

函数论方法

下册

度克平 李凤友 编著

107/3563/03

天津师范学院数学系

目 录

第七章 数项级数与函数项级数	(1)
§ 1. 上、下极限.....	(1)
1.1 上、下极限的定义与定理.....	(1)
1.2 例 (1—7)	(2)
§ 2. 数项级数.....	(10)
§ 2.1 级数的收敛与发散.....	(10)
2.2 绝对收敛.....	(11)
2.3 数项的加、减、乘法.....	(11)
2.4 例 (8—20)	(12)
§ 3. 函数项级数.....	(34)
3.1 一致收敛.....	(34)
3.2 一致收敛的判别法.....	(35)
3.3 和函数的性质.....	(35)
3.4 例 (21—35)	(36)
习题 (1—34)	(66)
第八章 幂级数与 Taylor 级数	(73)
§ 1. 幂级数.....	(73)
1.1 定义与 Abel 第一原理.....	(73)
1.2 Cauchy—Hadamard 定理.....	(73)
1.3 幂级数的一致收敛性.....	(74)
1.4 Abel 第二定理.....	(75)

1.5 例 (1—21)	(75)
§ 2. Taylor 级数	(107)
2.1 定义与解析函数的幂级数展开式	(107)
2.2 解析函数的各种定义	(109)
2.3 例 (22—43)	(110)
§ 3. Cauchy 积分公式与幂级的一些应用	(144)
√ 3.1 解析函数的唯一性与最大模原理	(144)
△ √ 3.2 解析函数的零点与零点的级	(144)
√ 3.3 幂级数系数的 Cauchy 不等式与 Liouville 定理及代数基本定理	(145)
3.4 例 (44—63)	(145)
习题 (1—51)	(165)
第九章 Laurent 级数与单值函数的孤立奇点	(174)
§ 1. Laurent 级数	(174)
1.1 定义与收敛域	(174)
1.2 解析函数的 Laurent 展开式	(175)
1.3 例 (1—18)	(175)
§ 2. 单值函数的孤立奇点	(197)
2.1 单值函数奇点的分类	(197)
2.2 解析函数在无穷远点的性质	(199)
2.3 例 (19—36)	(200)
习题 (1—34)	(217)
第十章 残数理论及其应用	(222)
§ 1. 残数理论	(222)
1.1 定义与基本定理	(222)
1.2 极点的残数	(222)

1.3	无穷远点的残数	(223)
1.4	例(1—22)	(223)
§ 2.	解析函数的零点, 幅角原理与 Rouché 定理	(244)
2.1	积分 $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ 的计算与幅角原理	(245)
2.2	Rouché 定理与代数基本定理	(247)
2.3	例(23—34)	(248)
§ 3.	残数理论在定积分上的应用	(257)
3.1	用残数求定积分的主要步骤	(257)
3.2	几个引理	(257)
3.3	定理	(258)
3.4	例(35—70)	(259)
	习题 (1—46)	(311)
	第十一章 解析开拓	(318)
§ 1.	解析开拓的原理	(318)
1.1	解析开拓的概念	(318)
1.2	解析开拓的幂级数方法	(320)
1.3	幂级数在收敛圆周上的奇异点	(321)
1.4	例(1—13)	(322)
§ 2.	对称原理, 奇异点的判别法与多值函数	(337)
2.1	对称原理	(337)
2.2	沿连续曲线的解析开拓	(338)
2.3	奇异点的判别法	(339)

2.4 多值函数的概念.....	(340)
2.5 例 (14—23)	(342)
习题 (1—16)	(356)

第七章 数项级数与函数项级数

为了今后的方便，这里增加第一节，作为预备知识。

§1 上、下极限

1.1 上下极限的定义与定理

考虑实数列 $\{a_n\}$ ，若 $\{a_n\}$ 有界，则有收敛的子列。可以证明：所有收敛子列的极限必有最大值与最小值。它们便称为 $\{a_n\}$ 的上极限与下极限，记为：

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = a。$$

若 $\{a_n\}$ 无上界，则定义 $A = +\infty$ ；

若 $\{a_n\}$ 无下界，则定义 $a = -\infty$ 。

所以，任何实数列都有上、下极限，当 $a = A$ 时，则数列 $\{a_n\}$ 收敛。

也可定义：
$$A = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n > k} \{a_n\},$$

$$a = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{n > k} \{a_n\}。$$

还可证明：

定理 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 的充要条件是：对任给

$\varepsilon > 0$ ，有

1) $a_n < A + \varepsilon$, $a_n > a - \varepsilon$ 除了有限个外, 对所有的 n 都成立 (即 $n > N$);

2) $a_n > A - \varepsilon$, $a_n < a + \varepsilon$ 对无穷个 n 成立。

1.2 例

例1. 求以下数列的上、下极限:

$$1) \{a_n\} = \left\{ (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\};$$

$$2) \{a_n\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \dots \right\}$$

$$\left\{ \frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{n+2}{n+1}, \dots \right\}.$$

解 1) $\because a_{2k-1} = - \left(1 + \frac{1}{2k-1} \right)^{2k-1} \rightarrow -e$
 $(k \rightarrow \infty),$

$$a_{2k} = \left(1 + \frac{1}{2k} \right)^{2k} \rightarrow e (k \rightarrow \infty).$$

$$\therefore \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = e, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -e.$$

$$2) \text{ 令 } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n > k} \{a_n\} = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k,$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{n > k} \{a_n\} = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k,$$

这里 $b_k = \sup_{n > k} \{a_n\}$, $c_k = \inf_{n > k} \{a_n\}$ 。

$$\text{由于 } a_n = \begin{cases} 1/\left(\frac{n+3}{2}\right), & n \text{ 为奇数,} \\ \left(\frac{n}{2} + 2\right)/\left(\frac{n}{2} + 1\right), & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$$

$$b_1 = \sup \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \dots \right.$$

$$\left. \frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{n+2}{n+1}, \dots \right\} = \frac{3}{2},$$

$$b_2 = \sup \left\{ \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \dots \right.$$

$$\left. \frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{n+2}{n+1}, \dots \right\} = \frac{3}{2},$$

.....

$$b_{2k-3} = \sup \left\{ \frac{1}{k}, \frac{k+1}{k}, \frac{1}{k+1}, \frac{k+2}{k+1}, \dots \right\} = \frac{k+1}{k},$$

$$b_{2k-2} = \sup \left\{ \frac{k+1}{k}, \frac{1}{k+1}, \frac{k+2}{k+1}, \dots \right\} = \frac{k+1}{k},$$

.....

$$\text{而 } c_1 = c_2 = \dots = c_k = \dots = 0,$$

所以,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

例 2 证明: $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

证 [方法一] 令

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

于是, 对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N_1 与 N_2 , 使当 $n > N_1$ 时有 $a_n < A + \varepsilon$ 与 $n > N_2$ 时 $a_n > a - \varepsilon$.

故当 $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ 时, 有

$$a - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

$$\text{即 } a - 2\varepsilon < A,$$

由 ε 的任意性知: $a \leq A$.

否则, 若 $a > A$, 令 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}(a - A)$, 则有

$$a - 2\varepsilon > A, \text{ 矛盾.}$$

[方法二].

$$\therefore A = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n \geq k} \{a_n\} = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k,$$

$$a = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{n \geq k} \{a_n\} = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k,$$

\therefore 对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N_1 与 N_2 , 使当 $K > N_1$ 时, 有 $b_k < A + \varepsilon$ 与 $K > N_2$ 时有 $a - \varepsilon < c_k$,

而 $b_k \geq c_k$, 故当 $K > N = \max\{N_1, N_2\}$ 时, 有 $a - \varepsilon < c_k \leq b_k < A + \varepsilon$, 即 $a - 2\varepsilon < A$, 故 $a \leq A$.

例 3 证明: 有界数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

证 必要性. 若 $\{x_n\}$ 收敛, 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$. 则对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 当 $n > N$ 时, 有

$$A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon.$$

$$\begin{aligned} \text{于是} \quad A - \varepsilon &\leq \inf\{x_{N+1}, x_{N+2}, \dots\} \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \sup\{x_{N+1}, x_{N+2}, \dots\} \leq A + \varepsilon, \end{aligned}$$

$$\text{即} \quad A - \varepsilon \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq A + \varepsilon.$$

由 ε 的任意性知: $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$.

充分性。若 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = A$,

则对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N_1 与 N_2 , 使当 $n > N_1$ 时, $x_n > A - \varepsilon$ 与 $n > N_2$ 时, $x_n < A + \varepsilon$ 。于是,

当 $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ 时, 有

$$A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon.$$

例 4 证明: 若 $\{x_n\}$ 是有界数列, c 是任意实数, 则

$$1) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} cx_n = \begin{cases} c \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n, & (c > 0); \\ 0, & (c = 0); \\ c \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n, & (c < 0). \end{cases}$$

$$2) \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} cx_n = \begin{cases} c \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n, & (c > 0); \\ 0, & (c = 0); \\ c \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n, & (c < 0). \end{cases}$$

证 1) 若 $c > 0$, 则

$$\begin{aligned}\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} cx_n &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n > k} \{cx_n\} = \lim_{k \rightarrow \infty} c \sup_{n > k} \{x_n\} \\ &= c \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n > k} \{x_n\} = c \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n;\end{aligned}$$

若 $c = 0$, 显然 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} cx_n = 0$;

若 $c < 0$, 则

$$\begin{aligned}\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} cx_n &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n > k} \{cx_n\} = \lim_{k \rightarrow \infty} c \inf_{n > k} \{x_n\} \\ &= c \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{n > k} \{x_n\} = c \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n.\end{aligned}$$

2) 同上可证。

例 5 证明: 若 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 均是有界数列, 则

$$\begin{aligned}\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n &\leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \left\{ \begin{array}{l} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \\ \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \end{array} \right\} \\ &\leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.\end{aligned}$$

证 1) 由于

$$\begin{aligned}\inf_{n \geq k} \{x_n\} + \inf_{n \geq k} \{y_n\} &\leq \inf_{n \geq k} \{x_n + y_n\} \leq \\ &\left\{ \begin{array}{l} \inf_{n \geq k} \{x_n\} + \sup_{n \geq k} \{y_n\}, \\ \sup_{n \geq k} \{x_n\} + \inf_{n \geq k} \{y_n\}, \end{array} \right. \quad (*)\end{aligned}$$

这是因为对任意的 n , 均有

$$x_n \geq \inf \{x_n\}, \quad y_n \geq \inf \{y_n\}.$$

所以 $x_n + y_n \geq \inf\{x_n\} + \inf\{y_n\}$ 。
 故 $\inf\{x_n + y_n\} \geq \inf\{x_n\} + \inf\{y_n\}$ 。
 又 $x_n + y_n \geq \inf\{x_n + y_n\}$, 而 $y_n \leq \sup\{y_n\}$,
 于是 $x_n \geq \inf\{x_n + y_n\} - \sup\{y_n\}$ 。
 故 $\inf\{x_n\} \geq \inf\{x_n + y_n\} - \sup\{y_n\}$,
 即 $\inf\{x_n + y_n\} \leq \inf\{x_n\} + \sup\{y_n\}$ 。

类似的有: $\inf\{x_n + y_n\} \leq \sup\{x_n\} + \inf\{y_n\}$ 。

令 $k \rightarrow \infty$, 对 (*) 式取极限, 即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n. \end{cases}$$

2) 类似 1) 有, $\sup_{n > k} \{x_n + y_n\} \leq \sup_{n > k} \{x_n\} + \sup_{n > k} \{y_n\}$ (*, *)

令 $k \rightarrow \infty$, 对 (*, *) 式取极限即得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \therefore \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [(x_n + y_n) + (-x_n)] \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [(x_n + \\ &+ y_n) + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n) \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \quad (\text{例4, 1}), \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n).$$

同理可得 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$ 。

综合 1), 2), 3) 得证。

例 6 若数例 $\{x_n\}$ 对任何数列 $\{y_n\}$ 均有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

则 $\{x_n\}$ 是收敛的。

证 因为 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$ 对任何的数列 $\{y_n\}$ 成立, 特别的令 $y_n = -x_n$, 则有

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n) \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n - \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n, \end{aligned}$$

所以 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$,

由例 3 知 $\{x_n\}$ 收敛。

例 7 设 $x_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) 证明:

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

证 令 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a$, 则对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N , 当

$n \geq N$ 时, 有 $\frac{x_{n+1}}{x_n} > a - \varepsilon$, 即

$$\frac{x_{N+1}}{x_N} > a - \varepsilon, \quad \frac{x_{N+2}}{x_{N+1}} > a - \varepsilon, \quad \frac{x_{N+3}}{x_{N+2}} > a - \varepsilon, \dots,$$

$$\frac{x_{N+k}}{x_{N+k-1}} > a - \varepsilon,$$

于是 $\frac{x_{N+k}}{x_N} > (a - \varepsilon)^k, x_{N+k} > x_N(a - \varepsilon)^k$

故 $\sqrt[N+K]{x_{N+k}} > \sqrt[N+K]{x_N} \cdot \sqrt[N+K]{(a - \varepsilon)^k}$ 。

令 $k \rightarrow \infty$, 上式两边取极限, 并注意到 $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[N+K]{x_N} = 1$,

而
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[N+K]{(a - \varepsilon)^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (a - \varepsilon)^{N+K} \frac{1}{(a - \varepsilon)^N}$$
$$= a - \varepsilon,$$

所以 $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[N+K]{x_{N+k}} \geq a - \varepsilon$, ε 是任意的。

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \geq a$,

即 $\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}}{x_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$ 。

同理, 令 $\frac{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}}{x_n} = A$, 有 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq A$,

于是 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 。

而 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}$,

故 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 。

若 $a = -\infty$, $A = +\infty$ 结论显然成立。

注: 例 5 与例 7 在讨论上、下极限时, 经常用到。

§2 数项级数

2.1 级数的收敛与发散

设 $\{c_n\}$ 为一复数列，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 为一复数项级数。令 $s_n =$

$\sum_{k=1}^n c_k$ ，若 $\{s_n\}$ 收敛于 S ，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛，其和为 S ，

记为：

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} c_n。$$

若 $\{s_n\}$ 不趋于一个有限极限，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 发散。

定理 1 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛的充要条件是：对任给 $\varepsilon > 0$ ，

存在 N ，当所有的 $n > N$ 与 $P \geq 0$ 时，使

$$\left| \sum_{k=n}^{n+P} c_k \right| < \varepsilon。$$

这可由Cauchy准则推得。

特别，若取 $P = 0$ ，则得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0。$$

这是级数收敛的必要条件，但不是充分条件。例如调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是发散的。

定理 2 若 $c_n = a_n + ib_n$ $S = a + ib$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛于 S 的充要条件是： $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均收敛，

且其和为 a 与 b 。

这可由 $s_n = \sigma_n + i\tau_n = \sum_{k=1}^n a_k + i \sum_{k=1}^n b_k$ 推得。

2.2 绝对收敛

若 $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 也收敛，这时称 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 为**绝对收敛**。

若 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ 不收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 为**条件收敛**。

例如 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 是条件收敛的。

可以证明下面的定理：

定理 3 绝对收敛级数的项重排以后其和不变。

2.3 级数的加、减、乘法

定理 4 若 $S = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ ， $S' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n'$ ，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_n \pm c_n') = S \pm S'.$$

这可由定理 2 推得。

乘法定义：若给定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n'$ ，则称级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_1 c_n' + c_2 c_{n-1}' + \cdots + c_n c_1')$$

为给定两个级数的乘积。

定理 5 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n'$ 都绝对收敛，其和分别为

S 与 S' ，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_1 c_n' + c_2 c_{n-1}' + \cdots + c_n c_1')$$

也绝对收敛，并且有和 $q = S \cdot S'$ 。

注 事实上 $\sum c_n$ 与 $\sum c_n'$ 的各项以任何次序相乘组成的级数（当然不重复也不漏项）也绝对收敛，并且有和 $q = S \cdot S'$

2.4 例

例 8 讨论下列级数是收敛还是发散：

$$1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^{2n}};$$