# 函数论方法

下册

庹克平 李凤友 编著

天津师范学院数学系

# 目　　录

# 第七章 数项级数与函数项级数

为了今后的方便，这里增加第一节，作为预备知识。

## §1 上、下极限

### 1.1 上下极限的定义与定理

考虑实数列 $\{a_n\}$，若 $\{a_n\}$ 有界，则有收敛的子列。可以证明：所有收敛子列的极限必有最大值与最小值。它们便称为 $\{a_n\}$ 的上极限与下极限，记为：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = A, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = a。$$

若 $\{a_n\}$ 无上界，则定义 $A = +\infty$；

若 $\{a_n\}$ 无下界，则定义 $a = -\infty$。

所以，任何实数列都有上、下极限，当 $a = A$ 时，则数列 $\{a_n\}$ 收敛。

也可定义：
$$A = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} \{a_n\},$$
$$a = \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq k} \{a_n\}。$$

还可证明：

**定理** $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = A$，$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = a$ 的充要条件是：对任给 $\varepsilon > 0$，有

1）$a_n < A+\varepsilon$，$a_n > a-\varepsilon$　除了有限个外，对所有的 $n$ 都成立（即 $n > N$）；

2）$a_n > A-\varepsilon$，$a_n < a+\varepsilon$　对无穷个 $n$ 成立。

1.2 例

**例1.** 求以下数列的上、下极限：

1）$\{a_n\} = \left\{(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$；

2）$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}\cdots\cdots \right.$

$\left. \frac{1}{n}, \frac{n+1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{n+2}{n+1}\cdots\right\}$。

**解**　1）$\because$　$a_{2k-1} = -\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)^{2k-1} \longrightarrow -e$

$(k\to\infty)$，

$a_{2k} = \left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k} \longrightarrow e$　$(k\to\infty)$.

$\therefore$　$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = e$，$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = -e$。

2）令　$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k}\{a_n\} = \lim_{k\to\infty} b_k$，

$\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq k}\{a_n\} = \lim_{k\to\infty} c_k$，

这里　$b_k = \sup_{n\geq k}\{a_n\}$，$c_k = \inf_{n\geq k}\{a_n\}$。

由于 $$a_n=\begin{cases}1\Big/\left(\dfrac{n+3}{2}\right), & n\text{为奇数},\\ \left(\dfrac{n}{2}+2\right)\Big/\left(\dfrac{n}{2}+1\right), & n\text{为偶数},\end{cases}$$

$$b_1=\sup\left\{\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{5}{4}\cdots\right.$$

$$\left.\frac{1}{n},\ \frac{n+1}{n},\ \frac{1}{n+1},\ \frac{n+2}{n+1}\cdots\right\}=\frac{3}{2},$$

$$b_2=\sup\left\{\frac{3}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{5}{4}\cdots\right.$$

$$\left.\frac{1}{n},\ \frac{n+1}{n},\ \frac{1}{n+1},\ \frac{n+2}{n+1}\cdots\right\}=\frac{3}{2},$$

……………………………………………

$$b_{2k-3}=\sup\left\{\frac{1}{k},\ \frac{k+1}{k},\ \frac{1}{k+1},\ \frac{k+2}{k+1}\cdots\right\}=\frac{k+1}{k},$$

$$b_{2k-2}=\sup\left\{\frac{k+1}{k},\ \frac{1}{k+1},\ \frac{k+2}{k+1}\cdots\right\}=\frac{k+1}{k},$$

……………………………………………

而 $$c_1=c_2=\cdots=c_k=\cdots=0,$$

所以，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=1,\ \underline{\lim_{n\to\infty}}a_n=0。$$

**例2** 证明：$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n\geqslant\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$。

**证** ［方法一］ 令

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = A,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = a。$$

于是，对任给 $\varepsilon > 0$，存在 $N_1$ 与 $N_2$，使当 $n > N_1$ 时有 $a_n < A + \varepsilon$ 与 $n > N_2$ 时 $a_n > a - \varepsilon$。

故当 $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ 时，有

$$a - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

即 $\quad a - 2\varepsilon < A$，

由 $\varepsilon$ 的任意性知：$a \leqslant A$。

否则，若 $a > A$，令 $\quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}(a - A)$，则有

$$a - 2\varepsilon > A，矛盾。$$

〔方法二〕。

$\because \quad A = \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geqslant k}\{a_n\} = \lim_{k\to\infty} b_K,$

$\quad\quad a = \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geqslant k}\{a_n\} = \lim_{k\to\infty} c_K,$

$\therefore$ 对任给 $\varepsilon > 0$，存在 $N_1$ 与 $N_2$，使当 $K > N_1$ 时，有 $b_k < A + \varepsilon$ 与 $K > N_2$ 时有 $a - \varepsilon < c_k$，

而 $b_k \geqslant c_k$，故当 $K > N = \max\{N_1, N_2\}$ 时，有 $a - \varepsilon < c_k \leqslant b_k < A + \varepsilon$，即 $a - 2\varepsilon < A$，故 $a \leqslant A$

**例 3** 证明：有界数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n。$$

**证** 必要性。若 $\{x_n\}$ 收敛，令 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$。则对任给 $\varepsilon > 0$，存在 $N$，当 $n > N$ 时，有

$$A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon。$$

于是 $$A-\varepsilon\leqslant \inf\{x_{N+1},x_{N+2}\cdots\cdots\}\leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n$$

$$\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n\leqslant \sup\{x_{N+1},x_{N+2}\cdots\cdots\}\leqslant A+\varepsilon,$$

即 $$A-\varepsilon\leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n\leqslant A+\varepsilon。$$

由 $\varepsilon$ 的任意性知：$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n=\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$。

充分性。若 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n=\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n=A$，

则对任给 $\varepsilon>0$，存在$N_1$与$N_2$，使当 $n>N_1$ 时，$x_n>A-\varepsilon$ 与 $n>N_2$ 时，$x_n<A+\varepsilon$。于是，

当 $$n>N=\max\{N_1,N_2\}时，有$$

$$A-\varepsilon<x_n<A+\varepsilon\ 。$$

**例 4** 证明：若 $\{x_n\}$ 是有界数列，$c$ 是任意实数，则

1） $$\varlimsup_{n\to\infty} cx_n=\begin{cases} c\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n, & (c>0)\ ;\\ 0, & (c=0)\ ;\\ c\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n, & (c<0)\ 。\end{cases}$$

2） $$\varliminf_{n\to\infty} cx_n=\begin{cases} c\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n, & (c>0)\ ;\\ 0, & (c=0)\ ;\\ c\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n, & (c<0)\ 。\end{cases}$$

**证** 1）若 $c>0$，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, cx_n = \lim_{k\to\infty}\sup_{n\geq k}\{cx_n\} = \lim_{k\to\infty} c\sup_{n\geq k}\{x_n\}$$

$$= c\lim_{k\to\infty}\sup_{n\geq k}\{x_n\} = c\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n;$$

若 $c=0$，显然 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, cx_n = 0$；

若 $c<0$，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, cx_n = \lim_{k\to\infty}\sup_{n\geq k}\{cx_n\} = \lim_{k\to\infty} c\inf_{n\geq k}\{x_n\}$$

$$= c\lim_{k\to\infty}\inf_{n\geq k}\{x_n\} = c\,\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n。$$

2）同上可证。

**例5** 证明：若 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 均是有界数列，则

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n \leq \underline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n+y_n) \leq \left\{\begin{array}{l} \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n \\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n \end{array}\right\}$$

$$\leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n+y_n) \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n。$$

**证** 1）由于

$$\inf_{n\geq k}\{x_n\} + \inf_{n\geq k}\{y_n\} \leq \inf_{n\geq k}\{x_n+y_n\} \leq$$

$$\left\{\begin{array}{l} \inf\limits_{n\geq k}\{x_n\} + \sup\limits_{n\geq k}\{y_n\}, \\ \sup\limits_{n\geq k}\{x_n\} + \inf\limits_{n\geq k}\{y_n\}, \end{array}\right. \qquad (*)$$

这是因为对任意的 $n$，均有

$$x_n \geq \inf\{x_n\}, \qquad y_n \geq \inf\{x_n\}。$$

所以　　$x_n+y_n \geqslant inf\{x_n\}+inf\{y_n\}$。

故　　$inf\{x_n+y_n\} \geqslant inf\{x_n\}+inf\{y_n\}$。

又　　$x_n+y_n \geqslant inf\{x_n+y_n\}$，而$y_n \leqslant sup\{y_n\}$，

于是　　$x_n \geqslant inf\{x_n+y_n\}-sup\{y_n\}$。

故　　$inf\{x_n\} \geqslant inf\{x_n+y_n\}-sup\{y_n\}$，

即　　$inf\{x_n+y_n\} \leqslant inf\{x_n\}+sup\{y_n\}$。

类似的有：$inf\{x_n+y_n\} \leqslant sup\{x_n\}+inf\{y_n\}$。

令 $k\to\infty$，对（$*$）式取极限，即得

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n+\underline{\lim}_{n\to\infty} y_n \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n+y_n) \leqslant \begin{cases} \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n+\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n, \\ \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n+\underline{\lim}_{n\to\infty} y_n \end{cases}。$$

2）类似 1）有，$\sup_{n\geqslant k}\{x_n+y_n\} \leqslant \sup_{n\geqslant k}\{x_n\}+\sup_{n>k}\{y_n\}$（$*$，$*$）

令 $k\to\infty$，对（$*$，$*$）式取极限即得

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n+y_n) \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n+\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$$

3）　∵　$\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n=\overline{\lim}_{n\to\infty}[(x_n+y_n)+(-x_n)] \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty}[(x_n+$

$+y_n)+\overline{\lim}_{n\to\infty}(-x_n)$

$=\overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n+y_n)-\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$　（例4,1)），

∴　$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n+\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n+y_n)$。

同理可得 $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n+\underline{\lim}_{n\to\infty} y_n \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty}(x_n+y_n)$。

综合1），2），3）得证。

**例6** 若数例$\{x_n\}$对任何数列$\{y_n\}$均有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n,$$

则$\{x_n\}$是收敛的。

**证** 因为$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$对任何的数列$\{y_n\}$成立，特别的令$y_n=-x_n$，则有

$$0=\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n-y_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n)$$

$$=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n-\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n,$$

所以
$$\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n,$$

由例3知$\{x_n\}$收敛。

**例7** 设$x_n>0$（$n=1, 2, \cdots\cdots$）证明：

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n}\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n}\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}。$$

**证** 令 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}=a$，则对任给$\varepsilon>0$，存在$N$，当$n\geqslant N$时，有$\frac{x_{n+1}}{x_n}>a-\varepsilon$，即

$$\frac{x_{N+1}}{x_N}>a-\varepsilon,\ \frac{x_{N+2}}{x_{N+1}}>a-\varepsilon,\ \frac{x_{N+3}}{x_{N+2}}>a-\varepsilon,\cdots\cdots,$$

$$\frac{x_{N+k}}{x_{N+k-1}}>a-\varepsilon,$$

于是　　$\dfrac{x_{N+k}}{x_N}>(a-\varepsilon)^k$，$x_{N+k}>x_N(a-\varepsilon)^k$

故　　$\sqrt[N+K]{x_{N+k}}>\sqrt[N+K]{x_N}\cdot\sqrt[N+K]{(a-\varepsilon)^k}$。

令 $k\to\infty$，上式两边取极限，并注意到 $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[N+K]{x_N}=1$，

而　　$\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[N+K]{(a-\varepsilon)^k}=\lim\limits_{k\to\infty}(a-\varepsilon)\sqrt[N+K]{\dfrac{1}{(a-\varepsilon)^N}}$

$=a-\varepsilon$,

所以　　$\varliminf\limits_{k\to\infty}\sqrt[N+K]{x_{N+k}}\geqslant a-\varepsilon$，$\varepsilon$ 是任意的。

故　　$\varliminf\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}\geqslant a$,

即　　$\varliminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$ 。

同理，令　　$\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=A$，有 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}\leqslant A$,

于是　　$\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ 。

而　　$\varliminf\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}$,

故　　$\varliminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ 。

若 $a=-\infty$，$A=+\infty$结论显然成立。

注：例 5 与例 7 在讨论上、下极限时，经常用到。

## §2 数 项 级 数

### 2.1 级数的收敛与发散

设 $\{c_n\}$ 为一复数列，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 为一**复数项级数**。令 $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k$，若 $\{s_n\}$ 收敛于 $S$，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛，其和为 $S$，记为：

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} c_n。$$

若 $\{s_n\}$ 不趋于一个有限极限，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 发散。

**定理 1　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛的充要条件是：对任给 $\varepsilon > 0$，存在N，当所有的 $n > N$ 与 $P \geqslant 0$ 时，使**

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} c_k \right| < \varepsilon。$$

这可由Cauchy准则推得。

特别，若取 $P = 0$，则得

$$\lim_{n \to \infty} c_n = 0。$$

这是级数收敛的必要条件，但不是充分条件。例如调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的。

**定理 2**　若$c_n = a_n + ib_n$　$S = a + ib$

**则**　$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$收敛于$S$的充要条件是：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$均收敛，且其和为$a$与$b$。

这可由$s_n = \sigma_n + i\tau_n = \sum_{k=1}^{n} a_k + i\sum_{k=1}^{n} b_k$推得。

**2.2 绝对收敛**

若$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$也收敛，这时称$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$为**绝对收敛**。

若$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$收敛，但$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|$不收敛，则称$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$为**条件收敛**。

例如$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$是条件收敛的。

可以证明下面的定理：

**定理 3**　**绝对收敛级数的项重排以后其和不变。**

**2.3 级数的加、减、乘法**

**定理 4**　**若**$S = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$，$S' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n'$，**则**

$$\sum_{n=1}^{\infty}(c_n \pm c_n') = S \pm S'。$$

这可由定理 2 推得。

乘法定义：若给定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n'$，则称级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(c_1c_n' + c_2c'_{n-1} + \cdots + c_nc_1')$$

为给定两个级数的**乘积**。

**定理 5　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n'$ 都绝对收敛，**其和分别为 $S$ 与 $S'$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(c_1c_n' + c_2c_{n-1} + \cdots + c_nc_1')$$

**也绝对收敛，并且有和 $q = S \cdot S'$。**

注　事实上 $\sum c_n$ 与 $\sum c_n'$ 的各项以任何次序相乘组成的级数（当然不重复也不漏项）也绝对收敛，并且有和 $q = S \cdot S'$

**2.4 例**

**例 8**　讨论下列级数是收敛还是发散：

1）　$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^{2n}}$；