组 合 论 导 引

R. A. 布劳尔迪 著

中国人民解放军洛阳外国语学院

1981

出版者的话

R. A. 布劳尔迪所著《组合论导引》是一本大学教科书。这本书内容通俗易懂，文字流畅，深入浅出，有许多生动的例子和大量的习题，是一本较好的学习组合论的入门书。

本书有三种译稿。蔡建勇、张利民、李学志、魏树启、谭大新、贺保阳、翟起滨等同志翻译了全书；洛阳外语学院马汉卿、刘玉宁、潘李福等同志翻译了前六章；潘顺玉同志也翻译了前四章。在这三种译稿的基础上，由洛阳外院赵入杰、崔辉政、潘顺玉同志统一作了校订和部分修改。

由于时间仓促，加上我们水平不高，译文中难免有错误和不妥之处，敬请读者给于批评、指正。

《组合论导引》翻译组

一九八〇年十一月

序　　言

本书是过去几年我在威斯康星—麦迪逊大学一年一度教授"组合论导引"课程的直接产物。随着组合方法在数学和应用中重要性的增长，它已被承认为一门正式的数学学科，我感到需要开设一门介绍组合论的课程。这门课起初是为数学系开的，但后来也列入计算机科学系和统计学系的课程表。这样，威斯康星—麦迪逊大学的学生就可以把它作为数学课程，计算机科学课程，或统计学课程来取得学分。学这门课的先决条件是要学过两个学期的微积分，虽然微积分在这里用的并不多（值得注意的例外是第七章母函数，那里用到了幂级数，还有第四章二项式系数，有两个例子为了推导恒等式而用了微分和积分）。这个先决条件主要想保证学生具有一定程度的数学素养。这门课程的安排不超过两个学期，其原因是我希望吸引其它学科的学生，组合论的思想和方法对他们越来越有用。因此，我便有了一些学语言学、生物学和电气工程学的学生，还有一些从事侧重数学的中等教育的学生。在我看来，组合论这门课程对未来的高等学校数学教师是极适应的，因为许多组合论的思想在人们的数学发展中是可以早期接受的。我相信，组合论这门课程也是一个理想的工具，它不必借助专门术语就能表明数学的生动活泼，魅力无穷。虽然我在威斯康星大学所讲授的课程是作为一般大学课程而设置的，但在我的班里也有一些计算机科学和统计学的研究生。

本书的内容比大学一个学期所能讲的课程要多些。我在麦迪逊大学最后一次教这门课时，讲了第1章至第10章以及第11章的部分内容（到平面的5—色定理证明为止），回想起来，在这样短的时间内，内容就显得太多了。一个学期讲授的课程，由第1章到第7章（若时间不够可删去第7章），然后是第8、9两章和第10章，这样更合理些。如果还有时间，则可从第11章和第12章中选若干内容。在时间比较宽裕的两个学期授课，由第1章至第8章在第一学期讲完，第9章至第12章在第二学期讲完，各章之间的关系如下。第1至7章一气呵成，应循序讲授。第8章自成一体，虽然这一章涉及的一般问题在1.1节曾介绍过。同样，第9章也自成一体，尽管在1.5节有过介绍以及定理9.3.3的证明中用了第8章的定理8.1.1。9.1节包含了有限域的一个讨论，它局限于用多项式环构造有限域。把有限域的讨论限制在模一个素数的整数域上是可能的，对它在第9章其余各节中的应用也作了同样的限制。第10章和第11章合成一个单元，应该依次讲完——同样，1.4节和1.6节也分别讨论过第11章所处理的问题（4—色问题和最短路径问题）。第12章有点难于归类，12.1节和12.2节实质上不依赖先前的任何内容，12.3节和12.4节组成一个整体并作为特例包含了第8章处理过的婚配问题，12.5节也是自成一体并包含了婚配问题的一个推广。

本书有将近500道习题，这是这门课程的一个重要组成部分。为了透彻地掌握本书的内容，学生应该认真地大量地做习题。如果不会应用书中的概念和方法，那就很难有多大进步。少数标有星号的习题，著者认为其难度比别的习题要大些。多数习题是常规的，也有一些习题要复杂一些，但也不是不能解答的。

我的学生们使用了本书的最初版本，并善意地指出了若干谬误，谨此致谢。我非常感激 *Margaret Higbit* 在本书的准备和写作过程中对我的鼓励。我也要感谢 *Elsevier North—Holland* 出版社的职员们，他们熟练而有效的工作使本书得以早日问世。最后还要感谢 *Herbert J. Ryser*，最初是他引导我进行组合论的研究。

Richard A. Brualdi

1977年2月 法国、巴黎

目　录

1

什么是组合论？

如果说本书的哪位读者从未解决过一个组合问题，那确实是奇怪的。难道你竟从未算过 n 个球队比赛，每个队都和其它队恰好赛一场，共赛多少场？难道你竟从未构造过幻方？难道你竟从未画过“一笔画”？难道你竟从未算过压住某个“福尔豪斯”[1]的五张牌有多少吗？这些都是组合问题。正如它们启示的那样，组合论在数学游戏和博奕中有它的历史渊源。很多以往娱乐或审美要求中研究过的问题，如今在纯粹科学和应用科学中变得十分重要。现在，组合论已是数学的一个重要分支，其影响越来越大。探究十年来组合论的迅猛发展，其部分原因是计算机对我们社会的持续不断的巨大冲击。因为计算机的闪电般的运算速度，使得解决先前不可思议的大规模问题有了可能。但是，计算机不能独立起作用，它们需要程序才能运行，而这些程序的基础常常由问题解答的组合算法所构成。组合论发展的另一个原因是它在一些学科中的应用，而这些学科以前很少被认真地考虑和数学有什么联系。这样我们就发现，组合论的思想和技巧就不仅仅运用于数学应用的传统范围，即物理科学范围，而且还运用于社会科学和生物科学。

组合论涉及到按一定的模式将一集合的物体进行配置，通常反复出现的是两种类型的问题。

(i) **配置的存在性**。若按一定的条件来配置一个集合的物体，这种配置是否可能并不清楚，需要确定。如果配置并不总是可能的，那么自然要问在什么条件下（必要的和充分的）配置能够得以实现。

(ii) **配置的计数或分类**。若一个特定的配置是可能的，那么有多少种方法实现它。如此，就要算出这些方法的数目或者对它们进行分类。

虽然对任何一个组合论问题要考虑存在和计数问题，但事实上，存在问题依赖广泛

(1) 英文 *full house* 的译音。五张牌中若两张点数相同，另三张点数相同，则称为一个 *full house*。　　—译者注

的研究．计数问题更是不容易处理。然而，如果一个特定配置的存在性不致引起困难，那么实现这种配置的方法的计数也就有可能。在例外的情形下（当数目小时），配置可以被列举出来。因此，许多组合问题具有这样的形式，“是否可能配置……？”或“是否存在一种……？”或“有多少方法能够……？”或“计算……的数目”。

与（i）有联系的第三类组合问题是

(iii) **已知配置的研究。**在构造出（可能是困难的）满足一定条件的配置之后，就可以考察它的性质和结构了。这样的结构也许与（ii）分类问题有关，也许有潜在的应用。

更一般地，**组合论与离散结构和关系的分析有关。**

组合论用来证实发现的主要工具之一就是**数学归纳法。**归纳法通常是一种有力的手段，在组合论中尤其如此。用数学归纳法证明一个较强的结果往往比证明一个较弱的结果来得容易，虽然，这在归纳步骤上需要证明更多的东西，但归纳假设也因而变得强些。

然而，一般说来，解决组合题问题往往需要特殊的方法，仅仅凭借已知的结果或公理是不行的。应当探索如何发展自己的洞察力，以及在解答问题时如何运用自己的灵机。我没有这种意思，即没有可供应用的一般原理或方法。在以后的几章里我们引出的诸如包含——排斥原理、鸽笼原理及递归关系和母函数的方法全都是一般原理和方法的例子。但我们常常看到应用它们和用上它们都需要技巧。因此，解决组合论问题，经验是非常重要的。

为了使上述讨论更有意义，让我们举出几个组合论问题的实例。它们中间既有较为简单的问题（但解答需要技巧），也有其解答是组合论主要成果的问题。

1.1 实例 棋盘的完全复盖

考虑一个通常的由8行8列分成64个方格的棋盘。假设有足够多的形状相同的骨牌，每张牌的大小恰够盖住棋盘的两个方格。是否可能用32张骨牌将棋盘完全盖住？我们称这样的一种配置为棋盘的**完全复盖**。这是一个容易的配置问题，而且可以很快地构造出许多不同的完全复盖。困难在于算出不同的完全复盖的数目，当然这不是不可做到的。1961年 *M·E·Fischer*[2] 发现的数目是$12,988,816=2^4\times(901)^2$。用由$m$行$n$列划分成$m\ n$个方格的棋盘来代替普通的棋盘，则完全复盖并不总是存在的。事实上，3×3棋盘就没有完全复盖。当m和n为何值时，$m\times n$棋盘才有完全复盖呢？不难看出，一个$m\times n$棋盘有完全复盖当且仅当m和n中至少有一个为偶数，或者等价地说，当且仅当棋盘的方格数是个偶数。对于$m\times n$棋盘的不同完全复盖的个数，*Fischer* 推导出一个一般的含有三角函数的公式。这个问题相当于分子物理学中的著名的**二聚物问题。**二聚物问题起源于对二氢氧基分子（二聚物）在表面吸收的考察。棋盘的方格对应

(2) *Statistical Mechanics of Dimers on a Plane Lattice*, *Physical Review* **124** (1961), 1664—1672.

分子，而骨牌则对应于二聚物。

再考虑 8 × 8 棋盘。现在剪去沿对角线相对的角上的两个方格，问是否可能用31张骨牌得到这个“修剪”盘的一个完全复盖？虽然这个修剪盘与拥有一千二百多万个完全复盖的 8 × 8 棋盘非常接近，但它却没有一个完全复盖。这一事实的证明是组合论论证的一个简单而巧妙的例子。将普通的 8 × 8 棋盘的所有方格黑白相间地着上色，于是就有32个黑方格和32个白方格。如果剪去对角线两端的两个方格，就少了两个着色相同的方格，不妨视为白色的，这样就留下32个黑方格和30个白方格。但是，因为每张骨牌只复盖一个黑方格和一个白方格，所以31张骨牌恰复盖31个黑方格和31个白方格，因此修剪盘不会有完全复盖。

更一般地，将方格已经黑白相间地着上色的 $m \times n$ 棋盘任意剪去一些方格，得到一个修剪盘。什么时候修剪盘有完全复盖呢？应用上面的论证，我们推断出，修剪盘要有完全复盖存在，则黑方格和白方格的数目要相等。但这不是充分的，图 1．1 给出一个例子。

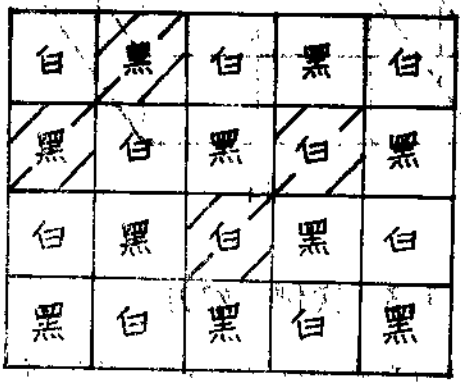


图1.

于是，我们要问：修剪盘有完全复盖的充分必要条件是什么？在第 8 章里我们将回到这个问题上来，利用相异代表系的理论获得一个完整的解答，并用分派问题的说法给出一个实际的公式。

1.2 实例 正方体切割

考虑一个棱长 3 呎的正方体木块。要将此正方体切割成27个较小的正方体，使其棱长为 1 呎，问最少要作多少次切割？一种方法就是每个方向切 2 次，先后切 6 次，而整个正方体仍保持原形，如图 1．2 所示。如果允许在两次切割之间对木块进行排列，那么是否可能经过较少次切割而达到目的呢？图 1．3 给出了一个例子。这里第一次切割后，把木块排列了一下，第二次切割就切过了更多的木块。由于随着切割次数的增加，木块的个数和随之而来的排列次数也因而增加，所以这个问题的分析变得困难起来。

然而，我们可以考虑另一个途径。这27个小正方体中的每一个，除在中心的那个以外，都至少有一个面是原来大正方体的一个面的一部分。中心的那个小正方体的每个面都由切割而得，因为它有 6 个面，所以 6 次切割是必要的。这样，必须至少有 6 次切割，即使在两次切割之间对木块进行排列也无法改变这一点。有精力的学生可以去考虑仅用 6 次切割就把一个正方体切成27个小正方体的不同的方法数。

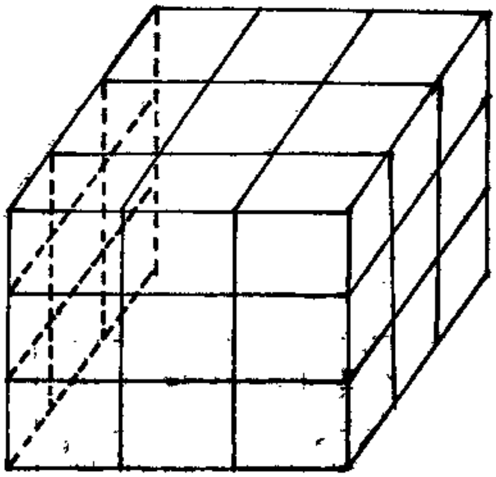


图1.2

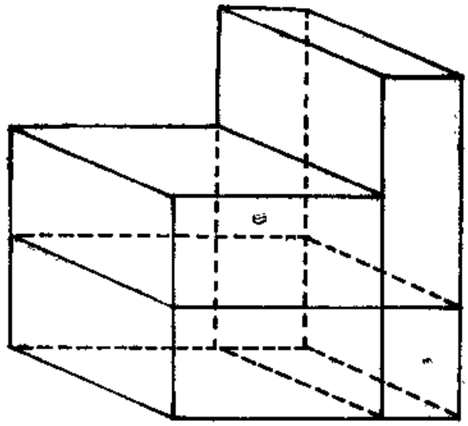


图1.3

1.3 实例 幻方

数学游戏中最古老和最流行的要算**幻方**。一个 n 阶幻方是由整数 1，2，3，…，n^2 构成的一个 $n\times n$ 方阵，并满足每行、每列和两条对角线的每一条上的数字之和均为 S。这个和数 S 称为幻方的**幻和**。下面是 3 阶和 4 阶幻方的例子

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 16 & 3 & 2 & 13 \\ 5 & 10 & 11 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 12 \\ 4 & 15 & 14 & 1 \end{bmatrix}, \tag{1.1}$$

其幻和分别是15和34。在中世纪，幻方带有相当的神秘主义色彩，被用来驱鬼避邪。*Benjanin Franklin* 就是一个幻方迷，他的文章中就有很多有趣的例子。

一个 n 阶幻方，全部整数和为 $1+2+3+\cdots+n^2$，由算术级数求和公式可知，这个和是 $n^2(n^2+1)/2$。由于 n 阶幻方有 n 行，每行和为 S，即得 $nS=n^2(n^2+1)/2$。这样任意两个 n 阶幻方就有相同的幻和 $S=n^2(n^2+1)/2$。组合论的问题是要确定，对于怎样的值 n 存在 n 阶幻方，并找出一般的构造方法。不难证明，不存在 2 阶幻方（幻和只会是 5）。但对所有其它的值 n，总可以构造出 n 阶幻方，并且存在许多特殊的构造方法。我们在这里介绍的是 *de la Loubere* 在十七世纪发现的构造奇数阶幻方的方法。首先将 1 放在最上面一行的中间位置上，然后按下面法则把其余整数按自然顺序沿一条由左下到右上的斜线放置。

(i) 当一个数放在最上面一行，下一个整数就放在最下面一行，如同放在最上面一行的上面一行那样。

(ii) 当一个数放在最右边一列，下一个整数就放在最左边一列，如同放在最右边一

列的右边一列那样。

(iii)当遇到一个位置已经放置，或者右上角位置已经放上了，则下一个整数就放在刚放的数的正下方那个位置上。

(1.1) 中的3阶幻方就是用 *de la Loubere* 方法构造的，下面的5阶幻方也如此：

$$\begin{bmatrix} 17 & 24 & 1 & 8 & 15 \\ 23 & 5 & 7 & 14 & 16 \\ 4 & 6 & 13 & 20 & 22 \\ 10 & 12 & 19 & 21 & 3 \\ 11 & 18 & 25 & 2 & 9 \end{bmatrix} . \qquad (1.2)$$

构造异于2的偶数阶幻方的方法和构造奇数阶幻方的其它方法可以在 *W. W. Rouse Ball* 著，*H. S. M. Coxeter* 修订的《数学游戏和小品》（*Mathematical Recreations and Essays, New York: Macmillan*, 1962）193—221页中找到。

1.4 实例 4—色问题

考虑一张平面或球面地图，在它上面国家表示为连通的区域，（自然象密执安州就不能算一个国家）。为了迅速区分不同国家，要求对地图着色，使得有共同边界的两个国家着上不同颜色。试问，保证每张地图均能如此着色的必须的颜色数目最少是多少呢？迄今为止，这仍然是没有解答的最著名的数学问题之一。它的应用对人们来说是一个非常简单的事实，既易叙述又易理解。除了已知的三等分角问题，它比任何其它问题更能吸引乐于此道的数学家。大约1850年 *Francis Guthrie* 首先提出这个问题，当时他是一个大学毕业生。这推动了后来的数学研究。作为一部专著确实要数 *O. Ore* 的《四色问题》（*The Four—Color Problem, New York, Academic*, 1967），该书专门讨论这个问题及与此有关的问题。一些地图要4种颜色，图1.4就是一个例子，因为图中4个国家中的每两个都有一条公共边界，则显然必须4种颜色。1890年 *P·J·Heawood* 证明了，对任何地图着色，5种颜色是足够的。对于一张有5个国家的平面地图，其中每两国就有一条公共边界，如果这样的地图存在的话，5种颜色也够了，证明并不困难（见第11章）。1976年两位数学家*K·Appel* 和 *W·Haken* 用震惊数学界的报告[3]宣布他们证明了任何一张平面地图都可

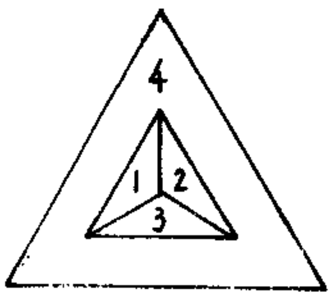


图1.4

(3) *Every planar map is four colorable, Bulletin of The American Mathematical Society*, **82** (1976), 711—712.

用4种颜色来着色。他们的证明需要计算机运算大约1200小时，近100亿个独立的逻辑判断！

1.5 实例 36个军官的问题

给定36名军官，他们有6种不同的军衔，来自6个不同的团队，能否排成6×6阵列，使得每一行和每一列都有每种军衔和每个团队的军官一名？这个问题是在18世纪被瑞士数学家 *L·Euler*（历史上最多产的数学家之一）作为一个数学游戏问题提出来的，它在统计学中，特别是在实验设计中有重要的应用（见第9．3节）。每一名军官都可用一个有序对 (i, j) 来表示，这里 i 表示他的军衔（$i=1, 2, \cdots, 6$），j 表示他所属的团队（$j=1, 2, \cdots, 6$）。这样，问题即探询，**排列这36个有序对(i,j)（i=1，2，…，6；j=1，2，…，6）为6×6阵列，使得在每行每列的有序对第一个位置和第二个位置上整数1，2，…6分别依一定的顺序出现**。这样一个阵列就可以分成两个6×6阵列，一个对应着有序对第一个位置（军衔阵），另一个对应着第二个位置（团队阵）。于是，问题可以表述为：是否存在两个6×6阵列，其元素取整数1，2，…，6，使得（i）在两个阵列的每行每列中，整数1，2，…，6依一定顺序出现；（ii）当两个阵列并置起来，36个有序对 (i, j)（$i=1, 2, \cdots, 6$；$j=1, 2, \cdots, 6$）都出现？举个简单一点的例子。假如有9名军官，他们有3种军衔来自3个团队，则相应的问题解答是

$$\underset{\text{军衔阵}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{\text{团队阵}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}} \to \underset{\text{并置阵}}{\begin{bmatrix} (1,1) & (2,2) & (3,3) \\ (3,2) & (1,3) & (2,1) \\ (2,3) & (3,1) & (1,2) \end{bmatrix}} \tag{1.3}$$

例子里的军衔阵和团队阵便是所谓的3阶**拉丁方**。下面是2阶和4阶拉丁方：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

(1.3) 中的两个3阶拉丁方称为**正交**的，因为把它们并置起来便得到全部9个可能的有序对 (i, j)，$i=1, 2, 3$ 和 $j=1, 2, 3$。我们可以这样表述 *Euler* 问题：是否存在两个6阶正交拉丁方？*Euler* 思考了更一般的 n 阶正交拉丁方问题。容易证明，不存在一对2阶的正交拉丁方，因为除了（1．4）中给出的那个2阶拉丁方外，仅有的另一个是

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

而这两个拉丁方显然不是正交的。*Euler* 说明了如何去构造 n 阶正交拉丁方对，这里 n 为

奇数或4的倍数。注意，这里不包括 $n=6$。他在多次试验的基础上推测，不存在一对6阶的正交拉丁方，但没有能给出证明。他还猜测阶数为6，10，14，18，…，$4k+2$，…的正交拉丁方对均不存在。1901年G·Tarry[4]用穷举法证明了Euler的推测对 $n=6$ 是正确的。1960年前后三位数理统计学家R·C·Bose，E·T·Parker和S·S·Shrikhande[5]成功地证明了欧拉猜测对 $n>6$ 是不真确的。同时，他们说明了如何去构造一对 n 阶正交拉丁方，n 为形如 $4k+2$（$k=1, 2, 3, \cdots$）的整数。这项主要成果解决了Euler猜测。后面我们将探索怎样用有限步运算构造正交拉丁方，以及如何把它们用于**实验设计**。

1.6 实例 最短路径问题

考虑一个由街道和交叉点组成的体系。某人想从交叉点 A 走到另一个交叉点 B，一般有很多可供选择的路径。问题是要确定这样一条路径，使得经过的路程尽可能短——**最短路径**。一个可行的办法，就是列出全部从 A 到 B 的可能的路径（对于经过任一街道多于一次的路径显然是不必要的，因此只有有限条），对每条路径算出它的路程，从而得到一条最短路径。然而，这不是一个有效的办法，尤其在体系庞大时，此项工作包含难以处理的问题。怎样的确定最短路径的算法才是可取的呢？至少这种算法的难易不能因为体系增大而急剧改变。我们将在10.5节讨论一种算法，该种算法能实际地找到从 A 到体系中其它每一交叉点的一条最短路径。在两个交叉点之间找一条最短路径的问题可以抽象地表达如下。设 X 为一个由有限个称为**结点**的对象组成的**集合**（结点对应于交叉点），E 为一个由称为**边**的无序结点对组成的集合(边对应于街道)。这样，一些结点对之间有边相联，另一些则没有。集对（X, E）称为**图**。图中联接结点 x 和 y 的一条**路**就是以 x 为首 y 为尾一个结点序列，其中相继的结点用一条边联接起来。伴随每条边均有一个非负实数——**边长**，则**路长**就是路中依次联接结点的所有边的边长之和。给定两个结点 x 和 y，最短路径问题就是找出一条从 x 到 y 的路，使其路长最小。图1.5是一个有6个结点和10条边的图，边旁标的是其长度。联接 x 和 y 的一条路是 x，a，b，d，y，路长为4。另一条路是 x，b，d，y，路长为3。不难看出，这后一条路是联接 x 和 y 的最短路径。

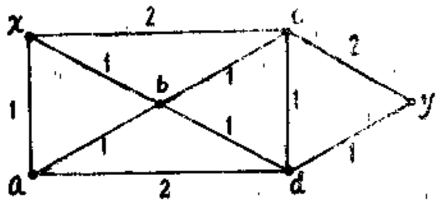


图1.5

(4) *Le probleme de 36 officeurs, Compte Rendu de 1'Association Francaise pour 1' Advancement de Science Naturel* **1** *(1900), 122-123;* **2** *(1901), 170-203*

(5) *Further results on the construction of mutually orthogonal Latin squares and the falsity of Euler's conjecture, Canadian Journal of Mathematics* **12** *(1960), 189-203.*

图是组合论中已经得到并继续得到广泛研究的一种离散结构。图的概念的一般性，使得它在诸如心理学，社会学，化学，遗传学和通讯科学等各种不同的领域里有着广泛的应用。图的结点对应于人，则边可对应于互不信任；结点对应原子，则边对应于原子键。读者也许会想象用图的方法能建立的其它一些现象模型。图的这样一些重要概念和性质将在第 8，10，11章内加以研究。

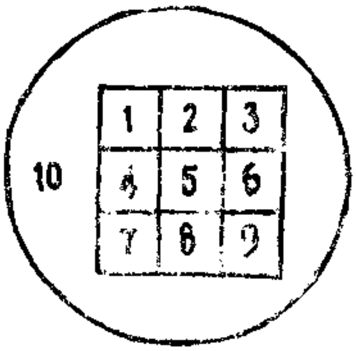
第一章　习题

1. 证明一个 $m \times n$ 棋盘有完全复盖当且仅当 m 与 n 中至少有一个是偶数。
2. 有一个 $m \times n$ 棋盘，m 与 n 均为奇数。为固定符号起见，假定左上角的那个方格着上白色，其余方格依次黑白交替着色。证明从棋盘上剪下任一白方格，则修剪盘有一个完全复盖。
3. 设有一座监狱，由64间牢房组成，这些牢房排成 8×8 棋盘形式。所有相邻的牢房之间均有门相通。一个关在角上那个牢房的囚徒被告知，如果他能经过所有的牢房且每间牢房只经过一次而到达对角线那头的牢房里，那他将被释放。问这个囚徒能否获得自由？
4. 用 $f(n)$ 表示 $2 \times n$ 棋盘不同的完全复盖的个数。求 $f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$f(4)$ 和 $f(5)$，试求出（并证明）计数函数 f 满足的简单关系式。用这个关系式求 $f(12)$。
5. 求 3×4 棋盘的不同的完全复盖的个数。
6. 说明怎样用 6 次切割将一个棱长 3 呎的正方体切成27个棱长 1 呎的小正方体，但要求在两次切割之间对木块作一次非平凡的排列。
7. 考虑下列的棋盘问题的 3 维模型。一个 3 维骨牌定义为由两个棱长为 1 的正方体沿一个面粘起来而得到的几何体。证明可以用 3 维骨牌构造一个棱长为 n 的正方体的充要条件是 n 为偶数。如果 n 是奇数，是否可能构造一个棱长为 n 的，去掉一个 $1 \times 1 \times 1$ 的“心”的正方体？（提示：将棱长为 n 的正方体视作由棱长为 1 的小正方体构成的，把小正方体交错地着上黑色和白色。）
8. 验证不存在 2 阶幻方。
9. 用 *de la Loubère* 方法构造一个 7 阶幻方。
10. 用 *de la Loubère* 方法构造一个 9 阶幻方。
11. 构造一个 6 阶幻方。
12. 证明在 3 阶幻方中，数字 5 必位于中心位置。由此推断恰有 8 个 3 阶幻方。
13. 下图能否补成一个 4 阶幻方？

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & & \\ 4 & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

14. 证明在一个 n 阶幻方中以 n^2+1-a 代替 a，其结果仍然得到一个 n 阶幻方。

15. 证明下面这张十国（1，2，…，10）地图可以用 3 种颜色着色，但不能再少了。设用到的颜色是红色、白色和兰色，确定不同的着色方案数。

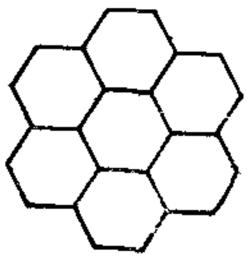


16. 构造一对 4 阶正交拉丁方。

17. 构造 5 阶和 6 阶拉丁方。

18. 找出构造 n 阶拉丁方的一般方法，n 为任意数。

19. 是否存在 2 阶幻六边形——即是否可能将整数 1，2，…，7 置于下面的六边形阵列中，使得所有 9 条“线”上的数字的和相等？



20.* 一个 6 × 6 棋盘被18张骨牌完全覆盖。证明可以从棋盘的横的方向或纵的方向将棋盘切成两个非空的部分，而不切过一张骨牌。

21. 下图是一个由街道和交叉点组成的体系，街道旁标出的数字是其长度，求从 A 到 B 的最短路径。