

西南師範學院 科學技術論文選集

(一)

一九八四年五月

西南师范学院
科学技术論文选集

(一)

科 研 处 编

一九八四年五月

**SELECTED THESES ON SCIENCE AND
TECHNOLOGY OF THE SOUTHWEST-CHINA
TEACHERS COLLEGE**

VOLUME ONE

EDITED BY
SCIENTIFIC RESEARCH DIVISION

May 1984

前 言

西南师范学院是教育部直属的一所规模较大、学科专业设置较齐全的综合性师范学院。主要任务是为国家培养中等学校和部分高等学校的师资。现设有13个系、17个专业。其中理科设有数学系、物理学系、化学系、生物学系、地理学系。设置的科学研究机构有亚热带生物与地理研究所、新材料、自动化、计算机应用、沼气、激光研究室，以及西亚地理研究室等。

建院33年来，学院坚持党的教育方针，重视对基础科学和应用科学研究，重视科学技术交流，有计划地选派教师出国访问和进修，聘请外国专家来院讲学，邀请国内外著名学者来院任教或与我院学者合作开展科学研究。并且编辑出版了学院学报（自然科学版），在国内外发行。

为了更加广泛地进行科学技术交流，充分发挥科学技术的继承和借鉴作用，鼓励创作和科学研究工作的开展，提高教学质量和学术水平，我们编辑了这本《科学技术论文选集》。收入选集的是我院理科教师在国内外知名刊物上发表的论文。由于已经发表的论文较多，本选集篇幅有限，收入的只能是其中一部分。今后随着我院教学和科学研究的发展，将陆续搜集编印。

论文按数学、物理学、化学、生物学、地理学的次序编排。

由于编者水平有限，选集存在着缺点是难以避免的，敬请指正。

编者

PUBLISHER'S PREFACE

The Southwest-China Teachers College is a comprehensive large-scale institute for higher education. The chief aim of this college is to prepare teachers for middle schools, normal schools and teachers colleges. There are thirteen departments with seventeen specialities offered in this college. Concerning natural sciences, there are the Departments of Mathematics, Physics, Chemistry, Biology, and Geography. Various research groups have been set up, such as the Research Institute of Subtropical Biogeography, and research sections for West Asian geography, new materials, automation, computers, methane and laser.

In the past 33 years, in line with the Party's educational policy the college has paid much attention to research work in basic and applied sciences. Our college highly values international academic exchanges. It sends teachers abroad on tours of investigation or for further studies. It also invites foreign experts in literature and education to work here. Well known scientists or experts are invited to give lectures or to undertake scientific researches in cooperation with the researchers here. In addition, we edit and publish a journal of natural science and distribute it at home and abroad.

In order to promote scientific and technical communication, give full play to the role of science and technology in our taking over and drawing on experiences of all times and of all countries, encourage creative and research work and raise the level of teaching work and academic achievement, we have started the edition of this "Selected Theses on Science and Technology". The series will contain theses by teachers of natural science working in our college, which have been published in well known internal or external scientific journals and later on revised by the authors themselves.

The theses included in this series are arranged in five parts: mathematics, physics, chemistry, biology and geography. They are only a small portion of what has been published. With the advance of our teaching work and scientific research, we shall compile and publish more series of the same kind.

In view of the limited vista of the editors, our work must leave a lot to be desired. Advice and critical comments are most welcome.

目次

围型近似解析函数与线性偏微分方程式的解的边界状态	张孝礼 (1)
椭圆型偏微分方程的白尔氏 (Lipman Bers) 理论	张孝礼 (28)
论度量空间的补全法	李孝传 (79)
Burnside定理的一个推广	陈重穆 (89)
内 Σ 群	陈重穆 (93)
内 Σ 群 (续)	陈重穆 (99)
满势群—— Z_m 可分解群	陈重穆 (105)
有限群有正规 p -补的一个定理	陈重穆 (120)
Some Characterizations of a Finite Supersolvable Group	Chen Zhongmu (124)
内、外超可解群与超可解群的充分条件	陈重穆 (129)
A Note on $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$	Yang Xungian (142)
非平稳高斯序列的极值之渐近分布	谢盛荣 (143)
平稳序列的第 r 个最大值	谢盛荣 (149)
平稳高斯序列的极值	谢盛荣 (163)
关于巨正则系综与正则系综等价性的证明	邓昭镜 (167)
亚氨基二磺酸铵 (NS) 镀银	李声泽 张茂清 (182)
关于 O, O-二甲基二硫代磷酸生产中形成中性油原因的探讨	黄志桂 赵明婕 (188)
我国橘类植物由来的初步探索	戴蕃璠 (197)
植物对环境的生物化学适应——兼介绍哈鲍恩的《生态生物化学导论》	李瑞智 钟章成 (209)
四川卧龙地区珙桐群落特征的初步研究	钟章成 秦自生 史建慧 (216)
小麦 M_1 代长芒突变嵌合体的遗传研究	洪锡钧 (228)
丁酸钠对M期同步的 HeLa 细胞的阻断效应	洪锡钧 张鸿卿 薛绍白 (238)
四川省峨眉山森林植被垂直分布的初步研究	李旭光 (245)
四川省东部地区地貌特征地貌分类与地貌区划	穆桂春 (261)
四川盆地的自然地理特征及其演变	杨宗干 (271)
人底心理活动是否人底高级神经活动	叶 麋 (277)
对120名优秀教师和模范班主任心理特点的初步分析	刘兆吉 黄培松 (286)
影响儿童感知算式的两个有关因素的实验	张增杰 汪盼霞 (298)
六、七岁儿童时间知觉的初步研究	张增杰 黄希庭 (307)
5至8岁儿童时间知觉的实验研究	黄希庭 张增杰 (315)
学前儿童因果思维发展的初步实验研究	何其恺 周励秋 徐秀娣 (324)

CONTENTS

Approximately Analytic Functions of Bounded Type and Boundary Behaviour of Solutions of Elliptic Partial Differential Equations	Zhang Xiaoli (1)
Lipman Bers' Theory on Elliptic Partial Differential Equations	Zhang Xiaoli (28)
On Completion of Metric Spaces.....	Li Xiaochuan (79)
An Extension of a Burnside's theorem	Chen Zhongmu (89)
Inner Σ -Groups.....	Chen Zhongmu (93)
Inner Σ -Groups (Continued)	Chen Zhongmu (99)
Full Power Groups— Z_m Decomposable Groups.....	Chen Zhongmu (105)
A Theorem of Finite Groups Having a Normal p -Complement	Chen Zhongmu (120)
Some Characterizations of a Finite Supersolvable Group	Chen Zhongmu (124)
Inner and Outer Supersolvable Groups and the Sufficient Conditions for a Group to Be Supersolvable	Chen Zhongmu (129)
A Note on $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$	Yang Xungian (142)
Asymptotic Distributions of Extremes in Nonstationary Gaussian Sequences	Xie Shengrong (143)
The Asymptotic Distributions of r -th Largest Values in Stationary Sequences.....	Xie Shengrong (149)
Extreme Values in Stationary Gaussian Sequences.....	Xie Shengrong (163)
On the Proof of the Equivalence Between the Grand Canonical Ensemble and Canonical Ensemble	Deng Zhaojing (167)
Electroplating of Silver from Imidodisulfonate Bath	Li Shengze et al (182)
An Approach to the Formation of Neutral Oil in the Process of Producing O,O-Dimethylphosphorodithioic Acid	Huang Zhigui et al (188)
Preliminary Survey on the Origin of the Citrous Plant in China.....	Dai Fanjin (197)
The Biochemical Adaptation of Plants to the Environment——	

And a Review on «Introduction to Ecological Biochemistry» by J. B. Harborne	Li Ruizhi et al (209)
Preliminary Studies on the Phytocoenological Features of the Davidia Involucrata Forests in the Wolong Region of Sichuan Province.....	Zhong Zhangcheng et al (216)
Genetic Research on the Chimaera of Awned Mutations in M ₁ Generation of Triticum Aestivum.....	Hong Xijun (228)
The Blocking Effect of n-Butyrate on the M-Phase Synchronized HeLa Cells.....	Hong Xijun et al (238)
Preliminary Investigation on the Vertical Distribution of the Forest Vegetation on the Emei Mountain of Sichuan Province	Li Xuguang (245)
Geomorphological Characteristics, Classification and Sectioning of the Eastern Area of Sichuan Province of China.....	Mu Guichun (261)
Physico-Geographical Features and Evolution of Sichuan Basin	Yang Zonggan (271)
L'activite Mentale de L'homme, Est-elle Son Activite Nerveuse Superieure?	Yeh Ling (277)
Preliminary Analysis of Psychological Characteristics of 120 Good Teachers and Model Class Instructors	Liu Zhaoji et al (286)
Эксперименты Над Двумя Элементами, Влияющими На Узнавание Детьми Арифметических Задач.....	Чжан Цзэнцзе и т. д. (298)
Первичное Исследование Восприятия Времени у Шестилетних и Семилетних Детей.....	Чжан Цзэнцзе и т. д. (307)
An Experimental Study on Time Perception of 5—8 Year-Old Children.....	Huang Xiting et al (315)
An Experimental Study of the Development of Causality Thinking in Pre-School Children	He Qikai et al (324)

围型近似解析函数与椭圆偏微分 方程式的解的边界状态

張 孝 礼¹⁾

绪 论

白尔氏在他的准解析函数²⁾一文中,曾介绍过近似解析函数 (approximately analytic functions) 的概念.本文目的在研究围型 (of bounded type) 近似解析函数的性质,并应用这种性质以研究椭圆第二级线性偏微分方程式的解.

精确言之,我们将证明下面关于椭圆偏微分方程式的四个定理.

(A) 设 D 为一被围领域 (bounded domain), 其边界为一有限个数继续可微分的曲线所组成. 设一偏微分方程式的形式为

$$(0.1) \quad A_{11}(x, y)\phi_{xx} + 2A_{12}(x, y)\phi_{xy} + A_{22}(x, y)\phi_{yy} \\ + A_1(x, y)\phi_x + A_2(x, y)\phi_y + A_0(x, y)\phi = 0,$$

这儿各实系数 $A(x, y)$ 是确定(defined)于领域 D_0 内的, D_0 包含 D 的闭包 $\bar{D}$, 各 $A(x, y)$ 在 D_0 内有连续偏导数至第二级并满足不等式 $A_{11}A_{22} - A_{12}^2 > 0$, (椭圆条件). 设 $\phi(x, y)$ 为(0.1)的解确定于领域 D 内, 并在 D 内满足不等式

$$(0.2) \quad \phi(x, y) \geq -k,$$

这儿 k 是某一正常数, 则在 D 所有的各界点上, 测度为零的点集可能为例外, $\phi(x, y)$ 有有限的辐射极限.

这个定理同下一个定理是Fatou定理[1.2]的推广.

(B) 设领域 D, D_0 及方程式(0.1)为与定理(A)内假设的相同. 设

$$(0.3) \quad A_0(x, y) \equiv 0.$$

设 $\phi(x, y)$ 为(0.1)的一解, 确定于领域 D 内并满足下面的条件

$$(0.4) \quad \phi_x^2 + \phi_y^2 < K < \infty,$$

则在 D 的边界所有各点上, 测度为零的点集可能为例外, $\phi_x(x, y)$ 及 $\phi_y(x, y)$ 有有限的辐射极限.

本文原载《数学学报》第3卷 第2期 1953年9月.

1) 作者在准备本文时曾得到L. Bers教授的帮助和鼓励.

2) 这篇文章(原文题名 "Pseudo-analytic function", 以下简称P.A.F.), 在作者完成本文时, 尚未发表, 但作者有机会得读其手稿P.A.F.的结果的一个大纲, 见于白尔氏教授所作的下面两文中:

"Partial differential equations and generalized analytic functions" and "Partial differential equations and generalized analytic functions, second notes."

(C) 在定理 (B) 的假设下, 设 ϕ_x 及 ϕ_y 之辐射极限在一正测度的界点集上为零,

则

$$(0.5) \quad \phi(x, y) \equiv \text{常数}.$$

这个定理是 F. and M. Riesz (见 [2] p. 197) 的结果的推广.

(D) 在定理 (B) 的假设下, 设 $z_\nu (=x_\nu + iy_\nu)$ $\nu=1, 2, \dots$ 为 D 内使 $\phi_x^2 + \phi_y^2 = 0$ 的诸点. 设 d_ν 为自 z_ν 至 D 的边界的距离, 并设 N_ν 为整数, 当 $(x, y) \rightarrow (x_\nu, y_\nu)$ 时有

$$\frac{\phi_x(x, y)^2 + \phi_y(x, y)^2}{[(x-x_\nu)^2 + (y-y_\nu)^2]^{N_\nu}} = O(1) \quad \nu=1, 2, \dots,$$

则或 $\phi(x, y) \equiv \text{常数}$ 或下面的级数

$$(0.6) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} N_\nu d_\nu$$

为一收敛级数.

这个定理是 Blaschke [3] (并见 [2] p. 178, p. 196) 对被围解析函数的零点的定理的推广.

一、圆型近似解析函数

1. 近似解析函数. 本文将 x 及 y 之函数写成 $z=x+iy$ 的函数, 并用

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

为微分算子.

定义 1.1. 在一领域 Δ 内, 有些孤立点可能为例外, 若一连续函数 $w(z)$ 依 x 及 y 的各第一级偏导数存在并连续, 并有一常数 A (近似解析性的常数) 存在, 且在 Δ 内导数存在之各点上, 满足下列不等式

$$(1.3) \quad |w_{\bar{z}}(z)| \leq A |w_z(z)|, \quad z \in \Delta,$$

则称 $w(z)$ 在领域 Δ 内为正规近似解析函数, 这儿 $w_{\bar{z}}(z) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} w(z)$.

引 1.1. 设 Δ 为一领域而 $w(z)$ 为一近似解析函数, 确定于 Δ 内. 设 $\zeta = \phi(z)$ 为一函数, 将 Δ 保角描绘成领域 Δ_1 . 以 $W(\zeta) = w[X(\zeta)]$, 此处 $X(\zeta)$ 为 $\phi(z)$ 之反函数, 则在 Δ_1 的每个闭子领域内 $W(\zeta)$ 为近似解析的. 并且, 若 $X'(\zeta)$ 是均匀被围的 (uniformly bounded), 则在 Δ_1 内 $W(\zeta)$ 为近似解析的.

证. 因
$$\frac{\partial}{\partial \zeta} W(\zeta) = \frac{\partial W}{\partial X} \frac{\partial \bar{X}}{\partial \zeta} = \frac{\partial w}{\partial z} \left(\frac{\partial \bar{X}}{\partial \zeta} \right),$$

$$\left| \frac{W'_1(\zeta)}{W(\zeta)} \right| = \frac{\left| \frac{\partial w}{\partial z} \right| \cdot \left| \frac{\partial \bar{X}}{\partial \zeta} \right|}{|W(\zeta)|} \leq \frac{A|w| \cdot |\overline{X'(\zeta)}|}{|w|} = A |\overline{X'(\zeta)}|.$$

因在 Δ_1 的每个闭子域内, $|X'(\zeta)|$ 达到它的极大值, 故 $W(\zeta)$ 在每个闭子域内是近似解析的. 当 $X'(\zeta)$ 是均匀的被围, 则 $W(\zeta)$ 的近似解析性推广至 Δ_1 的全域.

由这个引论的观点, 假设 Δ 为下面的领域

$$|z| < 1,$$

它的普遍性, 不会有重要的损失.

引1.2. 设在领域 Δ 内 $w(z)$ 是近似解析的, 并设 z_0 为 Δ 的一个孤立界点. 则对 α 的所有各值有

$$(1.4) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} |w(z) - \alpha| = 0,$$

或有一正整数 n 存在, 使

$$(1.5) \quad w(z) \sim \frac{a}{(z - z_0)^n}, \quad z \rightarrow z_0, \quad a \neq 0,$$

或极限

$$(1.6) \quad w(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} w(z)$$

存在且为有限数. 若 $w(z_0) = 0$, 则有一正整数 n 存在, 使

$$(1.7) \quad w(z) \sim a(z - z_0)^n, \quad z \rightarrow z_0, \quad a \neq 0,$$

或 $w(z)$ 恒等于零.

近似解析函数的此种性质已在白尔氏的文中证明了的[4, 5, 6].

符号“ $\sim$ ”表示几近等号. $w(z) \sim f(z)$, $z \rightarrow z_0$, 表示

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{w(z)}{f(z)} = 1.$$

定义1.2. 当一近似解析函数满足关系(1.5)时, 我们称它在点 $z = z_0$ 上有一第 n 级的极点. 当一近似解析函数满足关系式(1.7)时, 我们称它在点 $z = z_0$ 上有第 n 级的零点.

定义1.3. 在领域 Δ 内, 若一函数, 除去了它的孤立极点外, 是正规近似解析的, 则叫这个函数在 Δ 内为半纯 (meromorphic) 近似解析函数.

引1.3. 解析函数是近似解析的 (对于每个 A). 两近似解析函数的乘积及商皆是近似解析的.

证. 因Cauchy-Riemann方程式表明了一个解析函数依 $\bar{z}$ 的偏导数是零的事实, 故第一命辞的真确性是显明的.

设 $w_1(z)$ 及 $w_2(z)$ 为两近似解析函数, 并设 A_1 及 A_2 各为其近似解析常数. 则

$$\begin{aligned} |(w_1 w_2)_{\bar{z}}| &= |w_2 \cdot (w_1)_{\bar{z}} + w_1 \cdot (w_2)_{\bar{z}}| \\ &\leq A_1 |w_1| \cdot |w_2| + A_2 |w_1| \cdot |w_2| \end{aligned}$$

$$\leq (A_1 + A_2) |w_1 \cdot w_2| = A_3 |w_1 \cdot w_2|,$$

这儿 $A_3 = A_1 + A_2$.

若 $w_2 \neq 0$, 只在有些孤立点上为零. 在 $w_2 \neq 0$ 的点 z 上, 我们有

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{w_1}{w_2} \right)_{\bar{z}} \right| &= \left| \frac{w_2(w_1)_{\bar{z}} - w_1(w_2)_{\bar{z}}}{w_2^2} \right| \leq \frac{|w_2(w_1)_{\bar{z}} + w_1(w_2)_{\bar{z}}|}{|w_2|^2} \\ &\leq \frac{A_1 |w_1| \cdot |w_2| + A_2 |w_1| \cdot |w_2|}{|w_2|^2} = \frac{(A_1 + A_2) |w_1| \cdot |w_2|}{|w_2|^2} = A_3 \left| \frac{w_1}{w_2} \right|. \end{aligned}$$

引1.4 设领域 Δ 的边界 Δ' 为有限个数简单闭合曲线所组成, 设 $w(z)$ 在 Δ 内及 Δ' 上是连续的, 并设 $w(z)$ 依 x 及 y 的第一级偏导数在 Δ 内, 除有些有限个数的点外, 存在并是连续的. 则

$$(1.8) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta'} \frac{w(\xi) d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} \frac{w_{\bar{\xi}}(\xi) d\bar{\xi} d\eta}{\xi - z} = \begin{cases} w(z) & \text{若 } z \in \Delta \\ 0 & \text{若 } z \notin \Delta \end{cases},$$

这儿假设了双重积分的存在. 恒等式 (1.8) 曾被 Carleman^[7] 用于他的椭圆系一文中.

2. Poisson-Jensen^[8] (并见[2]p.156) 公式的推广

由引1.2看来, 半纯近似解析函数 $w(z) \neq 0$ 的零点与极点皆为孤点. 若 $w(z)$, $0 < |z| < 1$, 是这种函数, 不为 $z=0$ 之零点可排列成一贯点集 $z_1, z_2, \dots$ 使每零点出现的次数与它重复的次数相同, 并且 $|z_1| \leq |z_2| \leq \dots$ 我们叫 $\{z_v\}$ 为 $w(z)$ 的零点的贯点集. 我们同样定极点的贯点集 $\{p_v\}$ 的义. 又设有一整数 λ 及一数 $\alpha \neq 0$ 存在; 使有

$$(2.1) \quad w(z) \sim \alpha z^\lambda, \quad z \rightarrow 0.$$

定理2.1. 设 $w(z)$ 在 $|z| < 1$ 内为半纯近似解析函数 (近似解析性常数为 A). 假定 $w(z)$ 之零点及极点的贯点集各为 $\{z_v\}$ 及 $\{p_v\}$ 并满足 (2.1). 设 R 为 $0 < R < 1$ 的一个数, 并有 $R \neq |z_v|$, $R \neq |p_v|$, $v=1, 2, \dots$, 则对于 $0 < r < R$, $rei^\phi \neq z_v$, $rei^\phi \neq p_v$, $v=1, 2, \dots$, 有

$$\begin{aligned} (2.2) \quad \log |w(rei^\phi)| - \lambda \log r &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |R^{-\lambda} w(Rei^\theta)| \frac{(R^2 - r^2) d\theta}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi)} \\ &+ \sum_{0 < |z_i| < R} \log \left| \frac{R(z - z_i)}{R^2 - \bar{z}_i z} \right| - \sum_{0 < |p_i| < R} \log \left| \frac{R(z - p_i)}{R^2 - \bar{p}_i z} \right| + O(1), \quad \text{当 } R \rightarrow 1. \end{aligned}$$

证. 设

$$\begin{aligned} (2.3) \quad f(z) &= \log \left(\frac{w(z)}{z^\lambda \prod_{0 < |z_i| < R} \frac{R(z - z_i)}{R^2 - \bar{z}_i z}} \prod_{0 < |p_i| < R} \frac{R(z - p_i)}{R^2 - \bar{p}_i z} \right) \\ &= \log [z^{-\lambda} w(z)] - \sum_{0 < |z_i| < R} \log \frac{R(z - z_i)}{R^2 - \bar{z}_i z} + \sum_{0 < |p_i| < R} \log \frac{R(z - p_i)}{R^2 - \bar{p}_i z}. \end{aligned}$$

由引1.2及 λ , $\{z_v\}$, $\{p_v\}$ 等的定义看来, $f(z)$ 是一连续且不为零的函数的对数, 故当 $|z|$

$< R + \varepsilon$, ε 为一够小的正数时, $f(z)$ 是单值的. 我们有

$$(2.4) \quad |f_{\zeta}(\zeta)| = \left| \frac{w_{\zeta}(\zeta)}{w(\zeta)} \right| \leq A.$$

由(1.8)式, 得

$$(2.5) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z} - \frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta|<R} \frac{f_{\zeta}(\zeta)d\xi d\eta}{\zeta-z}.$$

当 $|z| < R$ 时, (2.5)式的右端第一个积分是 z 的一个解析函数. 取它的实数部分, 得

$$(2.6) \quad \operatorname{Re}\{f(z)\} = H(z) - \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \iint_{|\zeta| \leq R} \frac{f_{\zeta} d\xi d\eta}{\zeta - z} \right\},$$

这儿 $H(z)$ 为调和函数,

$$(2.7) \quad H(z) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z} \right\}, \quad |z| < R.$$

由Poisson的积分公式

$$(2.8) \quad H(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(Re^{i\theta}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 r +^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi)} d\theta,$$

这儿 $z = re^{i\phi}$, $r < R$. 由(2.6)及(2.3)

$$(2.9) \quad H(Re^{i\theta}) = \log \left| \frac{w(Re^{i\theta})}{R^{\lambda}} \right| + \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \iint_{|\zeta| \leq R} \frac{f_{\zeta}(\zeta)d\xi d\eta}{\zeta - Re^{i\theta}}.$$

故方程式(2.3)可写为

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \log |r^{-\lambda} w(re^{i\phi})| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{w(Re^{i\theta})}{R^{\lambda}} \right| \frac{(R^2 - r^2)d\theta}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi)} \\ &+ \sum_{0 \leq |z_i| < R} \log \left| \frac{R(z - z_i)}{R^2 - z_i z} \right| - \sum_{0 \leq |p_i| < R} \log \left| \frac{R(z - p_i)}{R^2 - p_i z} \right| + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta| \leq R} \frac{f_{\zeta}(\zeta)d\xi d\eta}{\zeta - Re^{i\theta}} \right) \frac{(R^2 - r^2)d\theta}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi)} \\ &- \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta| \leq R} \frac{f_{\zeta}(\zeta)d\xi d\eta}{\zeta - re^{i\phi}} \end{aligned}$$

现在由(2.4)得

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta| \leq R} \frac{f_{\zeta}(\zeta)d\xi d\eta}{\zeta - z} \right) &\leq \left| \frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta| \leq R} \frac{f_{\zeta}(\zeta)d\xi d\eta}{\zeta - re^{i\phi}} \right| \\ &\leq \frac{A}{\pi} \iint_{|\zeta| \leq R} \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - re^{i\phi}|}. \end{aligned}$$

由E. Schmidt[9]的著名不等式

$$(2.12) \quad \iint_D \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z|} \leq 2\pi \sqrt{\frac{D \text{ 的面积}}{\pi}},$$

故得

$$(2.13) \quad \left| \frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta| \leq R} \frac{f_{\bar{\zeta}}(\zeta) d\bar{\zeta} d\eta}{\zeta - re^{i\theta}} \right| \leq 2RA,$$

及

$$(2.14) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta| \leq R} \frac{f_{\bar{\zeta}}(\zeta) d\bar{\zeta} d\eta}{\zeta - Re^{i\theta}} \right) \frac{(R^2 - r^2) d\theta}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi)} < 2AR.$$

由此得

$$(2.15) \quad \left| \log \left| r^{-\lambda} w(re^{i\phi}) \right| - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| R^{-\lambda} w(Re^{i\theta}) \right| \frac{(R^2 - r^2) d\theta}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \phi)} \right. \\ \left. - \sum_{0 < |z_i| < R} \log \left| \frac{R(z - z_i)}{R^2 - \bar{z}_i z} \right| + \sum_{0 < |p_i| < R} \log \left| \frac{R(z - p_i)}{R^2 - \bar{p}_i z} \right| \right| \leq 4AR < 4A.$$

这个证明了 (2.2). 采用下面的各符号

$$(2.16) \quad \log a = \begin{cases} \log a & \text{若 } a \geq 1 \\ 0 & \text{若 } 0 < a < 1, \end{cases}$$

$$(2.17) \quad n(r, 0) = w(z) \quad \text{在 } |z| \leq r \text{ 上的零点的数目,}$$

$$(2.18) \quad n(r, \infty) = w(z) \quad \text{在 } |z| \geq r \text{ 上的极点的数目.}$$

我们有

$$(2.19) \quad \int_0^R \frac{n(r, \infty) - n(0, \infty)}{r} dr = \int_0^R \log \frac{R}{r} d[n(r, \infty) - n(0, \infty)] \\ = \sum_{0 < |p_i| < R} \log \left| \frac{R}{p_i} \right|,$$

$$(2.20) \quad \int_0^R \frac{n(r, 0) - n(0, 0)}{r} dr = \int_0^R \log \frac{R}{r} d[n(r, 0) - n(0, 0)] \\ = \sum_{0 < |z_i| < R} \log \left| \frac{R}{z_i} \right|,$$

并使 r 趋近于 0, 由 (2.10) 我们有下面的结论.

定理 2.2. 在定理 2.1 之假设下,

$$(2.21) \quad \log |a| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |\omega(Re^{i\theta})| d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{1}{w(Re^{i\theta})} \right| d\theta \\ - [n(0, 0) - n(0, \infty)] \log R - \int_0^R \frac{n(r, 0) - n(0, 0)}{r} dr \\ + \int_0^R \frac{n(r, \infty) - n(0, \infty)}{r} dr + O(1), \text{ 当 } R \rightarrow 1.$$

证. 公式 (2.2) 及 (2.21) 是 Poisson-Jensen 及 Jensen 公式 (见 [2] p. 155) 推广至于近似解析函数.

今以

$$(2.22) \quad m(R, w) = m(R, \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |w(Re^{i\theta})| d\theta$$

及

$$(2.23) \quad N(R, w) = N(R, \infty) = \int_0^R \frac{n(r, \infty) - n(0, \infty)}{r} dr + n(0, \infty) \log R.$$

同样的以

$$(2.24) \quad m\left(R, \frac{1}{w}\right) = m(R, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{1}{w(Re^{i\theta})} \right| d\theta$$

$$(2.25) \quad N\left(R, \frac{1}{w}\right) = N(R, 0) = \int_0^R \frac{n(r, 0) - n(0, 0)}{r} dr + n(0, 0) \log R,$$

故(2.21)可写为下面的式子

$$(2.26) \quad m(R, w) + N(R, w) = m\left(R, \frac{1}{w}\right) + N\left(R, \frac{1}{w}\right) + \log |a| + O(1), \quad R \rightarrow 1.$$

定义2.1. 下面的函数

$$(2.27) \quad T(R) = T(R, w) = m(R, w) + N(R, w)$$

被称为 $w(z)$ 的特征函数.

一个正规近似解析函数没有极点 $[N(R, w) = 0]$, 故若 $w(z)$ 是正规的, 则

$$(2.28) \quad T(R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |w(Re^{i\theta})| d\theta,$$

关于 $w(z) \equiv 0$, 依照(2.28)我们确定 $T(R) \equiv 0$.

3. 圜型近似解析函数

定义3.1. 在 $|z| < 1$ 内设 $w(z)$ 为一半纯近似解析函数. 若其特征函数 $T(R)$ 当 $R \rightarrow 1$ 时是被围的(bounded), 则称 $w(z)$ 为圜型的(of bounded type).

由(2.28)推得一被围的近似解析函数是属于圜型的.

定理3.1 两圜型半纯近似解析函数之乘积与商皆为圜型半纯近似解析函数.

证. 设 $w_1(z), w_2(z)$ 为两个半纯近似解析函数, 而 $w_2(z) \not\equiv 0$. 由引1.3推知 $(w_1 w_2), 1/w_2$, 及 w_1/w_2 亦皆半纯近似解析函数. 并且

$$N(r, w_1 w_2) \leq N(r, w_1) + N(r, w_2).$$

又因

$$\begin{aligned} \log^+ |w_1 w_2| &\leq \log^+ |w_1| + \log^+ |w_2|, \\ m(r, w_1 w_2) &\leq m(r, w_1) + m(r, w_2). \end{aligned}$$

推得

$$T(R, w_1 w_2) \leq T(R, w_1) + T(R, w_2),$$

故若 w_1 及 w_2 为圜型则 $w_1 w_2$ 亦为圜型.

由(2.26), 推知

$$T\left(R, \frac{1}{w_2}\right) = T(R, w_2) - \log |a| - O(1), \quad R \rightarrow 1.$$

故若 w_2 为围型则 $1/w_2$ 必为围型。若 w_1 及 w_2 皆为围型，则 $w_1/w_2 = w_1(1/w_2)$ 必亦为围型。

定理3.2. 设 $w(z)$ 为围型半纯近似解析函数，设 $\{z_v\}$ 为其零点的贯点集， $\{p_v\}$ 为其极点的贯点集，则无穷乘积

$$(3.1) \quad \prod_{0 < |p_v| < 1} p_v$$

是收敛的。而无穷乘积

$$(3.2) \quad \prod_{0 < |z_v| < 1} z_v$$

也是收敛的 ($w(z) \equiv 0$ 除外)。

证. 设 $w(z) \neq 0$ 。并设 M 为 $T(R)$ 的上界。因 $m(R, w) \geq 0$ ，则当 $R > \frac{1}{2}$ 时，由 (2.19) 得

$$\begin{aligned} \sum_{0 < |p_i| < R} \log \left| \frac{R}{p_i} \right| &= N(r, w) - n(0, \infty) \log R = T(R, w) - n(0, \infty) \log R - m(R, w) \\ &\leq M - n(0, \infty) \log R < M + n(0, \infty) \log 2 = M'. \end{aligned}$$

取一定值 R_0 ， $0 < R_0 < R < 1$ 。则

$$\sum_{0 < |p_i| < R_0} \log \left| \frac{R}{p_i} \right| \leq \sum_{0 < |p_i| < R} \log \left| \frac{R}{p_i} \right| < M'.$$

当 $R \rightarrow 1$ 时，上式变为

$$\sum_{0 < |p_i| < R_0} \log \left| \frac{1}{p_i} \right| < M'.$$

故

$$\prod_{0 < |p_i| < R_0} p_i > e^{-M'}$$

这个证明了 (3.1) 的收敛性。同理，当 $R > \frac{1}{2}$ 时，由 (2.20) 得

$$\begin{aligned} \sum_{0 < |z_i| < R} \log \left| \frac{R}{z_i} \right| &= N\left(R, \frac{1}{w}\right) - n(0, 0) \log R \\ &= T(R, w) - n(0, 0) \log R - m\left(r, \frac{1}{w}\right) + O(1) < M''. \end{aligned}$$

这个证明了 (3.2) 的收敛性。

我们的主要定理可叙述如下。

定理3.3. 确定于 $|z| < 1$ 内的半纯近似解析函数 $w(z)$ 为围型的必需及充足条件为这个函数可写成

$$(3.3) \quad w(z) = F(z)G(z)$$

的形式，这儿 $F(z)$ 在 $|z| < 1$ 内是一个围型解析半纯函数，而 $G(z)$ 是一正规近似解析函数，

原书缺页