

中等师范学校数学 教学参考书

代数与初等函数

第一册

(试用本)

中师数学教学参考资料编写组

说明

1312893

01-42/03

一九八三年八月一日至八月十日，教育部在河北昌黎举办了全国中师数学教材讲习班，参加会议的有全国各省市部分中等师范的数学教师代表一百多名。与会同志一致希望全国统编的中师数学教材能有一套教学参考书，不但便于教学进度、目的要求趋于统一，而且有利于教师按师范特点完成数学教学任务。在有关领导同志的支持下，我们组织了安徽、福建、湖北、湖南、四川、陕西等六个省的部分数学教师分别编写了这套教学参考书。



CS1502701

本册教学参考书系由安徽赵正斌（桐城师范）、项本槐（霍邱师范）等根据中师数学《代数与初等函数》第一册（试用本）编写的，在编写过程中注意突出了师范特点，望使用中注意以下各点：

1 要加强政治思想教育，端正学习态度和学习目的，尤其是专业思想教育，它们是培养合格的高质量的小学教师的根本保证。

②要立足于“改”，勇于创新，为了培养和造就高质量的人才，为了发展初等教育，必须适应新形势，进行教学改革。因此，在完成数学基础知识教学任务的同时，要加强师范生在“说”、“写”、“画”、“算”、制作教具等方面的训练，培养自学能力，使师范生不但现在学好数学，而且将来能教好数学，一定要在基础知识，教学基本功两方面狠下功夫。所以要打破“满堂灌，学生被动的局面，创出一条适合新形势发展的教学新路来。

由于我们水平不高、经验不足，编写时间仓促，书中定有缺点错误，请同志们在使用中提出宝贵意见。

中师数学教学参考资料编写组

一九八四年二月

目 录

分类号

G63
64

第一章、集合与对应.....	1
I、目的要求.....	1
II、课时分配.....	1
III、教材说明.....	1
IV、部分练习、习题提示和答案.....	8
第二章、函数、幂函数、指数函数、对数函数.....	10
I、目的要求.....	20
II、课时分配.....	20
III、教材说明.....	21
IV、部分练习、习题提示和答案.....	29
第三章、三角函数.....	50
I、目的要求.....	50
II、课后分配.....	50
III、教材说明.....	51
IV、部分练习、习题提示和答案.....	74
第四章、两角和与差、倍角、半角的三角函数.....	99
I、目的要求.....	99
II、课后分配.....	96
III、教材说明.....	100
IV、部分练习、习题提示和答案.....	123
V、附录.....	128

2017138

第五章、反三角函数和简单的三角方程	133
I、目的要求	122
II、课时分配	122
III、教材说明	122
IV、部分练习、习题提示和答案	154
V、附录	151

关于《代数与初等函数》第一册的一些历史资料	161
-----------------------------	-----

8	案答时示提题区, 区教代数, VI
01	数函数反, 数函数混, 数函幕, 数函, 章二第
08	求要前目, I
20	题代司数, II
21	题代林数, III
22	案答时示提题区, 区教代数, VI
26	数函三, 章三第
28	求要前目, I
29	题代司数, II
31	题代林数, III
34	案答时示提题区, 区教代数, VI
39	数函三前前半, 前前, 数函前前前, 章四第
39	求要前目, I
40	题代司数, II
100	题代林数, III
153	案答时示提题区, 区教代数, VI
158	求要前目, V

8511100

第一章 集合与对应

1、目的要求

1. 使学生理解集合、子集、交集、并集、差集、补集等概念，以及掌握它们的性质，并能正确地使用有关术语和符号。

2. 通过学习集合间元素的对应关系，分清单值对应、一一对应，以及逆对应存在的基础。

3. 了解对等集合、可数集合，以及它们的性质。

4. 通过学习揭示集合、对应之间的内在联系，为学习函数打下基础，对学生进行辩证唯物主义的思想教育。

I、课时分配

教学时间：约 12 课时，具体分配如下（仅供参考）：

1. 1 集合	约 2 课时
1. 2 子集	约 1 课时
1. 3 交集和并集	约 3 课时
1. 4 差集和补集	约 1 课时
1. 5 单值对应	约 1 课时
1. 6 一一对应和逆对应	约 1 课时
1. 7 对等集合和可数集合	约 2 课时
小结复习	约 1 课时

II、教材说明

本章教材是在学生学过了初中数学基础上，引入集合与

对应的概念，通过分析集合间的元素对应关系，为进一步研究函数增添了必要的数学知识，也是完成认识上一个飞跃。

本章教材分为两大节：第一大节，是通过实例描述集合与元素的概念，介绍集合的表示法，接着说明集合间的关系，和交、并、差、补的运算。第二大节通过框图研究对应的概念和性质。

本章重点是集合概念和单值对应。难点是对应。

为了解决难点，突出重点，要注意从实例出发，结合直观图形，多运用对比方法，说明有关概念和性质，从而能从感性认识提高到理性认识。

一. 集合

1. 1 集合

1. 集合与对应的概念是近代数学中的最基础、最重要的概念，集合、对应和几何中点、直线、平面等概念一样是不可定义的，只能对它们作描述性的说明。许多近代数学，如数理统计、数理逻辑、概率论、实变函数、泛函分析、拓扑学等都建立在集合的基础上。尽早让学生接触集合、对应等思想，不仅使学生对初等数学中一些基本概念理解更深刻，对小学数学表达更明确，而且为今后学习近代数学提供了有利条件。

课本从学生已有知识出发，用数和形相结合的四个实例引入集合的概念，既容易使学生接受，又能明瞭集合是来源于现实世界中。

2. 列举法和描述法是两种不同的表示集合的方法，究竟用哪种方法，要视实际问题而定。有些集合用两种方法表

示都可以，有些集合只能用其中的一种。例如：自然数集：

$\{1, 2, 3, \dots n \dots\}$ 用的是列举法，也可用描述法： $\{\text{自然数}\}$ ；但有的集合只能用列举法，如： $\{-3, 0, 2, 5\}$ ；有的集合只能用描述法，如： $\{x: x < 5\}$ 。

3. 集合可分为有限集与无限集。只含有限个元素的集合，叫做有限集。如课本例子中 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ， $\{\text{某农机站的拖拉机}\}$ ， $\{x: 9 < x < 100, x \text{ 为质数}\}$ 都是有限集；含有无限个元素的集合，叫做无限集。如课本例子中： $\{\text{整式}\}$ ， $\{15 \text{ 和 } 18 \text{ 的公倍数}\}$ ， $\{\text{线段 } AB \text{ 上的点}\}$ 都是无限集。

4. 集合具有三个特征：

(1) 确定性：对于任何一个对象，都能确定它是不是某一个集合的元素。即元素 a 要么属于集合 A ，要么不属于集合 A ，二者必居其一，但不可兼；

(2) 元素互异性：一个集合所含的元素，指属于这个集合的互相不同的个体。因此在同一个集合不能重复出现同一个元素；

(3) 元素无序性：对于一个集合通常不考虑它的元素间的顺序。。例如： $\{3, 2, 1, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$ 。但对于一些特殊的无限集，例如： $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ，而不能表示为 $N = \{3, 1, 4, 2 \dots\}$ 其中1, 2, 3, 4的排列顺序是为了体现省略号所代表的那些元素出现的规律的，这种排列顺序是数列所要求的，而不是集合所要求的，到学习数列时更明确了。

关于集合的三个特征，课本中都有，在教学时可结合实例，深入浅出地予以阐明。

还须注意：(1) a 与 $\{a\}$ 是不同的， a 表示一个元素，

$\{a\}$ 表示单元素 a 的集合；(2)符号 $\in$ 表示元素与集合之间从属关系。

1. 2 子集

1. 本节主要内容是陈述两个集合包含关系和相等关系；

2. 在讲述这两种关系时，要说清以下几点：

(1) 课本中用 $A \subseteq B$ 表示集合 B 的子集。即集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素；用 $A \subset B$ 表示集合 A 是集合 B 的真子集。即集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素，而集合 B 中至少有一个元素不在集合 A 中。

(2) 课本中用 $A \subseteq B$ 和 $B \subseteq A$ 来定义 $A=B$ 。说明 A 中的元素都是 B 中的元素， B 中的元素也都是 A 中的元素。即集合 A 、 B 的元素完全相同；

(3) 注意 $\emptyset$ 与 $\{0\}$ 是不同的， $\emptyset$ 是空集的专用符号，即不含有任何元素的集合；而 $\{0\}$ 是以 0 为元素的单元素集。符号 $\subseteq$ 、 $\subset$ 表示集合与集合之间的包含关系；

(4) 两个集合相等这个概念是一个重要的概念。同解方程、同解不等式的定义都可以用解集相等的概念来解释。

例如： $A = \{(x, y) : \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}\}$ 、

$B = \left\{ \left(\frac{11}{13}, -\frac{3}{13} \right) \right\}$ ，则 $A=B$ 。又如：

$A = \{x : 3x + 2 < 4x + 1\}$ 、 $B = \{x : x > 1\}$ ，则 $A=B$ 。

关于方程或不等式同解变形定理的证明，其实质是证明两个方程或两个不等式的解集相等。

1. 3 交集和并集

交、并是最基本的集合运算。课本安排，先学交集，次学并集，先易后难，课本上的定义，必须深入浅出地予以阐明，避免学生死记硬背。

讲述交、并概念后，提出交、并运算，给出基本运算律：交换律、结合律、等幂律等。最后又研究了交、并集合间的关系和性质，如分配律、吸收律等。并利用集合相等的定义对这些定律进行了证明。关于题目中对这些定律的应用不作要求，只是用一些实例来进一步印证这些定律的正确性。

1. 4 差集和补集

差集在现行高中课本中没有，是增添的内容。在着重讲解差概念、差运算之后，继而学习补集，要注意任何一个集合，都要先明确它的全集，然后再研究它的补集。

本章中表示集合的韦恩图形不是圆圈而是不规则的封闭曲线，这是从西德数学书中移植过来的。

二、对应

1. 单值对应

这一节是在学生学过集合初步知识的基础上讲述对应概念，明确对应亦是数学中不可精确定义的，只能通过描述性地说明，在数学中，数与数、形与形、数与形之间关系，往往通过对应联系起来。

1. 简单地复习一下，数轴上的点和实数对应关系，坐

标平面上的点和有序数偶对应关系，引入对应概念，接着详细分析课本中第21页图1—10中四个图形所给出的四种对应关系特点：

对于图（一）、（二）集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有唯一的元素和它对应。其中图（一）是一一对一，图（二）是多对一；这就是图（一）和图（二）中的对应关系的共同点和不同点。对于图（三）、（四）集合 A 中的一个元素有集合 B 中两个元素与它相对应。其中图（三）是一对多，图（四）是多对多；这就是图（三）和图（四）中的对应关系的共同点和不同点。但图（一）、（二）和图（三）、（四）的对应关系则更是不同。

2. 单值对应是一个重要概念，要讲清单值对应定义，要讲清“任意一个”、“唯一的”含义。并举些实例说明单值对应，也可举出不是单值对应的例子，使学生真正理解单值对应概念，并能正确叙述。

3. 单值对应也叫映射，明确“象”、“原象”的概念，从图（一）、（二）中可以看出映射，集合 B 中的元素，在集合 A 中不一定有原象。

1.6 一一对应和逆对应

1. 一一对应是本节教材的重点之一。一个单值对应，如果集合 A 中的任意两个不同的元素，在集合 B 中象总不同，集合 B 中的任意一个元素，都是集合 A 中的元素的象，则此单值对应为一一对应，因而在上新课时先复习单值对应，抓住单值对应与一一对应的联系与区别。教材中用四个实例，详细分析了从一个集合到另一个集合的一一对应。

一一对应定义也可以这样叙述：设集合 A 与 B ，如果对

应关系 φ 具有下面性质：使 A 中每一个元素 a ，对应 B 中唯一元素 b ；且 B 中每一个元素 b ，也对应 A 中唯一元素 a 。这时称 φ 建立了 A 与 B 的一一对应。这样一一对应是“双向”的，可简记： $a \leftarrow \varphi \rightarrow b$ 。而教材所讲的一一对应是“单向”的。如果 f 是从 A 到 B 的一一对应，可简单表为 $a \xrightarrow{f} b$ 。这两个概念形式不同，但本质是一样的。因为每一个一一对应 f 都有一个逆对应 f^{-1} ，易知： $a \leftarrow \varphi \rightarrow b$ 与 $a \xrightleftharpoons[f^{-1}]{f} b$ 所描述

的现象是相同的，一个成立另一个也成立，我们只要求讲清课本中定义。

2. 逆对应：只有一一对应才有逆对应；不是一一对应就没有逆对应。这就说明逆对应和一一对应是紧密联系在一起的，只要学生真正理解了一一对应，逆对应就不难理解。通过教材中实例，使学生求一一对应的逆对应明确一一对应 f 的逆对应 f^{-1} 也是一一对应 f 和 f^{-1} 互为逆对应。
 $(f^{-1})^{-1} = f$ 。

1. 7 对等集合和可数集合：这节教材普通中学是没有的，之所以引进这一课题，是因为《小学数学教材教法》要用“基数”和“可数集”等概念。在对应之后，安排“对等”概念。若集合 A 与集合 B 间建立一一对应，则称 A 与 B 是“对等的”。记作 $A \sim B$ 。不难明白，两个有限集只有当它们的元素的个数相同的，才是对等的。对等一语乃是有限集“个数相同”的直接扩充。课本第 27 页，举了三个对等集合的例子，说明判断两个集合是否对等。即看这两个集合是否存在一一对应。

从例 1 得到，“自然数有多少，偶数也有多少”。这就

告诉学生，虽然 $M \subset N$ ，但确实 M 、 N 中元素“个数一样多”；在例2中，可将两个同心圆周展开为线段，则此两线段长并不相同。但也告诉我们，一个较长的线段并不含有“更多的”点。这种现象例3更为明显。

由这些例子可以明白：的确有，集合可与其真子集对等的。而任何有限集却不能和它的真子集对等，只有无限集才有此种奇妙的性质。对此奇妙的性质学生是难以理解的，应从一一对应关系着手突破。然后讲清对等集合的性质和基数，这些都是学生容易掌握的。

在可数集合这部分内容中，只要求了解与 N 对等的集合 A 是可数集。其实可数集仍是建立在一一对应的基础上。直接告诉学生：集合 A 是可数的充要条件是可把它列成形式：

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \dots\}.$$

必须使学生知道，整数集、有理数集是可数的；实数集是不可数的。课本只给出结论，因本节教材理论较深。进一步研究又超出大纲范围，因此这节只要求学生知道可数集的概念和一些可数集就行了。

IV、〔部份练习、习题提示及答案〕

练习（第5页）

2、(5) {北京、河北、河南、湖北、湖南、广东}。

练习（第8、9页）

2. $A \subset B \subset C$;

3. $\emptyset$ 、 $\{a\}$ 、 $\{b\}$ 、 $\{c\}$ 、 $\{a, b\}$ 、 $\{a, c\}$ 、 $\{b, c\}$ 、 $\{a, b, c\}$;

$$4. \left\{ x: x+3=\frac{x}{2}-5 \right\} = \{-1, 6\};$$

$$6. \{x: 3x^2-6x+2=0\} = \left\{ \frac{1}{3}(3+\sqrt{3}), \frac{1}{3}(3-\sqrt{3}) \right\};$$

8. 设 $x \in A$, 即 x 是线段 A_1B_1 的垂直平分线上的点, 则 x 与 A_1, B_1 两点距离相等, $\therefore x \in B$.

$$\therefore A \subseteq B;$$

又设 $x \in B$, 即 x 与 A_1, B_1 两点距离相等的点, 则 x 在线段 A_1B_1 的垂直平分线上, $\therefore x \in A$.

$$\therefore B \subseteq A$$

$$\therefore A = B$$

练习 (第 15 页)

$$1. A \cap B = \{x: 0 \leq x < 5\};$$

$$2. A \cap B = \left\{ (x, y): \begin{cases} 3x+2y=1 \\ x-y=2 \end{cases} \right\} \\ = \{(1, -1)\},$$

$$B \cap C = \left\{ (x, y): \begin{cases} x-y=2 \\ 2x-2y=3 \end{cases} \right\} = \emptyset,$$

$$A \cap D = \left\{ (x, y): \begin{cases} 3x+2y=1 \\ 6x+4y=2 \end{cases} \right\}, \\ = \{(x, y): 3x+2y=1\},$$

$$3. A \cap B = \emptyset;$$

$$4. A \cap B = \{\text{能被 2 和 3 的最小公倍数 6 整除的数}\};$$

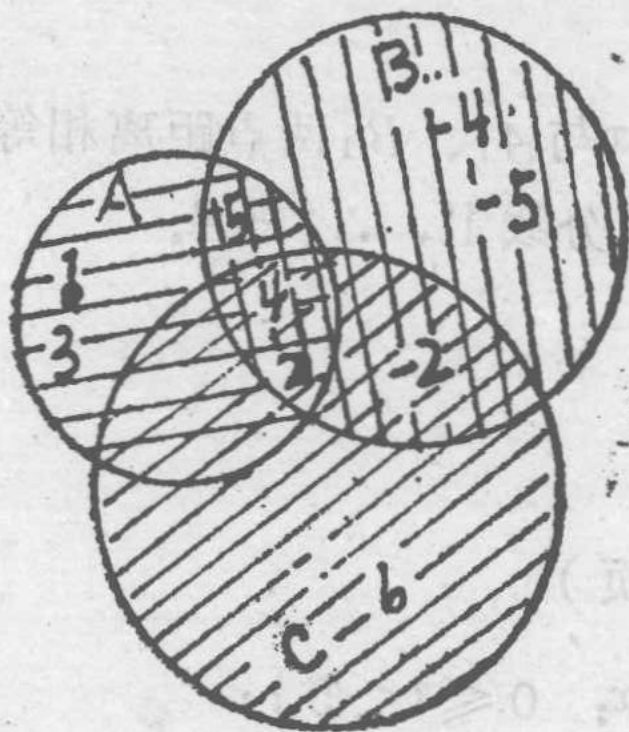
$$5. (1) A \cap B = \{2, 4, 5\}, (A \cap B) \cap C = \{2, 4\},$$

$$(2) B \cap C = \{-2, 2, 4\}, A \cap (B \cap C)$$

$$=\{2, 4\},$$

(3) 满足结合律: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$

6. 图 1—1



7. $A \cup B = \{x: -2 < x \leq 2\};$

8. $A \cup B = \{x: x > -2\};$

9. $\{a: |a+3| > 1\}$

$= \{a: a > -2 \text{ 或 } a < -4\};$

10. $\{x: x^2 - x - 2 < 0\} = \{x: -1 < x < 2\};$

11. (1) $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2\},$

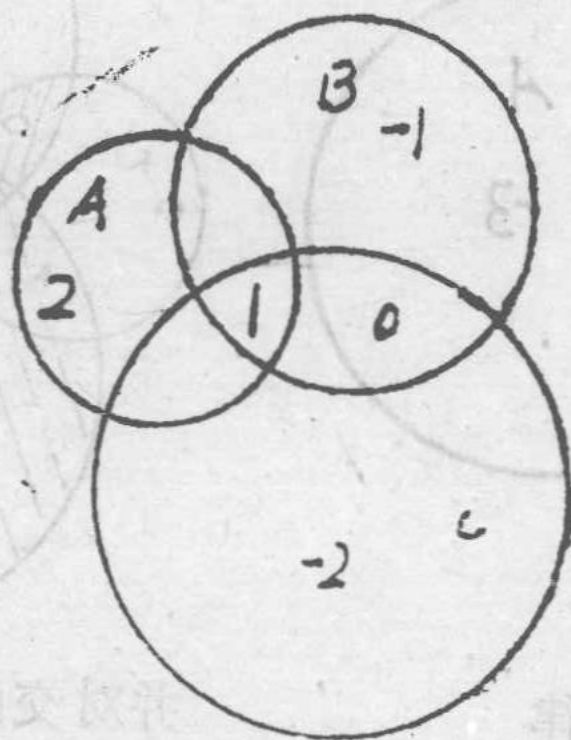
$(A \cup B) \cup C = \{-2, -1, 0, 1, 2\};$

(2) $B \cup C = \{-2, -1, 0, 1\},$

$A \cup (B \cup C) = \{-2, -1, 0, 1, 2\};$

(3) 满足结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$

1 2.



1 3. (1) $B \cup C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$,
 $A \cap (B \cup C) = \{1, 2\}$;

(2) $A \cap B = \{1\}$, $A \cap C = \{2\}$,
 $(A \cap B) \cup (B \cap C) = \{1, 2\}$;

(3) 满足交对并的分配律: $A \cap (B \cup C)$
 $= (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

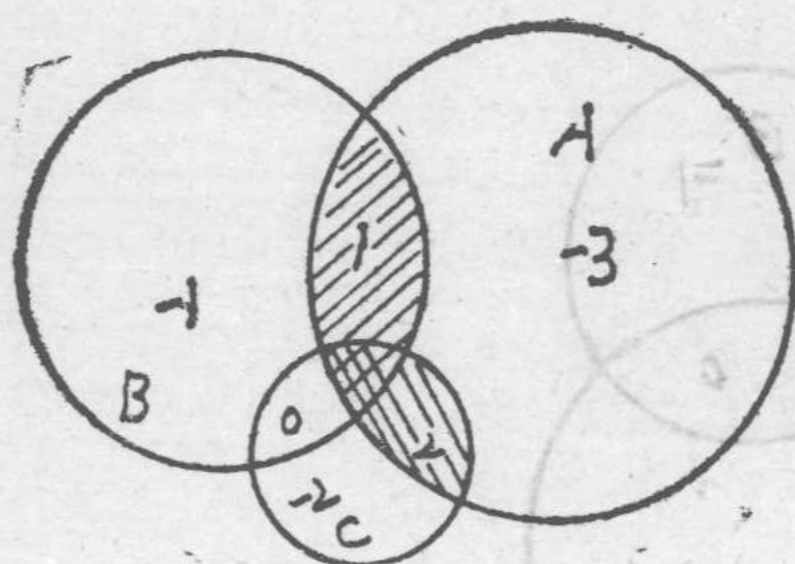
(4) $B \cap C = \{0\}$, $A \cup (B \cap C)$
 $= \{-3, 0, 1, 2\}$;

(5) $A \cup B = \{-3, -1, 0, 1, 2\}$,
 $B \cup C = \{-3, -2, 0, 1, 2\}$,

$(A \cup B) \cap (B \cup C) = \{-3, 0, 1, 2\}$;

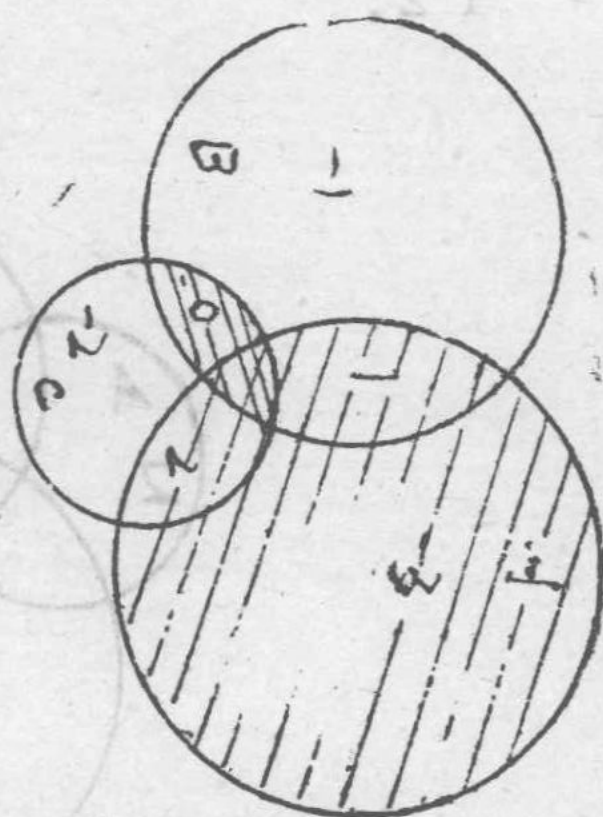
(6) 满足并对交的分配率:
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

14.



交对并的分配律

图 1—2 甲



并对交的分配律

图 1—2 乙

练习 (第 19 页)

2. $A \setminus B = \{\text{扩大了的自然数列}\};$

4. $A \setminus B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 4\};$

6. $\bar{A} = \{\text{有理数}\};$

7. $\bar{A} = \{\text{两组对边都不平行的四边形}\};$

9. $\overline{A \cup B}, \overline{A \cap B}.$

习题一 (第 20 页)

1. $\{x : x^2 + x - 1 = 0\} = \left\{ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right\}$

2. $\{x : x^2 + x - 2 < 0\} = \{x : -2 < x < 1\};$

3. $\left\{ (x, y, z) : \begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 4 \\ z + x = 5 \end{cases} \right\} = \{(2, 1, 3)\};$

4. {既参加百米赛跑又参加跳高的同学}

5. $\{x: x^2 + x - 2 > 0\} = \{x: x > 1 \text{ 或 } x < -2\}$;

6. (1) 设 $x \in A$, 则 $x \in A \cup B$, $\therefore A \subseteq A \cup B$.

设 $x \in B$, 则 $x \in A \cup B$, $\therefore B \subseteq A \cup B$.

(2) 设 $x \in A \cup B$, 则

(i) $x \in A$, 又 $\because A \subseteq C$, $\therefore x \in C$, 即 $A \cup B \subseteq C$

(ii) $x \in B$, 又 $\because B \subseteq C$, $\therefore x \in C$, 即 $A \cup B \subseteq C$.

综合 (i), (ii) 知: $A \cup B \subseteq C$;

(3) 设 $x \in A \cup B$, 则:

(i) $x \in A$, 又 $\because A \subseteq C$, $\therefore x \in C$, $x \in C \cup D$,

$\therefore A \cup B \subseteq C \cup D$,

或 (ii) $x \in B$, 又 $\because B \subseteq D$, $\therefore x \in D$, $x \in C \cup D$,

$\therefore A \cup B \subseteq C \cup D$

综合 (i), (ii) 知: $A \cup B \subseteq C \cup D$.

(4) $\Rightarrow$: 设 $x \in A \cup B$, 则 $x \in A$ 或 $x \in B$. 又 $\because A \subseteq B$

$\therefore$ 若 $x \in A$, 则 $x \in B$,

$\therefore A \cup B \subseteq B$,

又 $\because B \subseteq A \cup B$,

$\therefore A \cup B = B$

$\Leftarrow$: $\because A \cup B = B$, $\therefore A \cup B \subseteq B$,

而 $A \subseteq A \cup B$, $\therefore A \subseteq B$

(5) $\Rightarrow$: 设 $x \in A$, $\because A \subseteq B$, $\therefore x \in B$,

即 $x \in A \cup B$, $\therefore A \subseteq A \cup B$,

又 $\because A \cap B \subseteq A$, $\therefore A \cap B = A$.

$\Leftarrow$: $\because A \cap B = A$, $A \subseteq A \cap B$,

而 $A \cap B \subseteq B$, $\therefore A \subseteq B$;

7. (1) 设 $x \in A \setminus (B \cup C)$, 则 $x \in A$ 但 $x \notin B \cup C$.