西南師範學院

科学技术论文选集

（一）

一九八四年五月

西南师范学院

科学技术論文选集

(一)

科研处编

一九八四年五月

SELECTED THESES ON SCIENCE AND TECHNOLOGY OF THE SOUTHWEST-CHINA TEACHERS COLLEGE

VOLUME ONE

EDITED BY
SCIENTIFIC RESEARCH DIVISION

May 1984

前　言

西南师范学院是教育部直属的一所规模较大、学科专业设置较齐全的综合性师范学院。主要任务是为国家培养中等学校和部分高等学校的师资。现设有13个系、17个专业。其中理科设有数学系、物理学系、化学系、生物学系、地理学系。设置的科学研究机构有亚热带生物与地理研究所、新材料、自动化、计算机应用、沼气、激光研究室，以及西亚地理研究室等。

建院33年来，学院坚持党的教育方针，重视对基础科学和应用科学研究，重视科学技术交流，有计划地选派教师出国访问和进修，聘请外国专家来院讲学，邀请国内外著名学者来院任教或与我院学者合作开展科学研究。并且编辑出版了学院学报（自然科学版），在国内外发行。

为了更加广泛地进行科学技术交流，充分发挥科学技术的继承和借鉴作用，鼓励创作和科学研究工作的开展，提高教学质量和学术水平，我们编辑了这本《科学技术论文选集》。收入选集的是我院理科教师在国内外知名刊物上发表的论文。由于已经发表的论文较多，本选集篇幅有限，收入的只能是其中一部分。今后随着我院教学和科学研究的发展，将陆续搜集编印。

论文按数学、物理学、化学、生物学、地理学的次序编排。

由于编者水平有限，选集存在着缺点是难以避免的，敬请指正。

编者

PUBLISHER'S PREFACE

The Southwest-China Teachers College is a comprehensive large-scale institute for higher education. The chief aim of this college is to prepare teachers for middle schools, normal schools and teachers colleges. There are thirteen departments with seventeen specialities offered in this college. Concerning natural sciences, there are the Departments of Mathematics, Physics, Chemistry, Biology, and Geography. Various research groups have been set up, such as the Research Institute of Subtropical Biogeography, and research sections for West Asian geography, new materials, automation, computers, methane and laser.

In the past 33 years, in line with the Party's educational policy the college has paid much attention to research work in basic and applied sciences. Our college highly values international academic exchanges. It sends teachers abroad on tours of investigation or for further studies. It also invites foreign experts in literature and education to work here. Well known scientists or experts are invited to give lectures or to undertake scientific researches in cooperation with the researchers here. In addition, we edit and publish a journal of natural science and distribute it at home and abroad.

In order to promote scientific and technical communication, give full play to the role of science and technology in our taking over and drawing on experiences of all times and of all countries, encourage creative and research work and raise the level of teaching work and academic achievement, we have started the edition of this "Selected Theses on Science and Technology". The series will contain theses by teachers of natural science working in our college, which have been published in well known internal or external scientific journals and later on revised by the authors themselves.

The theses included in this series are arranged in five parts: mathematics, physics, chemistry, biology and geography. They are only a small portion of what has been published. With the advance of our teaching work and scientific research, we shall compile and publish more series of the same kind.

In view of the limited vista of the editors, our work must leave a lot to be desired. Advice and critical comments are most welcome.

目　次

CONTENTS

囿型近似解析函数与椭性偏微分方程式的解的边界状态

張 孝 礼[1)]

绪 论

白尔氏在他的准解析函数[2)]一文中，曾介绍过近似解析函数（approximately analytic functions）的概念。本文目的在研究囿型（of bounded type）近似解析函数的性质，并应用这种性质以研究椭性第二级线性偏微分方程式的解.

精确言之，我们将证明下面关于椭性偏微分方程式的四个定理.

（A）设D为一被囿领域（bounded domain），其边界为一有限个数继续可微分的曲线所组成．设一偏微分方程式的形式为

$$(0.1)\qquad A_{11}(x,y)\phi_{xx}+2A_{12}(x,y)\phi_{xy}+A_{22}(x,y)\phi_{yy}$$
$$+A_1(x,y)\phi_x+A_2(x,y)\phi_y+A_0(x,y)\phi=0,$$

这儿各实系数$A(x,y)$是确定(defined)于领域D_0内的，D_0包含D的闭包$\bar{D}$，各$A(x,y)$在D_0内有连续偏导数至第二级并满足不等式$A_{11}A_{22}-A_{12}^2>0$，（椭性条件）．设$\phi(x,y)$为(0.1）的解确定于领域D内，并在D内满足不等式

$$(0.2)\qquad \phi(x,y)\geqslant -k,$$

这儿k是某一正常数，则在D所有的各界点上，测度为零的点集可能为例外，$\phi(x,y)$有有限的辐射极限.

这个定理同下一个定理是Fatou定理[1.2]的推广.

(B) 设领域D,D_0及方程式(0.1)为与定理（A）内假设的相同.设

$$(0.3)\qquad A_0(x,y)\equiv 0.$$

设$\phi(x,y)$为(0.1)的一解,确定于领域D内并满足下面的条件

$$(0.4)\qquad \phi_x^2+\phi_y^2<K<\infty,$$

则在D的边界所有各点上，测度为零的点集可能为例外，$\phi_x(x,y)$及$\phi_y(x,y)$有有限的辐射极限.

本文原载《数学学报》第3卷 第2期 1953年9月.

1）作者在准备本文时曾得到L.Bers教授的帮助和鼓励.

2）这篇文章(原文题名"Pseudo-analytic function"，以下简称P.A.F.)，在作者完成本文时，尚未发表,但作者有机会得读其手稿P.A.F.的结果的一个大纲，见于白尔氏教授所作的下面两文中：
"Partial differential equations and generalized analytic functions" and "Partial differential equations and generalized analytic functions, second notes."

(C) 在定理 (B) 的假设下，设ϕ_x及ϕ_y之辐射极限在一正测度的界点集上为零，则

(0.5) $$\phi(x,y)\equiv\text{常数}.$$

这个定理是F. and M. Riesz (见[2]p.197)的结果的推广.

(D) 在定理(B) 的假设下，设$z_\nu(=x_\nu+iy_\nu)\nu=1,2\cdots$为$D$内使$\phi_x^2+\phi_y^2=0$的诸点.设$d_\nu$为自$z_\nu$至$D$的边界的距离，并设$N_\nu$为整数，当$(x,y)\to(x_\nu,y_\nu)$时有

$$\frac{\phi_x(x,y)^2+\phi_y(x,y)^2}{[(x-x_\nu)^2+(y-y_\nu)^2]^{N\nu}}=O(1)\qquad \nu=1,2,\cdots,$$

则或$\phi(x,y)\equiv$常数或下面的级数

(0.6) $$\sum_{\nu=1}^{\infty}N_\nu d_\nu$$

为一收敛级数.

这个定理是Blaschke[3](并见[2]p.178, p.196) 对被囿解析函数的零点的定理的推广.

一、囿型近似解析函数

1.近似解析函数. 本文将x及y之函数写成$z=x+iy$的函数，并用

(1.1) $$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

(1.2) $$\frac{\partial}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

为微分算子.

定义1.1. 在一领域△内，有些孤立点可能为例外，若一连续函数$w(z)$依x及y的各第一级偏导数存在并连续，并有一常数A (近似解析性的常数) 存在，且在△内导数存在之各点上，满足下列不等式

(1.3) $$|w_{\bar z}(z)|\leqslant A|w(z)|,\quad z\in\triangle,$$

则称$w(z)$在领域△内为正规近似解析函数，这儿$w_{\bar z}(z)=\dfrac{\partial}{\partial \bar z}w(z)$.

引1.1. 设△为一领域而$w(z)$为一近似解析函数，确定于△内.设$\zeta=\phi(z)$为一函数，将△保角描绘成领域$\triangle_1$.以$W(\zeta)=w[X(\zeta)]$，此处$X(\zeta)$为$\phi(z)$之反函数，则在$\triangle_1$的每个闭子领域内$W(\zeta)$为近似解析的.并且，若$X'(\zeta)$是均匀被囿的(uniformly bounded)，则在$\triangle_1$内$W(\zeta)$为近似解析的.

证. 因 $$\frac{\partial}{\partial\bar\zeta}W(\zeta)=\frac{\partial W}{\partial \bar X}\frac{\partial \bar X}{\partial\bar\zeta}=\frac{\partial w}{\partial\bar z}\left(\frac{\partial \bar X}{\partial\bar\zeta}\right),$$

$$\left|\frac{W_{\bar{\zeta}}(\zeta)}{W(\zeta)}\right| = \frac{\left|\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right| \cdot \left|\frac{\partial \overline{X}}{\partial \bar{\zeta}}\right|}{|W(\zeta)|} \leqslant \frac{A|w| \cdot |\overline{X'(\zeta)}|}{|w|} = A|\overline{X'(\zeta)}|.$$

因在$\triangle_1$的每个闭子领域内，$|X'(\zeta)|$达到它的极大值，故$W(\zeta)$在每个闭子领域内 是近似解析的．当$X'(\zeta)$是均匀的被围，则$W(\zeta)$的近似解析性推广至$\triangle_1$的全域．

由这个引论的观点，假设$\triangle$为下面的领域

$$|z|<1,$$

它的普遍性，不会有重要的损失．

引1.2． 设在领域$\triangle$内$w(z)$是近似解析的，并设z_0为$\triangle$的一个孤立界点．则对α的所有各值有

(1.4) $$\lim_{z\to z_0}|w(z)-\alpha|=0,$$

或有一正整数n存在，使

(1.5) $$w(z)\sim\frac{a}{(z-z_0)^n},\quad z\to z_0,\quad a\neq 0,$$

或极限

(1.6) $$w(z_0)=\lim_{z\to z_0} w(z)$$

存在且为有限数．若$w(z_0)=0$，则有一正整数n存在，使

(1.7) $$w(z)\sim a(z-z_0)^n,\quad z\to z_0,\quad a\neq 0,$$

或$w(z)$恒等于零．

近似解析函数的此种性质已在白尔氏的文中证明了的[4, 5, 6]．

符号“～”表示几近等号．$w(z)\sim f(z)$，$z\to z_0$，表示

$$\lim_{z\to z_0}\frac{w(z)}{f(z)}=1\ .$$

定义1.2． 当一近似解析函数满足关系(1.5）时，我们称它在点$z=z_0$上有一第 n 级 的 极点．当一近似解析函数满足关系式（1.7）时，我们称它在点$z=z_0$上有第n级的零点．

定义1.3． 在领域$\triangle$内，若一函数，除去了它的孤立极点外，是正规近似解析的，则叫这个函数在$\triangle$内为半纯（meromorphic）近似解析函数．

引1.3． 解析函数是近似解析的（对于每个A）．两近似解析函数的乘积及商皆是近似解析的．

证． 因Cauchy-Riemann方程式表明了一个解析函数依$\bar{z}$的偏导数是零的事实，故第一命辞的真确性是显明的．

设$w_1(z)$及$w_2(z)$为两近似解析函数，并设A_1及A_2各为其近似解析常数．则

$$|(w_1w_2)_{\bar{z}}|=|w_2\cdot(w_1)_{\bar{z}}+w_1\cdot(w_2)_{\bar{z}}|$$
$$\leqslant A_1|w_1|\cdot|w_2|+A_2|w_1|\cdot|w_2|$$

$$\leqslant(A_1+A_2)|w_1\cdot w_2|=A_3|w_1\cdot w_2|,$$

这儿$A_3=A_1+A_2$。

若$w_2\not\equiv 0$，只在有些孤立点上为零．在$w_2\neq 0$的点z上，我们有

$$\left|\left(\frac{w_1}{w_2}\right)_{\bar z}\right|=\left|\frac{w_2(w_1)_{\bar z}-w_1(w_2)_{\bar z}}{w_2^2}\right|\leqslant\frac{|w_2(w_1)_{\bar z}+w_1(w_2)_{\bar z}|}{|w_2|^2}$$

$$\leqslant\frac{A_1|w_1|\cdot|w_2|+A_2|w_1|\cdot|w_2|}{|w_2|^2}=\frac{(A_1+A_2)|w_1|\cdot|w_2|}{|w_2|^2}=A_3\left|\frac{w_1}{w_2}\right|.$$

引1.4 设领域$\triangle$的边界$\triangle'$为有限个数简单闭合曲线所组成，设$w(z)$在$\triangle$内及$\triangle'$上是连续的，并设$w(z)$依x及y的第一级偏导数在$\triangle$内，除有些有限个数的点外，存在并是连续的．则

$$(1.8)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\triangle'}\frac{w(\zeta)d\xi}{\zeta-z}-\frac{1}{\pi}\iint_{\triangle}\frac{w_{\bar\zeta}(\zeta)d\zeta d\eta}{\zeta-z}=\begin{cases}w(z) & 若\ z\in\triangle\\ 0 & 若\ z\notin\overline{\triangle}\end{cases},$$

这儿假设了双重积分的存在．恒等式（1.8）曾被Carleman[7]用于他的椭性系一文中．

2.Poisson-Jensen[8]（并见[2]p.156）公式的推广

由引1.2看来，半纯近似解析函数$w(z)\not\equiv 0$的零点与极点皆为孤点．若$w(z)$，$0<|z|<1$，是这种函数，不为$z=0$之零点可排列成一贯点集z_1，z_2，……使每零点出现的次数与它重复的次数相同，并且$|z_1|\leqslant|z_2|\leqslant$……我们叫$\{z_\nu\}$为$w(z)$的零点的贯点集．我们同样定极点的贯点集$\{p_\nu\}$的义．又设有一整数$\lambda$及一数$\alpha\neq 0$存在；使有

$$(2.1)\qquad w(z)\sim\alpha z^\lambda,\quad z\to 0.$$

定理2.1. 设$w(z)$在$|z|<1$内为半纯近似解析函数（近似解析性常数为A）．假定$w(z)$之零点及极点的贯点集各为$\{z_\nu\}$及$\{p_\nu\}$并满足（2.1）．设R为$0<R<1$的一个数，并有$R\neq|z_\nu|$，$R\neq|p_\nu|$，$\nu=1,2,\cdots\cdots$，则对于$0<r<R$，$re^{i\phi}\neq z_\nu$，$re^{i\phi}\neq p_\nu$，$\nu=1,2,\cdots\cdots$，有

$$(2.2)\qquad \log|w(re^{i\phi})|-\lambda\log r=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|R^{-\lambda}w(Re^{i\theta})|\frac{(R^2-r^2)d\theta}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\phi)}$$

$$+\sum_{0<|z_i|<R}\log\left|\frac{R(z-z_i)}{R^2-\bar z_i z}\right|-\sum_{0<|p_i|<R}\log\left|\frac{R(z-p_i)}{R^2-\bar p_i z}\right|+O(1),\qquad 当R\to 1.$$

证. 设

$$(2.3)\qquad f(z)=\log\left(\frac{w(z)}{z^\lambda\prod\limits_{0<|z_i|<R}\frac{R(z-z_i)}{R^2-\bar z_i z}}\prod_{0<|p_i|<R}\frac{R(z-p_i)}{R^2-\bar p_i z}\right)$$

$$=\log[z^{-\lambda}w(z)]-\sum_{0<|z_i|<R}\log\frac{R(z-z_i)}{R^2-\bar z_i z}+\sum_{0<|p_i|<R}\log\frac{R(z-p_i)}{R^2-\bar p_i z}.$$

由引1.2及λ，$\{z_\nu\}$，$\{p_\nu\}$等的定义看来，$f(z)$是一连续且不为零的函数的对数，故当$|z|$

$<R+\varepsilon$, ε为一够小的正数时，$f(z)$是单值的．我们有

$$(2.4)\qquad |f_{\zeta}(\zeta)| = \left|\frac{w_{\bar{\zeta}}(\zeta)}{w(\zeta)}\right| \leqslant A.$$

由（1.8）式，得

$$(2.5)\qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|<R}\frac{f_{\bar{\zeta}}(\zeta)d\xi d\eta}{\zeta - z}.$$

当$|z|<R$时，（2.5）式的右端第一个积分是z的一个解析函数．取它的实数部分，得

$$(2.6)\qquad \mathrm{Re}\{f(z)\} = H(z) - \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left\{\iint_{|\zeta|\leqslant R}\frac{f_{\bar{\zeta}}d\xi d\eta}{\zeta - z}\right\},$$

这儿$H(z)$为调和函数，

$$(2.7)\qquad H(z) = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\right\},\quad |z|<R.$$

由Poisson的积分公式

$$(2.8)\qquad H(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(Re^{i\theta})\frac{R^2 - r^2}{R^2 r + {}^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi)}d\theta,$$

这儿 $z = re^{i\phi}$, $r<R$. 由(2.6)及(2.3)

$$(2.9)\qquad H(Re^{i\theta}) = \log\left|\frac{w(Re^{i\theta})}{R\lambda}\right| + \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\iint_{|\zeta|\leqslant R}\frac{f_{\bar{\zeta}}(\zeta)d\xi d\eta}{\zeta - Re^{i\theta}}.$$

故方程式（2.3）可写为

$$(2.10)\qquad \log|r^{-\lambda}w(re^{i\phi})| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{w(Re^{i\theta})}{R\lambda}\right|\frac{(R^2 - r^2)d\theta}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi)}$$

$$+\sum_{0<|z_i|<R}\log\left|\frac{R(z - z_i)}{R^2 - \bar{z}_i z}\right| - \left|\sum_{0\leqslant|p_i|<R}\log\left|\frac{R(z - p_i)}{R^2 - \bar{p}_i z}\right|\right| +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\pi}\iint_{|\xi|\leqslant R}\frac{f_{\zeta}(\zeta)d\xi d\eta}{\zeta - Re^{i\theta}}\right)\frac{(R^2 - r^2)d\theta}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi)}$$

$$-\mathrm{Re}\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|\leqslant R}\frac{f_{\zeta}(\zeta)d\xi d\eta}{\zeta - re^{i\theta}}$$

现在由（2.4）得

$$(2.11)\qquad \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|\leqslant R}\frac{f_{\bar{\zeta}}(\zeta)d\xi d\eta}{\zeta - z}\right) \leqslant \left|\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|\leqslant R}\frac{f_{\bar{\zeta}}(\zeta)d\xi d\eta}{\zeta - re^{i\phi}}\right|$$

$$\leqslant \frac{A}{\pi}\iint_{|\zeta|\leqslant R}\frac{d\xi d\eta}{|\zeta - re^{i\phi}|}.$$

由E. Schmidt[9]的著名不等式

$$(2.12)\qquad \iint_D \frac{d\xi d\eta}{|\zeta - z|} \leqslant 2\pi\sqrt{\frac{D\text{的面积}}{\pi}},$$

故得

$$(2.13)\qquad \left| \frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|\leq R} \frac{f_{\bar\zeta}(\zeta)d\xi d\eta}{\zeta - re^{i\phi}} \right| \leq 2RA,$$

及

$$(2.14)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\pi}\iint_{|\zeta|\leq R} \frac{f_{\bar\zeta}(\zeta)d\xi d\eta}{\zeta - Re^{i\theta}} \right) \frac{(R^2-r^2)d\theta}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\phi)} < 2AR.$$

由此得

$$(2.15)\qquad \Bigg| \log \left| r^{-\lambda} w(re^{i\phi}) \right| - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \left| R^{-\lambda} w(Re^{i\phi}) \right| \frac{(R^2-r^2)d\theta}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\phi)}$$

$$- \sum_{0<|z_i|<R} \log \left| \frac{R(z-z_i)}{R^2-\bar z_i z} \right| + \sum_{0<|p_i|<R} \log \left| \frac{R(z-p_i)}{R^2-\bar p_i z} \right| \Bigg| \leq 4AR < 4A.$$

这个证明了（2.2）．采用下面的各符号

$$(2.16)\qquad \overset{+}{\log}\, a = \begin{cases} \log a & 若\quad a\geq 1 \\ 0 & 若\quad 0<a<1, \end{cases}$$

$$(2.17)\qquad n(r,0)=w(z)\quad 在|z|\leq r上的零点的数目,$$

$$(2.18)\qquad n(r,\infty)=w(z)\quad 在|z|\geq r上的极点的数目.$$

我们有

$$(2.19)\qquad \int_0^R \frac{n(r,\infty)-n(0,\infty)}{r}dr = \int_0^R \log\frac{R}{r} d[n(r,\infty)-n(0,\infty)]$$

$$= \sum_{0<|p_i|<R} \log \left| \frac{R}{p_i} \right|,$$

$$(2.20)\qquad \int_0^R \frac{n(r,0)-n(0,0)}{r}dr = \int_0^R \log\frac{R}{r} d[n(r,0)-n(0,0)]$$

$$= \sum_{0<|z_i|<R} \log \left| \frac{R}{z_i} \right|,$$

并使 r 趋近于0，由（2.10）我们有下面的结论．

定理2.2． 在定理2.1之假设下，

$$(2.21)\qquad \log|a| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\, |\omega(Re^{i\theta})| d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} \left| \frac{1}{w(Re^{i\theta})} \right| d\theta$$

$$-[n(0,0)-n(0,\infty)]\log R - \int_0^R \frac{n(r,0)-n(0,0)}{r}dr$$

$$+\int_0^R \frac{n(r,\infty)-n(0,\infty)}{r}dr + O(1),\quad 当\ R\to 1.$$

证． 公式（2.2）及（2.21）是Poisson-Jensen及Jensen公式（见[2]p.155）推广至于近似解析函数．

今以

(2.22) $$m(R,w)=m(R,\infty)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overset{+}{\log}|w(Re^{i\theta})|d\theta$$

及

(2.23) $$N(R,w)=N(R,\infty)=\int_0^R\frac{n(r,\infty)-n(0,\infty)}{r}dr+n(0,\infty)\log R.$$

同样的以

(2.24) $$m\left(R,\frac{1}{w}\right)=m(R,0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{w(Re^{i\theta})}\right|d\theta$$

(2.25) $$N\left(R,\frac{1}{w}\right)=N(R,0)=\int_0^R\frac{n(r,0)-n(0,0)}{r}dr+n(0,0)\log R,$$

故（2.21）可写为下面的式子

(2.26) $$m(R,w)+N(R,w)=m\left(R,\frac{1}{w}\right)+N\left(R,\frac{1}{w}\right)+\log|a|+O(1),\ R\to 1.$$

定义2.1. 下面的函数

(2.27) $$T(R)=T(R,w)=m(R,w)+N(R,w)$$

被称为$w(z)$的特征函数.

一个正规近似解析函数没有极点[$N(R,w)=0$]，故若$w(z)$是正规的，则

(2.28) $$T(R)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overset{+}{\log}|w(Re^{i\theta})|d\theta,$$

关于$w(z)\equiv 0$，依照（2.28）我们确定$T(R)\equiv 0$.

3.囿型近似解析函数

定义3.1. 在$|z|<1$内设$w(z)$为一半纯近似解析函数．若其特征函数$T(R)$当$R\to 1$时是被囿的（bounded），则称$w(z)$为囿型的（of bounded type）.

由（2.28）推得一被囿的近似解析函数是属于囿型的.

定理3.1 两囿型半纯近似解析函数之乘积与商皆为囿型半纯近似解析函数.

证. 设$w_1(z)$,$w_2(z)$为两个半纯近似解析函数，而$w_2(z)\neq 0$．由引1.3推知(w_1w_2)，$1/w_2$，及w_1/w_2亦皆半纯近似解析函数．并且

$$N(r,w_1w_2)\leqslant N(r,w_1)+N(r,w_2).$$

又因

$$\overset{+}{\log}|w_1w_2|\leqslant\overset{+}{\log}|w_1|+\overset{+}{\log}|w_2|,$$
$$m(r,w_1w_2)\leqslant m(r,w_1)+m(r,w_2).$$

推得

$$T(R,w_1w_2)\leqslant T(R,w_1)+T(R,w_2),$$

故若w_1及w_2为囿型则w_1w_2亦为囿型.

由（2.26），推知

$$T\left(R,\frac{1}{w_2}\right)=T(R,w_2)-\log|a|-O(1),\quad R\to 1.$$

故若w_2为囿型则$1/w_2$必为囿型．若w_1及w_2皆为囿型，则$w_1/w_2=w_1(1/w_2)$必亦为囿型．

定理3.2． 设$w(z)$为囿型半纯近似解析函数，设$\{z_\nu\}$为其零点的贯点集，$\{p_\nu\}$为其极点的贯点集，则无穷乘积

(3.1) $$\prod_{0<|p_\nu|<1} p_\nu$$

是收敛的．而无穷乘积

(3.2) $$\prod_{0<|z_\nu|<1} z_\nu$$

也是收敛的($w(z)\equiv 0$除外)．

证． 设$w(z)\not\equiv 0$．并设M为$T(R)$的上界．因$m(R,w)\geqslant 0$，则当$R>\frac{1}{2}$时，由(2.19)得

$$\sum_{0<|p_i|<R}\log\left|\frac{R}{p_i}\right|=N(r,w)-n(0,\infty)\log R=T(R,w)-n(0,\infty)\log R-m(R,w)$$
$$\leqslant M-n(0,\infty)\log R<M+n(0,\infty)\log 2=M'.$$

取一定值R_0，$0<R_0<R<1$．则

$$\sum_{0<|p_i|<R_0}\log\left|\frac{R}{p_i}\right|\leqslant\sum_{0<|p_i|<R}\log\left|\frac{R}{p_i}\right|<M'.$$

当$R\to 1$时，上式变为

$$\sum_{0<|p_i|<R_0}\log\left|\frac{1}{p_i}\right|<M'.$$

故

$$\prod_{0<|p_i|<R_0} p_i>e^{-M'}$$

这个证明了(3.1)的收敛性．同理，当$R>\frac{1}{2}$时，由(2.20)得

$$\sum_{0<|z_i|<R}\log\left|\frac{R}{z_i}\right|=N\left(R,\frac{1}{w}\right)-n(0,0)\log R$$
$$=T(R,w)-n(0,0)\log R-m\left(r,\frac{1}{w}\right)+O(1)<M''.$$

这个证明了(3.2)的收敛性．

我们的主要定理可叙述如下．

定理3.3． 确定于$|z|<1$内的半纯近似解析函数$w(z)$为囿型的必需及充足条件为这个函数可写成

(3.3) $$w(z)=F(z)G(z)$$

的形式，这儿$F(z)$在$|z|<1$内是一个囿型解析半纯函数，而$G(z)$是一正规近似解析函数，

原书缺页