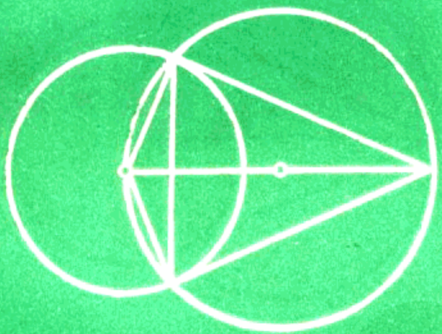
数学教学参考资料之五

中学数学综合题解



扬州师范学院数学系
数学参考资料编写组

说　　明

生产的发展，推动了数学的发展。数学来源于实践，反过来又作用于实践。当前为了实现我国工业、农业、国防和科学技术的现代化，提高全民族的科学文化水平，学好数学基础知识和掌握好基本技能技巧，已成为大家迫切的愿望和自觉的要求了，广大数学教学工作者也正在积极地为搞好教学工作作出贡献。

我系部分教师正是应各方面的需要，在讲授相应课程的基础上，将积累的资料汇编成数学教学参考资料，互相交流学习，如能给使用者有所帮助，则不胜幸甚。

数学教学参考资料以中学数学题解为主，适当辅以基础知识，适用于中学数学教师和中学高年级学生参考，全书暂分《初等代数题解集》，《初等几何证题集》，《平面三角题解集》，《解析几何题解集》，《中学数学综合题解》五册，分别印出，供内部参考。

《中学数学综合题解》由左宗明、沈宗华同志执笔。考虑到中学数学教学大纲所列入的一些新内容，我们也相应地编入了一些题目；由于篇幅所限，大多数的题我们只给了一个解答，我们相信，读者通过自己的练习会给出更多、更好的解答来，我们只是抛砖引玉而已。

在编写过程中，由于时间匆促，仅就现有资料汇集而成，内容和类型自然不够全面，方法也不尽完美，请同志们批评指正。

数学教学参考资料编写组

目　录

Ⅰ、问　题

Ⅱ、提　示

Ⅲ、解　答

Ⅰ. 问　题

一、代　　数

1. 已知：$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3$。试证：
$$a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}=(a+b+c)^{2n+1}$$
（n为正整数）。

2. 若$ax^3=by^3=cz^3$且$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$，证明：
$$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}.$$

3. a，b，c是有理数。若
$$a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c\sqrt{6}=0$$
证明：$a=b=c=0$
（用$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$是无理数这一事实）。

4. 已知：$a:b=c:d$。
求证：$\dfrac{a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}+d^{2n}}{a^{-2n}+b^{-2n}+c^{-2n}+d^{-2n}}=(abcd)^n$。

5. 设a，b，c互不相等，且将式子$a+\dfrac{bc-a^2}{a^2+b^2+c^2}$中某二数互换，式子的值不变。证明：互换其他二数，式子的值也不变，且当$a+b+c=1$时，式子的值为零。

6. 设x^3+px^2+qx+r能被ax^2+bx+c整除，证明：
$$\frac{ap-b}{a}=\frac{aq-c}{b}=\frac{ar}{c}.$$

7. 设a，b，c，d是互不相同的四个整数，γ是方程
$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)-4=0$$

的整数根。证明：$4\gamma=a+b+c+d$。

8. 设$x_1^2+y_1^2=1$，$x_2^2+y_2^2=1$，$x_1x_2+y_1y_2=0$，

试证：$x_1^2+x_2^2=1, y_1^2+y_2^2=1, x_1y_1+x_2y_2=0$。

9. 设k,l,m,n是非负整数。求出使等式

$$\frac{(x+1)^k}{x^l}-1=\frac{(x+1)^m}{x^n}\quad(x\neq0)$$

成立的k,l,m,n的值。

10. 求这样的实数a、b和p、q，使下面的式子对任何x都成立

$$(2x-1)^{20}-(ax+b)^{20}=(x^2+px+q)^{10}$$

11. 已知多项式x^3+bx^2+cx+d的系数都是整数，并且$bd+cd$是奇数。证明：这多项式不能分解为两个整系数多项式的乘积。

12. 试证由数字0,1,2,3,4,5所组成的所有数字不重复的六位数，都不能被11除尽。

13. 试求以11除101^{10}的余数。

14. 设n为任意正整数，求证$5^{2n}-24n-1$能被576整除。

15. 设a为正整数，试证$a^7+6!a$能被7整除。

16. 如果p和q是"孪生"质数（即相差为2的一对质数），则p^p+q^q必被$p+q$整除。

17. 设a，b，c，d是四个任意的整数，则

$p=(b-a)(c-a)(d-a)(d-c)(d-b)(c-b)$

必被12整除，试证明之。

18. 从任意给定的n个自然数中，总可以找到k个数（其中k为自然数，$1\leqslant k\leqslant n$且每个数至多取一次）使它们的和能被n整除。

19. 证明：对于任意自然数n与k，表达式$k^{n+2}+(k+1)^{2n+1}$能被k^2+k+1整除。

20. 证明多项式$x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$（m、n、p是非负整数）能被x^2+x+1整除.

21. 证明：$x^{4n}+x^{3n}+x^{2n}+x^n+1$，当n是一个不是5的倍数的正整数时，能被$x^4+x^3+x^2+x+1$整除.

22. 试证明在1到100的自然数中，任取51个数，其中总有一个数是另一个数的整倍数.

23. 证明：将任何整数代入

$$f(x)=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{15}x$$

其结果仍为一整数.

24. 设p、q为质数，方程$x^2+p^2x+q^3=0$在p、q为何值时有整数根？

25. 确定并证明$a^2+b^2+c^2=a^2b^2$的所有整数解.

26. 求下列方程组的整数解：

$$\begin{cases} x^{x+y}=y^{60} \\ y^{x+y}=x^{15} \end{cases}$$

27. 设a与b为任意给定的整数，试证明方程

$x^2+10ax+5b+3=0$ 与 $x^2+10ax+5b-3=0$

都没有整数根.

28. 试证不论n是什么整数

$$x^2-16nx+11^3=0$$

没有整数解.

29. 已知三位质数p的百位数码是a，十位数码是b，个位数码是c。

证明：二次方程$ax^2+bx+c=0$没有整数解.

30. 证明：不论 n 是什么整数，方程$x^2-16nx+7^s=0$没有整数解，其中s是任何正的奇数。

31. 设f(x)是一个整系数多项式。证明，如果存在一个偶数 a 及一个奇数b，使得f(a)与f(b)都是奇数，那末f(x)没有整数根。

32. 在三个方程

①$x^3+x+5p=0$ ②$x^3+x^2+qx-3p^2=0$

③$x^2-2x+q=0$

中，p,q是实数，p>0,如果① ② ③有公共根，求p 与q并求①的另外的两个根。

33. 已知方程$x^2+px+q=0$有相异二实根，若$k\neq0$，则方程

$$x^2+px+q+k(2x+p)=0$$

也有相异二实根，并且仅有一根在前一方程的二根之间。

34. k是实数时，x的二次方程

$$7x^2-(k+13)x+k^2-k-2=0$$

有两个实根，试证它们分别在开区间(0,1)和(1,2)内的充分必要条件是

$$-2<k<-1 \quad 或 \quad 3<k<4。$$

35. 已知a、b、c三数既成等差数列又成等比数列，又 α、β 是方程

$$ax^2+bx-c=0$$

的两个根，求$\alpha^5\beta^2-\alpha^2\beta^5$的值。

36. 方程$ax^2+bx+c=0$的两根和为s_1两根平方和为s_2，两根立方和为s_3。求证，$as_3+bs_2+cs_1=0$。

37. 求下列方程三个根的 8 次方的和

$$x^3-x+1=0 \quad 。$$

38. 如α、δ为实系数方程$ax^2+bx+c=0$的两个根，且α、β、γ、δ成等差数列，试求以β、γ为根的二次方程。

39. 已知直角三角形内切圆的半径为r，直角的平分线长为m，求以两直角边a与b为根的二次方程。

40. 设方程 $x^4+\frac{1}{3}\sin\alpha\cdot x^2+\frac{1}{200}\cos\frac{\pi}{3}=0$ 的四个根成等差数列，其中α在0与2π之间，求此α角，并求此四根之值。

41. 矩形面积为其外接园面积的$\frac{1}{11}$（取$\pi=\frac{22}{7}$），则这矩形两边的比等于方程$x^2-4x+1=0$的二根之比。

42. 有一个三位整数，它的首位数字是方程

$$\lg3+\lg(y-1)=\lg2+\frac{1}{2}\lg(7y+1)$$

的根。中间一位数字是$\lg(xy)$的值，其中x,y是实数，且$y=\csc10^\circ-\sqrt{3}\sec10^\circ+\sqrt{1-4x}+\sqrt{4x-1}$。
末位数字是在符合不等式$4x^2-4x-15\leqslant0$的条件下

$$\sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{4x^2-20x+25}$$

的值。求这个三位数。

43. 方程 $x^3-(1+2\sqrt{3})x^2+2(1+\sqrt{3})x-2=0$
①求证1是方程的一个根；
②若方程的另外两个根是△ABC的两边，且三角形的面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，求第三边。

44. 若三角形三边a,b,c适合等式

$$a^4+b^4+c^4=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$

问这是什么三角形。

45. 已知a,b,c为三角形的三边，求证方程

$$b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2=0$$

没有实根

46. 设方程$(b-x)^2-4(a-x)(c-x)=0$中的a、b、c是△ABC的三边，求证：

①△ABC是正三角形时，方程有相等的实数根。

②△ABC是等腰三角形时，方程有不等的实根。

47. 如果方程$x^2-(m+2)x+m+7=0$的两个根为某直角三角形的两直角边，而这直角三角形的三边成等差数列，且其最小的直角边为3，试求m之值。

48. 设实系数三次方程$x^3+px+1=0$的三个根在复平面上成正三角形，求p的值，并解出这个方程。

49. 有二次方程$x^2-2ax+b=0$，其中a,b为实数

①当这个方程至少有一个绝对值等于1的根时，试画出点(a,b)的存在范围。

②设这个方程的两个根为α,β，当$|\alpha|+|\beta|\leqslant 2$时，试画出点(a,b)的存在范围。

50. 设$x>1$，$y>1$时，对于x、y，$d(x,y)=\log_a(\log_x y)$其中$a>0$，$a\neq 1$：

①试用d(x,y)表出

$d(y,x)$，$d(x^p,y^q)$ $(p>0,\ q>0)$；

②试求使$0<d(x,y)<\log_a 2$成立的a的范围；

③试求在②所求出的a值的范围内，画出适合于$0<d(x,y)<\log_a 2$的点(x,y)的存在范围。

51. 如x，y，α都是实数，且$x^2+y^2=1$，求证：

$$|x\sin\alpha+y\cos\alpha|\leqslant 1.$$

52. 设a,b,c是任意三角形的三边长，$I=a+b+c$,
$S=ab+bc+ca$，求证：$3S\leqslant I^2<4S$.

53. 设$a>0$,$b>0$且$a\neq b$,在a与b之间插入n个数$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$，使$a,x_1,x_2,\cdots,x_n,b$成等比数列．求证：

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}<\frac{a+b}{2}$$

54. 设$a,b,c>0$，且$a+b+c=1$，求证：

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\geqslant 64.$$

55. 设$a,b,c,d>0$，且$a+b+c+d=3s$
求证：$abcd>81(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$.

56. 设a_1,a_2,a_3及b_1,b_2,b_3都是正数,证明下列两个不等式

①$\sqrt{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}\geqslant\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{b_1b_2}$

②$\sqrt[3]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)}$
$\geqslant\sqrt[3]{a_1a_2a_3}+\sqrt[3]{b_1b_2b_3}$.

57. 设n为任意自然数，试证：

$$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}.$$

58. 求$y=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{1000000}}$的整数部分

59. 设n为大于1的整数，试证明

$$\frac{1}{\sqrt[n]{2}}>\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}>\frac{1}{\sqrt[n]{3}}.$$

60. n是大于1的自然数，试证下式成立。

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}.$$

61. 解不等式

$$\frac{1}{64}<\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\cdots\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}<\frac{1}{4}$$

n是自然数。

62. 证明不等式

$$x=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100}<\frac{1}{10}.$$

63. 试证：$6<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{10}}<10$。

64. 设$f(x)=x^2+ax+b$，证明$|f(1)|$、$|f(2)|$、$|f(3)|$中至少有一个不小于$\frac{1}{2}$。

65. 设a、b、c、d与p、q、r、s均为不相等的正数，试证

$\left(abcd\right)^{\frac{1}{p+q+r+s}}$的值在$a^{\frac{1}{p}}$、$b^{\frac{1}{q}}$、$c^{\frac{1}{r}}$、$d^{\frac{1}{s}}$

之最大及最小值之间。

66. 已知△ABC中三边a、b、c成等比数列，证明公比q满足

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}<q<\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

67. 设x，y，z都是实数且

$$x+y+z=a,\quad x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}\ (a>0),$$

求证：x，y，z都不能是负数，也都不能大于$\frac{2a}{3}$。

68. 设a、b、c、d为任意的正数，证明：

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}\geqslant\sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}.$$

69. 若$a>0$且k为正整数，证明：

$$k(1+a^{2k})-a^k\geqslant a^{2k-1}+a^{2k-2}+\cdots+a^2+a.$$

70. 已知：n为正整数且$a>1$，

试证： $$n\frac{a^{2n+1}+1}{a^{2n}-1}>\frac{a}{a-1}.$$

71. 证明：若两两不同的自然数a，b，…，n中任何一个都不被大于3的质数整除，则

$$\sigma=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\cdots+\frac{1}{n}<3\ .$$

72. 求证： $$\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}}_{n\text{层根式}}<\sqrt{a}+1.$$

73. 设n是不小于2的自然数，

$$a_1,a_2,\ \cdots,\ a_n;\ b_1,b_2,\ \cdots,\ b_n$$

为正数，且满足

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}b_i,\ \frac{b_1}{a_1}<\frac{b_2}{a_2}<\cdots<\frac{b_n}{a_n};$$

证明：对$0<m<n$的某整数m，成立着

$$\sum_{i=1}^{m}a_i>\sum_{i=1}^{m}b_i\ .$$

74. 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，都是正数且$a_1a_2\cdots a_n=1$，试证

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant n$$

其中等号仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时成立。

75. 设a_1，a_2，…，$a_n>0$，试证

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

且等号仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时成立。

76. 设$a_1,a_2\cdots,a_n$均为正数，且$s=a_1+a_2+\cdots+a_n$，

证明：① $(a_1+a_2+\cdots+a_n)(a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1})\geqslant n^2$；

② $\frac{s}{s-a_1}+\frac{s}{s-a_2}+\cdots+\frac{s}{s-a_n}\geqslant\frac{n^2}{n-1}\ (n>1)$。

77. 证明：$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$

$$\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2.$$

78. 设数列$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$满足

$$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}\quad(n=1,2,\cdots)$$

当 $\frac{8}{5}\leqslant a_1\leqslant\frac{9}{5}$，$\left(\frac{8}{5}\right)^2\leqslant a_2\leqslant\left(\frac{9}{5}\right)^2$时

证明：① $a_n\leqslant\left(\frac{9}{5}\right)^n\quad(n=1,2,\cdots)$；

② 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$的和是A，则$\frac{5}{4}\leqslant A\leqslant\frac{5}{3}$。

79. 若x为任意实数，证明：

$$(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10>0.$$

80. 若不等式$\frac{2x^2+\lg m^{2x+1}}{4x^2+6x+3}<1$对于x的一切实数都能成立，求m的范围。

81. 如果$a>b>0$ 则$\frac{a\sin x+b}{a\sin x-b}$不能介于$\frac{a-b}{a+b}$及$\frac{a+b}{a-b}$之间。

82. 解不等式$|\log_a x^2-1|\geqslant|\log_a(-x)|\quad(a>1)$。

83. 解不等式$\frac{(x-6)^2(x^2-4)}{|\lg 5^x-1|}\leqslant 0$。

84. 若 $x\geqslant1,y\geqslant1,z\geqslant1,xyz=10,x^{\lg x}\cdot y^{\lg y}\cdot z^{\lg z}\geqslant10$，试求x，y，z。

85. 若 $\log_a(x^2+1)+\log_a(y^2+4)=\log_a8+\log_a x+\log_a y$，求x与y的值。

86. 若$\log_a x+\log_{a^2}x^4+\log_{a^3}x^9+\cdots+\log_{a^n}x^{n^2}$

$$=\frac{15}{\log_x a}$$

① 求n的值。

② 若$\log_a x$中的x是方程

$$x^3-2x^2-x+2=0$$

的根，问a为何值时，$\dfrac{15}{\log_x a}$的值等于3。

87. 设$e^x-e^{-x}=2\operatorname{tg}\theta$，试证：

① $e^x+e^{-x}=\dfrac{2}{\cos\theta}$；

② $x=\log_e\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta}{2}\right)$

$(e>0,\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2})$。

88. 解方程 $\log_{\cos x}\sin x+\log_{\sin x}\cos x=2$，

89. 解方程 $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x=10$。

90. 解方程 $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{35}{12}$。

91. 试求方程 $x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}}$的正根。

92. 设 $x>0$，试证$1+x+x^2+\cdots+x^{2n}\geqslant(2n+1)x^n$。

93. 对于任何自然数$n>1$，试证：

$$C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n > n \cdot 2^{\frac{n-1}{2}}.$$

94. 试求下列联立不等式的整数解的个数是多少？

$$\begin{cases} y + 2x - x^2 > 3, \\ y - 11x < 171. \end{cases}$$

95. 若$a, b > 0$，且$a + b = k$（定值），则当$|a - b|$愈小时，积ab愈大，特别地，当$a = b$时，ab最大。

96. 若a，$b > 0$且$ab = k$（定值），则当$|a - b|$愈小时，和$a + b$愈小，特别地，当$a = b$时，$a + b$最小。

97. 已知a、b、c、d均为正数，且$a > x$，$b > y$，试求 $(a - x)(b - y)(cx + dy)$之最大值。

98. 已知x为实数，求$\dfrac{2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 2}{(x^2 + 1)^2}$的最小值。

99. 设$f(x) = a(x^2 + 2x + 4)^2 + 3a(x^2 + 2x + 4) + b$的最小值是37，且$f(-2) = 57$。

求a、b及使$f(x) = 37$的x的值。

100. 设实数x，y适合等式$x^2 - 2xy + y^2 - \sqrt{3}x - \sqrt{3}y + 12 = 0$，试求下列各式的最小值：

①$x + y$；②xy；③$x^3 + y^3$。

101. 设a，b为定实数，且$(a - 1)(b - 1) > 0$，试求：

$$p = \frac{(a + \cos\theta)(b + \cos\theta)}{1 + \cos\theta}$$

之最小值。

102. 对一切实数x，证明二重不等式

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{1 + x + x^2}{1 - x + x^2} \leqslant 3$$

并指出何时等号成立。

103. 有成等比数列的三数，其和为 b，求其乘积的最大值与最小值。

⑩ **104.** 设$x>0$，$y>0$，m与n是正有理数。试证：若 $x+y=p$（定值），则当$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}$时 $x^m y^n$有最大值。

105. 有一无穷递缩等比数列，它的第一、二项的和是以下所有项的和的 k倍，试求这个数列的公比。

106. 设数列1,2,4,…前n项的和是$s_n=a+bn+cn^2+dn^3$，求这数列的通项a_n的公式，并确定a,b,c,d的值。

107. 求一等差数列，其前n项之和与后kn项之和的比是一个与 n无关的常量。

108. 求$\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\frac{4}{5!}+\cdots+\frac{19}{20!}$的近似值，使其精确到第三位小数。

109. 求证：$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

110. 若$5\left|\frac{a+2b-3}{b+1}\right|+3(a+3b)^2=0$，

求无穷数列ab，b，$\frac{b}{a}$，…的和。

111. 求$\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{2n\text{个}}-\underbrace{22\cdots2}_{n\text{个}}}$.

112. 求和(a) $S=5+55+555+\cdots+\underbrace{555\cdots5}_{(n\text{个}5)}$；

(b) $S=81+891+8991+\cdots+$(第n项)。

113. 求数列1，22，333，4444，…，前n项的和。

114. 试求级数$k^2+(kk)^2+(kkk)^2+\cdots$

的前n项的和，此处k是小于十的自然数。

115. 若n为自然数，证明：

$$1+3\cdot2+5\cdot2^2+\cdots+(2n-1)2^{n-1}$$
$$=3-2^n+(n-1)2^{n+1}.$$

116. 求前n个自然数的平方和S_2。

117. 求前n个自然数的立方和S_3。

118. 在偶数序列$2,4,6,8,10,\cdots,2n,\cdots$中，依次取第一项为级数的第一项；第二、三两项的和为级数的第二项；第四、五、六项的和为第三项；…，求该级数的通项公式，和它的前n项的和。

119. 求和$S=1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)$。

120. 设$a_1,a,\cdots,a_n$与$b_1,b_2,\cdots,b_n$都是等差数列，a与b分别是它们的首项，d与δ分别是它们的公差，试求和

$$S_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

121. 求和$S_n=1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}n^2$（n为自然数）.

122. 求和：$S=m!+\dfrac{(m+1)!}{1!}+\dfrac{(m+2)!}{2!}+\cdots+\dfrac{(m+n)!}{n!}$.

123. 证明：对于任意的等差数列a_1，a_2，…，a_n，…

当$n\geqslant2$时，必有

$$a_1-C_n^1a_2+C_n^2a_3-\cdots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}a_n+$$
$$+(-1)^nC_n^na_{n+1}=0.$$

124. 当$n\geqslant3$时，无穷数列$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots(x_1\neq0)$满足

$$(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2)(x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2)$$