数　值　予　报

（北京大学地球物理系数值予报进修班）

第一分册

一九七四年四月

数值予报（第一分册）

目　　录

第一章　基本方程　(1)—(68)

§1　基本方程 ……………………………………(1)

§2　球极坐标系和局地直角坐标系中的基本方程…(15)

§3　（x、y、p、t）坐标系中的基本方程 …(28)

§4　涡度方程和散度方程 ………………………(38)

§5　地图投影 ……………………………………(41)

§6　地图直角坐标系中的基本方程 ……………(50)

第二章　尺度理论　(69)—(111)

§1　引言 …………………………………………(69)

§2　热力学变量与动力学变量 …………………(73)

§3　连续方程与水平运动方程的初步简化 ……(76)

§4　垂直运动方程简化 …………………………(83)

§5　热力学方程尺度分析 ………………………(85)

§6　连续方程进一步简化 ………………………(88)

§7　（x、y、p、t）坐标系基本方程组的尺度分析 …………………………………………(92)

§ 8　涡度方程与散度方程的简化 ………………… (98)
§ 9　小结 ……………………………………………… (108)

第三章　大气波动 —(187)
§ 1　波动的表示法及方程组的线性化 ……… (112)
§ 2　声波 ……………………………………………… (125)
§ 3　重力波 …………………………………………… (133)
§ 4　惯性波 …………………………………………… (150)
§ 5　大气长波 ………………………………………… (155)
§ 6　混合波及滤波 ………………………………… (163)

第四章　大气能量 (188)—(217)
§ 1　大气中动能的制造 ……………………………… (188)
§ 2　大气中的位能 …………………………………… (192)
§ 3　有效位能 ………………………………………… (196)
§ 4　设计数值予报模式要考虑的能量问题 … (201)
§ 5　实际大气中能量转换的过程 ………………… (208)

第一章 大气运动的基本方程

大气的运动是受一定的流体动力学和热力学规律支配的。所谓"数值天气预报"就是指通过用数值法求解支配大气运动的流体动力学和热力学方程组来预报未来的气象要素场。因此了解支配大气运动的基本物理规律及体现这些规律的基本方程是学习"数值予报"的基础。

§1 基本方程

有关大气运动的基本方程是(1)力学第二定律或动力学方程，(2)质量守恒定律或连续方程，(3)状态方程，(4)热力学第一定律或热力学方程，(5)水汽守恒方程。

大气的运动在很大尺度范围内可看作是理想气体，今后我们都是这样假定的。

一、动力学方程（或运动方程）：

对于一个固定的（惯性）参考系，力学第二定律可以写成

$$\frac{d_a\vec{V}_a}{dt}=\vec{M} \tag{1.1}$$

其中下标a表示在惯性系统中观测到的量，$\vec{V}_a$叫绝对速度，$\frac{d_a\vec{V}_a}{dt}$叫绝对加速度。$\vec{M}$表示单位质量空气受力的总和。（1.1）式表示惯性系统（绝对参考系）中的运动规律。而日常观测到的风速等是在旋转着的地球上测量的，旋转着的地球本身具有加速度，是非惯性系统，因此我们希望把运动

规律用相对于非惯性系统的变量，也就是用地球上测量的变量来表示。假定地球旋转角速度为$\vec{\Omega}$，则绝对速度$\vec{V}_a$可以写成相对于地球的速度$\vec{V}$和旋转速度之和。即

$$\vec{V}_a = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \qquad (1.2)$$

这里$\vec{r}$是以地球中心为起点的质点位置向量。

现在来将绝对加速度$\frac{d_a \vec{V}_a}{dt}$用相对于地球的量来表示。令$\vec{i}'$，$\vec{j}'$，$\vec{k}'$为绝对参考系中一组正交坐标轴，$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$为旋转地球参考系中的一组正交坐标轴。则任意一个向量$\vec{A}$在这两个坐标系中可以表示成

$$\vec{A} = A'_x \vec{i}' + A'_y \vec{j}' + A'_z \vec{k}' = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

$\vec{A}$对时间t的导数可以写成

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA'_x}{dt}\vec{i}' + \frac{dA'_y}{dt}\vec{j}' + \frac{dA'_z}{dt}\vec{k}'$$

$$= \frac{dA_x}{dt}\vec{i} + \frac{dA_y}{dt}\vec{j} + \frac{dA_z}{dt}\vec{k} + A_x\frac{d\vec{i}}{dt}$$

$$+ A_y\frac{d\vec{j}}{dt} + A_z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

根据单位向量求导数的规则有

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{i}, \quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{j}, \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{k}$$

因此

$$\frac{d_a\vec{A}}{dt}=\frac{d\vec{A}}{dt}+\vec{\Omega}\times\vec{A}$$

现在用$\vec{V}_a$代替$\vec{A}$有

$$\frac{d_a\vec{V}_a}{dt}=\frac{d\vec{V}_a}{dt}+\vec{\Omega}\times\vec{V}_a$$

再利用(1.2)式得

$$\frac{d_a\vec{V}_a}{dt}=\frac{d(\vec{V}+\vec{\Omega}\times\vec{r})}{dt}+\vec{\Omega}\times(\vec{V}+\vec{\Omega}\times\vec{r})$$

$$=\frac{d\vec{V}}{dt}+\vec{\Omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}+\vec{\Omega}\times\vec{V}+\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})$$

由于$\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{V}$ 则

$$\frac{d_a\vec{V}_a}{dt}=\frac{d\vec{V}}{dt}+2\vec{\Omega}\times\vec{V}+\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}) \quad (1.3)$$

(1.3)式右边第一项是相对加速度，第二项为柯氏加速度，第三项为向心加速度。

现在来分析空气受的力。单位质量空气受的力$\vec{M}$包括：(1)地球引力$\vec{g}_a$，(2)气压梯度力$\vec{G}$。(3)摩擦力$\vec{F}$。下面分别讨论之。

(1)地球引力$\vec{g}_a$：

根据万有引力定律，单位质量空气受到的地心引力为

$$\vec{g}_a=-\frac{GM}{r^3}\vec{r}$$

其中G＝6.658×10^{-8}达因厘米^{2}克$^{-2}$为引力常数。

$M=5.985\times10^{27}$克为地球的质量。由此可知地心引力方向指向地心，大小为

$$\vec{g}_a=\frac{GM}{r^2}\approx\frac{GM}{a^2}=9.822\text{米/秒}^2。$$

(2) 气压梯度力$\vec{G}$:

气压梯度力是由空气间相互作用而产生的，它是内力。单位质量空气所受的气压梯度力为

$$\vec{G}=-\frac{1}{\rho}\nabla_3 P \qquad (1.4)$$

其中∇_3是三维微分向量算符，在直角坐标系中$\nabla_3=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$。气压梯度力的方向与等压面相垂直由高压指向低压，大小与气压梯度成正比。与密度成反比。

(3) 摩擦力$\vec{F}$:

摩擦力又分外摩擦力和内摩擦力。外摩擦力是指运动的空气与静止的下垫面之间的相互作用对空气运动的阻力，它出现在边界条件中。而内摩擦力则是指空气内由于分子或湍流运动引起的动量交换的力学效应，也叫粘性力。

对于单位质量空气的分子粘性力$\vec{F}_1$为

$$\vec{F}_1=\frac{\mu}{\rho}\nabla_3^2\vec{V}+\frac{\mu}{3\rho}\nabla_3(\nabla_3\cdot\vec{V})$$

其中μ为动力学分子粘性系数，$\nu=\frac{\mu}{\rho}$称为运动学分子粘性系数。∇_3^2为三维拉普拉斯。实际应用时，由于分子粘性力很小常常把它略去。

除了分子粘性力外，还有由湍流动量交换造成的湍流粘

性力 $\vec{F}_2$ 根据混合长理论，$\vec{F}_2=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(Az\frac{\partial\vec{V}}{\partial z}\right)$，其中 Az 为湍流交换系数。这个粘性力比分子粘性力要大得多，但一般只在湍流运动显著的大气边界层作用才较大，讨论自由大气的运动时常不考虑这些粘性力。

把(1.3)，(1.4)等代入(1.1)，得到相对于旋转地球的运动方程为

$$\frac{d\vec{V}_3}{dt}+2\vec{\Omega}\times\vec{V}_3+\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})$$

$$=-\frac{1}{\rho}\nabla_3 P+\vec{g}_a+\vec{F}$$

或

$$\frac{d\vec{V}_3}{dt}=-\frac{1}{\rho}\nabla_3 P+\vec{g}_a-\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})$$

$$-2\vec{\Omega}\times\vec{V}_3+\vec{F}$$

其中下标"3"表示三维的量。上式说明在非惯性参考系中，附加上惯性力(柯氏力和离心力)后，力学第二定律的形式仍然成立。通常把地球引力和离心力合併，其合力即通常所说的重力，以 $\vec{g}$ 表示，见图1.1

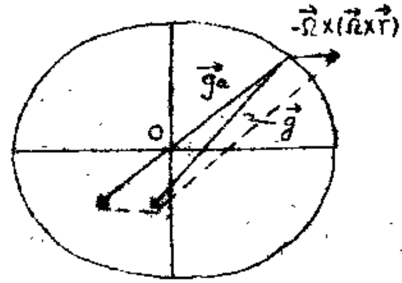

图 1.1

$$\vec{g}=\vec{g}_g-\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})$$

重力的方向与地表面垂直，数值随纬度和高度稍有变化，以后我们不要求准确地计算重力时，都假定重力为常数

$$g=980\text{厘米/秒}^2$$

于是，以旋转地球为参考系的运动方程可写成

$$\frac{d\vec{V}_3}{dt}=-\frac{1}{\rho}\nabla_3 P-2\vec{\Omega}\times\vec{r}_3+\vec{g}+\vec{F} \tag{1.5}$$

二、连续方程：

空气运动过程中遵守的另一个基本定律是质量守恒定律。假定单位质量空气的密度ρ，体积（即比容）为α，即$\rho\alpha=1$。则根据质量守恒定律有

$$\frac{d(\rho\alpha)}{dt}=0$$

即
$$\rho\frac{d\alpha}{dt}+\alpha\frac{d\rho}{dt}=0$$

或
$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dt}=0$$

而散度是体积的相对变化率，即

$$\nabla_3\cdot\vec{V}_3=\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dt}$$

则连续方程可写成

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla_3\cdot\vec{V}_3=0 \tag{1.6}$$

（1.6）式说明气块密度的变化只是由于体积的膨胀或收缩造成的。

根据个别变化$\frac{d}{dt}$与局地变化$\frac{\partial}{\partial t}$的关系

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{d\rho}{dt}+\vec{V}_3\cdot\nabla_3\rho$$

（1.6）可写成

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{V}_3\cdot\nabla_3\rho+\rho\nabla_3\cdot\vec{V}_3=0$$

利用向量运算规则$\nabla\cdot(a\vec{A})=a\nabla\cdot\vec{A}+\vec{A}\cdot\nabla a$

连续方程还可写成

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\nabla_3\cdot(\rho\vec{V}_3)\qquad(1.7)$$

（1.7）式表示固定空间体积中密度的变化是由于穿过体积表面流进和流出的质量不相等所造成的。

三、状态方程

决定空气热力状态的物理量叫状态参数，对于理想气体，状态参数为气压P，密度ρ，和温度T。实验表明这些状态参数不是彼此无关的。对于每个物质，这些状态参数间都满足一定的关系，即状态方程：

$$f(P,\rho,T)=0$$

对于理想气体，状态方程形式为

$$P=\rho RT\qquad(1.8)$$

（1.8）对于空气或湿空气都适用。对于干空气（1.8）中

应取干空气的气体常数$R=2.87\times10^6$尔格/克·度，对于湿空气，(1.8)中R仍可取干空气的气体常数值，但这时的湿度T应该理解为虚温T_v。

$$T_v=T(1+0.608q)$$

其中q为比湿。也就是说对于湿空气，状态方程实际上是

$$P=\rho RT(1+0.608q) \qquad (1.8')$$

四、热力学第一定律

如果把空气当作非粘性气体，考虑单位质量的空气。令Q为外界对块空气的加热率。W为空气通过膨胀对环境的功率，E为空气的内能，则热力学第一定律可写成如下形式

$$Q=\frac{dE}{dt}+W$$

该定律表示：加给一块空气的热量，一部分用于加热空气使其内能变化，剩下的部分消耗于气体膨胀时反抗外界压力而做功，这是能量守恒定律的一种形式。

由于把空气当理想气体处理。则内能$E=C_vT$，其中C_v为定容比热，对于干空气$C_v=0.169$卡/克·度。单位质量空气膨胀做的功为$P\frac{d\alpha}{dt}$。把这些代入热力学第一定律的方程得

$$Q=C_v\frac{dT}{dt}+AP\frac{d\alpha}{dt} \qquad (1.9)$$

利用状态方程(1.8)，热力学第一定律还可写成一种更常用的形式

$$Q = Cp\frac{dT}{dt} - \frac{ART}{p}\frac{dp}{dt} \qquad (1.10)$$

其中Cp为定压比热，对于干空气Cp＝0.2375卡／克·度。

若引用位温

$$\theta = T\left(\frac{1000}{P}\right)^{\frac{AR}{C_p}}$$

取对数后微分可以证明

$$\frac{d\ell n\theta}{dt} = \frac{1}{T}\frac{dT}{dt} - \frac{AR}{C_pP}\frac{dP}{dt}$$

因此与(1.10)比较可知，用位温表示，热力学第一定律可写成

$$Q = C_pT\frac{d\ell n\theta}{dt} \qquad (1.11)$$

对于绝热过程Q＝0，则(1.10)变成

$$C_p\frac{dT}{dt} - \frac{ART}{P}\frac{dP}{dt} = 0$$

即

$$C_p\frac{d\ell nT}{dt} - AR\frac{d\ell nP}{dt} = 0$$

而由状态方程P＝ρRT取对数微分得

$$\frac{d\ell nT}{dt} = \frac{d\ell nP}{dt} - \frac{d\ell n\rho}{dt}$$

因此，绝热方程变成

$$(C_p - AR)\frac{d\ln P}{dt} = C_p\frac{d\ln\rho}{dt}$$

而 $C_p = AR = Cv$，则绝热方程又可写成

$$\frac{dP}{dt} = \gamma\frac{P}{\rho}\frac{d\rho}{dt} \qquad (1.12)$$

其中 $\gamma = C_p/Cv$。

若用位温表示，则由（1.11）绝热方程变为

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \qquad (1.13)$$

即干绝热过程中位温守恒。

当空气中包含的水份发生气态和液态间的相变时，(1.10)左边除了外界加热外还要加上相变时释放的热量和液态水温度下降对空气的加热量。假定 q 为比湿，L 为相变潜热，则相变时释放热量的加热率为 $-L\frac{dq}{dt}$。又令 ℓ 为单位质量空气中所含液态水的质量，C_ℓ 为液态水的比热，则液态水温度降低 dT 对空气的加热率为 $-C_\ell\,\ell\frac{dT}{dt}$，利用这些关系，当有气态和液态水份间相变时，热力学第一定律变成

$$Q - L\frac{dq}{dt} - C_\ell\,\ell\frac{dT}{dt} \doteq C_p\frac{dT}{dt} - \frac{ART}{P}\frac{dP}{dt} \qquad (1.14)$$

如果相变是饱和绝热凝结过程，则（1.14）变成

$$-L\frac{dq_s}{dt} = C_p\frac{dT}{dt} - \frac{ART}{P}\frac{dP}{dt} \qquad (1.15)$$

其中q_s为饱和比湿。

五、水份守恒方程

当讨论包含水份的过程时，还要用到水份守恒方程。假定水汽密度为ρ_v，单位体积空气中水汽的源或汇为S（因而单位质量空气中水汽的源或汇为S/ρ）。则水份守恒定律表示 单位质量空气中水汽含量$\rho_v\alpha$的变化等于水汽的源或汇，即

$$\frac{d(\rho_v\alpha)}{dt}=\frac{S}{\rho}$$

把左边的导数展开，并利用散度定义$\nabla_3\cdot\vec{V}=\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dt}$，得

$$\frac{d\rho_v}{dt}+\rho_v\nabla_3\cdot\vec{V}_3=S \qquad (1.16)$$

根据比湿的定义$q=\rho_v/\rho$，用$\rho_v=\rho q$代入（1.16）并利用连续方程（1.7）得

$$\frac{dq}{dt}=\frac{S}{\rho} \qquad (1.17)$$

（1.17）式即从比湿q表示的水份守恒方程。

如果水汽只因凝结而损失，则

$$\frac{S}{\rho}=\frac{dq_s}{dt} \qquad (1.18)$$

而饱和比湿q_s与饱和水汽压e_s有如下关系

$$q_s=\frac{0.622e_s}{P}$$

把上式取对数后微分，得

$$\frac{1}{q_s}\frac{dq_s}{dt}=\frac{1}{e_s}\frac{de_s}{dt}-\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} \qquad (1.19)$$

再利用克拉贝龙方程可以把e_s变换成温度T，克拉贝龙方程为

$$\frac{de_s}{e_s}=\frac{LdT}{R_v T^2}$$

这里R_v是水汽的气体常数，$R_v=1.608R=4.62\times10^6$尔格／克·度，则(1.19)式变成

$$\frac{dq_s}{dt}=q_s\left(\frac{L}{R_vT^2}\frac{dT}{dt}-\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}\right) \qquad (1.20)$$

因此，如果相变是按饱和绝热凝结过程进行，则用热力学第一定律(1.14)消去(1.20)中的$\frac{dT}{dt}$，得

$$\frac{dq_s}{dt}=\frac{q_sT}{P}\left(\frac{LR-C_pR_vT}{C_pR_vT^2+q_sL^2}\right)\frac{dP}{dt} \qquad (1.21)$$

代入(1.17)(1.18)得到水份守恒方程为

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\delta F}{P}\frac{dP}{dt} \qquad (1.22)$$

其中 $$F=q_sT\left(\frac{LR-C_pR_vT}{C_pR_vT^2+q_sL^2}\right) \qquad (1.23)$$

δ定义如下：

$$\begin{cases} 当\dfrac{dP}{dt}<0\ (上升)，及\ q \geq q_s\ (过饱和)时，\ \delta=1 \\ 当\dfrac{dP}{dt}>0\ (下沉)，或\ q < q_s\ (未饱和)时，\ \delta=0 \end{cases}$$

另一种情况是假定，凝结不是在100%而是在某个r_c值的相对湿度下开始的，这时(1.24)中q_s要用$r_c q_s$代替。最合乎实际的假定大概应取凝结率依赖于相对湿度，即假定δ是q/q_s的函数。

如果除了凝结外，水汽的源或汇中还包含水汽的湍流扩散，则(1.16)中还要包含表示水平和垂直方向的水汽湍流通量项$A_v \nabla^2 q$和$\dfrac{\partial}{\partial z}\left(K_v \dfrac{\partial q}{\partial z}\right)$，其中$A_v$和$K_v$分别为水平和垂直方向水汽湍流交换系数。当表面有蒸发或凝结时，还要考虑相应的水汽源或汇。

六、封闭方程组

对于干空气(1.5)，(1.7)，(1.8)，(1.10)组成了关于六个未知量P，ρ，T，u，v，w的六个标量方程的封闭方程组，即

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{V}_3}{dt} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla_3 P - 2\vec{\Omega}\times\vec{V}_3 + \vec{g} + \vec{F} \\ \dfrac{d\rho}{dt} + \rho\nabla_3\cdot\vec{V}_3 = 0 \\ P = \rho R T \\ Q = C_p\dfrac{dT}{dt} - \dfrac{ART}{P}\dfrac{dP}{dt} \end{cases} \tag{1.25}$$