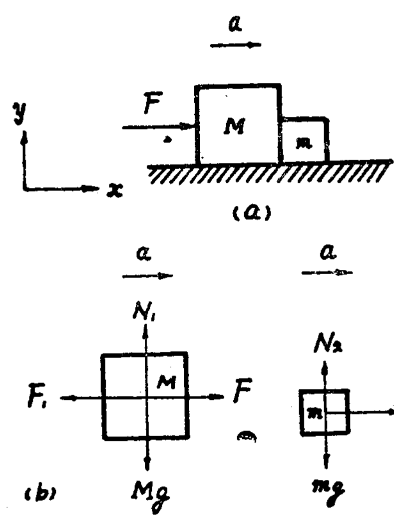


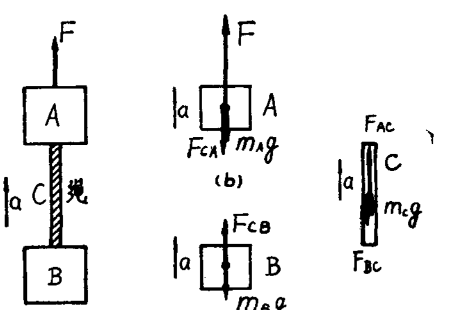

图2

我们运用隔离法，分别分析$M$和$m$的受力情况。外力$F$只作用在$M$上，并没有直接作用在$m$上，图2(c)中的$F_1'$才是$M$对$m$的作用力，而图2(b)中的$F_1$是$m$对$M$的反作用力。由图可分别列出$M$与$m$在水平方向的运动方程$F-F_1=Ma$；

$F_1'=ma$；$\because |F_1'|=|F_1|$，$\therefore F_1'=\dfrac{m}{M+m}F$，

这个结果就充分说明木块$m$受到的力不是外力$F$通过$M$传递到$m$木块上的力。

二、在两个相邻的隔离体之间的相互作用力，总是大小相等，方向相反的作用力和反作用力。但有同学认为这两个相邻的相互作用力大小不相等，例如有的同学认为在上述的例子中，由于$M$推动$m$向前加速运动，那么一定是$F_1'>F_1$。这看法所以错误是因为违背了牛顿第三定律。但是如果在两个隔离体之间是用绳子联结的，则它们之间的相互作用力相等是有条件的。例如，设有$A$、$B$两个物体由一段绳子连接，当$A$受外力$F$使它们从静止开始在竖直方向向上作加速运动，如图3(a)所示。如果连接$AB$的绳是粗绳，质量不能忽略。那么，隔离体一共就有三个，如图3(b)(c)(d)所示。据$F_{合外}=ma$知




(a)　(c)　(d)

图 3

$$F-F_{CA}-m_Ag=m_Aa \qquad (1)$$
$$F_{AC}-m_Cg-F_{BC}=m_C\cdot a \qquad (2)$$
$$|F_{CA}|=|F_{AC}|$$
$$F_{CB}-m_Bg=m_B\cdot a \qquad (3)$$
$$|F_{BC}|=|F_{CB}|$$

从以上三个方程可以看出$F_{CA}\neq F_{CB}$，而只有当绳子质量$m_C=0$时，从（2）式可得$F_{AC}=F_{BC}$。所以，用绳子连接在一起的加速运动的联结体之间的相互作用力，在量值上相等是有条件的。这条件就是不计绳子的质量。

三、在联结体之间，每个隔离体的加速度是互相牵连的。这一点在分析联结体运动时非常重要。在列方程后往往发现所求的未知量数目多于列出来的隔离体的运动方程数目，这时找出隔离体之间加速度的相互关系，将成为解题的关键。

**例1**　设如图4（a）所示，外力$F$作用于质量为$M$的物体上，有一轻滑轮固定在$M$上用一细绳通过滑轮将$m$与墙水平连结，使$M$与$m$可在水平光滑桌面上加速运动，如果外力$F$及两个光洁的铁块质量$M$和$m$均为已知，试求$M$和$m$的加速度和绳中张力，绳和滑轮质量以及滑轮的摩擦力均可忽略不计。

**解**　将联结体隔离成三部分，受力图如图4(b)(c)(d)据$F_{合外}=m\cdot a$，则对于$M$物体：$F-T_1'=Ma_1$……(1) $|T_1|=|T_1'|$ 对于$m$物体：$T_2'=ma_2$……(2) $|T_2|=|T_2'|$ 对于滑轮：$T_1=2T_2$（滑轮质量和摩擦力不计）…(3)

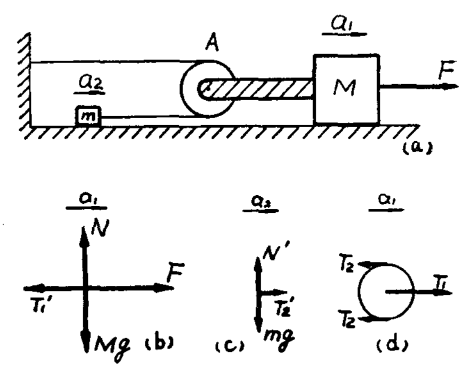



图 4

这时三个方程有四个未知数，但是从图4(a)上还可以看到，$A$移动$d$，则$m$在相同时间内则移动$2d$，$\therefore a_2=2a_1$……(4)这样联立求解这四个方程就可得到$T_1$、$T_2$和$a_1$、$a_2$的量值了。

**例2**　如图5(a)所示，设在水平面上放有两个相同的正立方体，质量皆是$m$，在

它们之间放一个质量是$M$的等腰尖劈，顶角是$2\alpha$。立方体跟水平面的摩擦系数为$\mu$。当忽略立方体与劈之间的摩擦时。求立方体的加速度。

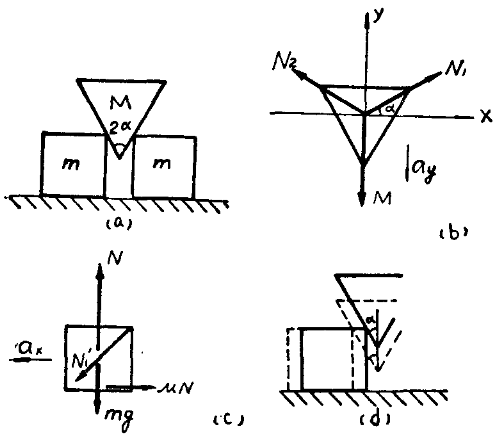



图 5

**解** 隔离$M$和$m$，受力图如图5(b)(c)所示，并运用正交分解法，则对于尖劈：

$$\begin{cases} Mg - N_1\cdot\sin\alpha - N_2\cdot\sin\alpha = Ma_y & (1) \\ N_1\cdot\cos\alpha = N_2\cdot\cos\alpha & (2) \end{cases}$$

对于左边正方体：$N_1'\cdot\cos\alpha - \mu N = ma_x$ (3)

$N-(N_1'\cdot\sin\alpha+mg)=0$ (4) $|N_1| = |N_1'|$

由两个物体的运动共列四个方程式。而未知量$a_y, a_x, N_1, N_2, N$共有五个。因此必须考虑两个物体($M$与$m$)加速度$a_x$和$a_y$之间的牵联。设尖劈竖直向下的位移是$S_y$，则左边立方体在相同时间内的水平位移是$S_x$，则由图5(d)知$\frac{S_x}{S_y}=\text{tg}\alpha$

$$\therefore \frac{\frac{1}{2}a_x\cdot t^2}{\frac{1}{2}a_y\cdot t^2}=\text{tg}\alpha$$

$$\therefore a_x = a_y\cdot\text{tg}\alpha \quad (5)$$

将(1)(2)(3)(4)(5)式联立求解，最后可得

$$a_x=\frac{M-\mu(M+2m)\cdot\text{tg}\alpha}{2m\cdot\text{tg}\alpha+M\cdot\text{ctg}\alpha-\mu M}\cdot g$$

四、要特别注意在每个隔离体的运动方程中的加速度都是以地面为参照系的。

这是因为牛顿运动定律只适用于惯性参照系。如果以加速运动的物体为参照系（非惯性系），牛顿运动定律就不能适用了。

**例 3** 如图6（a）所示，物体$M$重60千克，人重50千克·软梯用绳子跨过定滑轮与物体$M$相连。人从地面由静止开始，相对于梯子以6.6米／秒$^2$的加速度向上爬。试求出发后1秒末人对地面的高度是多少？（设滑轮和软梯的质量以及滑轮的摩擦阻力均不计）。

**解** 在这个联结体问题中，人和重物为两个隔离体。当绳和滑轮、软梯质量不计时，可认为人与重物直接相互作用，所以$|T|=|T'|$，将人和物分别隔离，受力图如图6（b）（c）所示，以地面为参照系，则

$$\begin{cases} \text{对于人的运动方程} T - mg = m\cdot a_{\text{人地}} & (1) \\ \text{对于重物的运动方程} T' - Mg = M\cdot a_{\text{物地}} & (2) \end{cases}$$

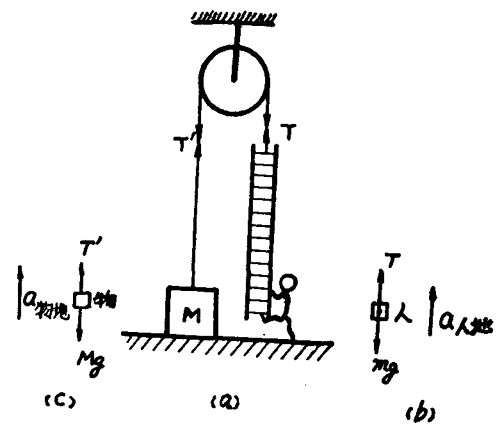



图 6

∵牛顿运动定律仅适用于惯性系

由相对加速度公式知

$$a_{\text{人地}} = a_{\text{人梯}} + a_{\text{梯地}}$$

如选$a_{\text{人梯}}$为正，则$a_{\text{梯地}}$为负，因两者方向相反，所以写成算术式则为

$$a_{\text{人地}} = a_{\text{人梯}} - a_{\text{梯地}} \quad (3)$$

而且 $|a_{\text{梯地}}| = |a_{\text{物地}}|$ (4)

将四个方程式联立可以求出人爬梯时，人对地的加速度$a_{\text{人地}}=4.51$米/秒$^2$ ∵$h=\frac{1}{2}at^2$

∴$h=\frac{1}{2}\times4.51\times1^2$[米]$=2.25$米即1秒末人距地面的高度是2.25米。

# 从速度的合成谈起

邱济隆

当一个物体在同时参与两种运动的情况下，求物体运动的合速度时，就要运用平行四边形法则进行速度的合成。

〔例如〕 有一艘大船在静止的水中以 4 米／秒的速度向东行驶，同时在甲板上有一辆小车以 3 米／秒的速度向北行驶，求这辆小车的合速度的大小和方向。

〔解〕$\vec{V}_1$表示车在甲板上运动的速度、$\vec{V}_2$表示船在静水中的速度、$\vec{V}$表示车的合速度。

则：$\vec{V}=\vec{V}_1+\vec{V}_2$

如图1所示，运用平行四边形法则求合速度。

$V=\sqrt{V_1^2+V_2^2}=5$米/秒

$\alpha=\arccos\frac{4}{5}\approx 37°$

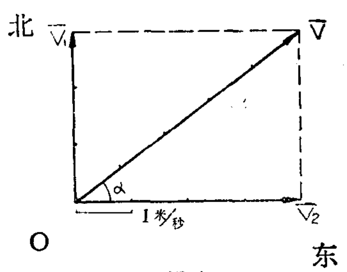



图 1

在上面运算过程中，$\vec{V}_1$是车以船为参照物时的速度，也可以用$\vec{V}_{车对船}$表示；$\vec{V}_2$是船以河岸为参照物时的速度（因为水以河岸为参照物是静止的），也可以用$\vec{V}_{船对岸}$表示；$\vec{V}$是车以岸为参照物时的速度，用$\vec{V}_{车对岸}$表示。显然前面的运算式子$\vec{V}=\vec{V}_1+\vec{V}_2$，就是$\vec{V}_{车对岸}=\vec{V}_{车对船}+\vec{V}_{船对岸}$，由此加以推广，可以得到一个普遍适用的结论。

$\vec{V}_{ac}=\vec{V}_{ab}+\vec{V}_{bc}$

上式称为速度合成定理。在求矢量和$\vec{V}_{ac}$时，应用三角形法则更为方便，如图2所示。

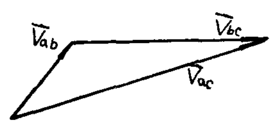



图 2

在运用速度合成定理时要注意以下几点：

①每个速度的右下角有两个字母，前者是被观察和研究的物体，后者是参照物。

②$a$对$b$的速度$\vec{V}_{ab}$与$b$对$a$的速度$\vec{V}_{ba}$之间有如下关系，$\vec{V}_{ba}=-\vec{V}_{ab}$。

③矢量加减式的公式变形与代数式相同。如果要求$c$对$b$的速度$\vec{V}_{cb}$。则$\vec{V}_{cb}=-\vec{V}_{bc}$，又因为$\vec{V}_{ac}=\vec{V}_{ab}+\vec{V}_{bc}$，所以$-\vec{V}_{bc}=\vec{V}_{ab}-\vec{V}_{ac}$，最后可得$\vec{V}_{cb}=\vec{V}_{ab}+\vec{V}_{ca}$，如图3所示。图3中的$\vec{V}_{cb}$与图2中的$\vec{V}_{bc}$，是两个大小相等，方向相反的量。

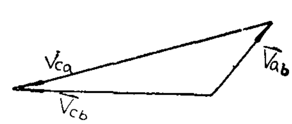



图 3

〔例一〕火车以10米/秒的速度沿水平铁轨行驶，雨点因受风的影响，和竖直方向成30°偏向火车前进方向落下，速度大小是5米/秒，求雨点对坐在车中的乘客的速度。

〔分析〕火车的速度是相对于地说的，即$\vec{V}_{车对地}=10$米/秒，雨点的速度也是相对