

中西算學大成卷八十

嘉善陳維祺纂

微分術一

第一款 論變數與函數之變比例

用代數以解任何曲線。其中每有幾種數。其大小恒有定率者。如橢圓之長短徑。拋物線之通徑。雙曲線之屬徑之類是也。

又每有幾種數。可有任若干相配之同數。其大小恒不能有定率者。如曲線任一點之縱橫線是也。

數既有此兩種分別。則每種須有一總名以賅之。故名其有定之數曰常數。無定之數曰變數。

凡常數之同數。不能增亦不能損。

凡變數之同數。能變為大。亦能變為小。故其從此同數變至彼同數之時。必歷彼此二數間最小最微之各分數。

如平圓之半徑為常數。而其任一段之弧。或弧之弦矢。切割各線。及各線與弧所成之面。皆謂之變數。

橢圓之長徑短徑。皆為常數。而其曲線之任一段。或曲線上任一點之縱橫線。並其形內形外所能作之任何線。或面或角。皆謂之變數。

拋物線之通徑為常數。而其曲線之任一段或任一點之縱橫線或弧與縱橫線所成之面皆謂之變數。他種曲線亦然。

凡常數恒以甲乙丙丁等字代之。凡變數恒以天地人等字代之。

第二款

若有彼此二數皆為變數。此數變而彼數因此數之變而亦變者。則彼數為此數之函數。

如平圓之八線皆為弧之函數。若反求之亦可以弧為八線之函數。

又如重學中令物體前行之力與其物所行之路皆為時刻之函數。

如有式 $\frac{\text{天}}{\text{地}} = \frac{\text{甲}}{\text{乙}}$ 此式中甲為常數。天為自主之變數。地為天之函數。故地之同數能

以天與甲明之。

如有式

$$\frac{\text{地}}{\text{天}} = \frac{\text{甲}}{\text{乙}}$$

此式中甲與乙皆為常數。地為自主之變數。天為地之函數。故天之

同數可以地與甲及一明之。

如有式

$$\frac{\text{天}}{\text{地}} = \frac{\text{甲}}{\text{乙}}$$

或

$$\frac{\text{天}}{\text{地}} = \frac{\text{甲}}{\text{乙}}$$

或

$$\frac{\text{天}}{\text{地}} = \frac{\text{甲}}{\text{乙}}$$

其甲乙丙為常數。天為自變之數。而地皆為天

之函數

凡函數之中。可以有數箇自主之變數。

如有式

$$\text{戊} = \text{甲}^{\frac{1}{2}} \text{天}^{\frac{1}{2}} \text{地}^{\frac{1}{2}} \text{地}^{\frac{1}{2}}$$

則天與地皆為自主之變數。戊為天地兩變數之函數。

凡變數之函數。其形雖有多種。然每可化之。使不外乎 $\text{天}^{\frac{1}{2}}$ $\text{天}^{\frac{1}{2}}$ $\text{對}^{\frac{1}{2}}$ $\text{天}^{\frac{1}{2}}$ $\text{餘}^{\frac{1}{2}}$ 等數類。

凡函數為 $\text{天}^{\frac{1}{2}}$ 之類。其指數為常數。則可從天之卯方。用代數之常法化之。而以有窮之項。明其函數之同數。故謂之代數函數。亦謂之常函數。

如有式

$$\text{戊} = \frac{\text{甲}^{\frac{1}{2}} \text{天}^{\frac{1}{2}} \text{天}^{\frac{1}{2}}}{\text{甲}^{\frac{1}{2}} \text{天}^{\frac{1}{2}} \text{天}^{\frac{1}{2}}}$$

此種函數。其戊之同數。可用加減乘除開方等法而得之。

凡函數為 $\text{天}^{\frac{1}{2}}$ 之類。則其函數之同數。不能以有窮之項明之。故謂之越函數。凡函數為 $\text{天}^{\frac{1}{2}}$ 及 $\text{天}^{\frac{1}{2}}$ 之類。則其函數之同數。皆可以平圓之各線明之。故謂之圓函數。亦謂之角函數。

以上三種函數。常函數越函數。若已知天之同數。則其函數之同數。即可求得。故名

此三種函數為陽函數。因其顯而易明。

更有他種函數。必先解其方程式。令函數中之各變數分開。然後能求其同數者。

如有式 $\frac{y}{x} = \frac{a}{b}$ 其成為天之函數。如欲求其成與天相配之同數。必先解其二次方

程式始能通。

此種之式名曰天之陰函數。因其雜糅未明。故謂之陰函數。反之。亦可云天為成之陰函數。

如解其方程式為 $\frac{y}{x} = \frac{a}{b}$ 則成變為天之陰函數。

$$\frac{y}{x} = \frac{a}{b} \quad \text{天} \quad \text{天} \quad \text{天}$$

昔代數之家。凡遇須用開平方之處。每于其式之左旁作一根字以記之。如根為天之平方根。後又變通其法。而以根號記之。如天為天之平方根。

茲仿此例。凡遇某變數之函數。亦于其變數之左旁作一函字以為識別。

如天之函數。則作函天。或作函天。此函字言天之函數。非代天之倍數也。他種變數旁

有函字者意同。

用此法則可將

成一天甲天對天正天餘

各種之式。以一語賅之。謂之

成一天或天成

若函數從兩箇變數而成。其天與地皆為自主之變數。式如

成一天甲地乙地丙

者則可以

成一天地

別之。函數為多箇變數所成者。仿此推之。

惟函數只指其變數言之。若其甲乙丙丁各常數。雖多不論。

第三款

此法必先明變數與函數變比例之限。如幾何原本中。證明平圓之面積。必比其外切多等邊形之面積微小。若其外切多等邊形之邊愈多。則其面積愈近于平圓之面積。所以可設平圓之面積為任何小。而切其圓外為多等邊形。則多等邊形之面積。較平圓之面積。其數必微小。若再設其多等邊形之面積為級數。而其邊之變率可每變多若干倍。則其多等邊形之面積。必漸與平圓之面積相近。而總不能等。然其各級數之總數。可比平圓之面積所差甚微。其較數之小。可小至莫可名言。故以平圓為其限。

若用此法于圓內容多等邊形。則其多等邊形之面積。亦以平圓之面積為限。

總言之凡平原之周為其內容外切多等邊形之限。

如在八線數理中曾證明以甲代平圓任何弧則^{正切甲}恒大于半徑而^{正切甲}恒小

于半徑然令其弧為任何小則其式之同數必甚近于半徑而其所差之數極微

所以此兩數中間之數為一^{徑也}故其公限亦為一。

由此可見凡弧與弦切三者之中任取其二以相較其比例之限必相等

又平三角數理中亦曾證甲弧為^{正切甲}與^{正切甲}兩式之限為任何大。

依代數術之例。^天即^天若天變至小于一而卯大至無窮則^卯而式變為^天所

以任取其級數若干項之和必小于一。惟其項愈多則與^天一愈相近而其所

差之數可小至莫可名言則可見^天一必為其諸級總數之限。

若依二項例之式。

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{1} \right)^{\text{卯}} = \\
 & \left(\frac{1}{1} \right)^{\text{天}} + \left(\frac{1}{1} \right)^{\text{卯}} \\
 & \left(\frac{1}{1} \right)^{\text{天}} + \left(\frac{1}{1} \right)^{\text{卯}} + \left(\frac{1}{1} \right)^{\text{卯}} + \dots
 \end{aligned}$$

其卯之同數無論如何必合于理。惟卯若為大

數則其各項之乘數 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ 之類與一相較之差甚小。若卯愈大則其差愈微。

若令卯為任何大則各乘數可略等于1。所以得

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \dots \quad \textcircled{\text{甲}}$$

曾在平三角數理中證 $\textcircled{\text{甲}}$ 式之右邊為由函數 $\frac{1}{2}$ 而成其 $\frac{1}{2}$ 之同數為 $\frac{1}{2}$ 即訥白
爾對數之根也。所以卯若愈大則 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ 必愈與 $\frac{1}{2}$ 相近而其限為 $\frac{1}{2}$ 。

如令 $\frac{1}{2}$ 則 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ 之限為 $\frac{1}{2}$ 即

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \dots$$

故其函數為常數。

第四款

函數之同數。本從變數而生。故變數之同數變則函數之同數亦必因之而變。
設天為自變之數。戊為函數而 $\frac{1}{2}$ 。若令天之變大之數為 $\frac{1}{2}$ 則天變至 $\frac{1}{2}$ 之時其

函數戊亦必因此變大若以戊代其函數之新同數則

$$\begin{aligned} & \text{戊} = \frac{\text{天}}{\text{辛}} \\ & \text{即} \frac{\text{天}}{\text{辛}} = \frac{\text{戊}}{\text{戊}} \end{aligned}$$

故可見

天之長數若為辛則戊之長數必為戊即

$$\frac{\text{天}}{\text{辛}} = \frac{\text{戊}}{\text{戊}}$$

若以天之長數與函數之長數比

則為

$$\frac{\text{天}}{\text{辛}} = \frac{\text{戊}}{\text{戊}}$$

設函數之式為今天之長數為辛而以函數之新同數為戊則

$$\frac{\text{天}}{\text{辛}} = \frac{\text{戊}}{\text{戊}}$$

$$\frac{\text{天}}{\text{辛}} = \frac{\text{戊}}{\text{戊}}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\text{天}}{\text{辛}} = \frac{\text{天}}{\text{辛}} \\ & \frac{\text{天}}{\text{辛}} = \frac{\text{戊}}{\text{戊}} \end{aligned} \right.$$

可見天變為戊之時其函數戊必變為其所長之數為此式中之各項

$$\frac{\text{天}}{\text{辛}} = \frac{\text{天}}{\text{辛}}$$

皆為辛之整方與他數相乘所成

又可見變數與函數之變比例其式為

$$\frac{\text{天}}{\text{辛}} = \frac{\text{天}}{\text{辛}}$$

初項天與天之長數辛無相關

設函數之式為 $\frac{1}{x}$ 今天之長數為辛。而以戊為函數之新同數。則 $\frac{1}{x}$ 而

由此可見天若變為 $\frac{1}{x}$ 則其 $\frac{1}{x}$ 以上各函數之新同數。可以類推。

總言之。若以卯為天之任何整指數。而今天之長數為辛。又以巳午未申等字挨

次而代辛之各方之倍數。則函數 $\frac{1}{x}$ 之新同數。必為 $\frac{1}{x}$ 由是知函數之新同

數。必為級數。其初項戊。為函數之原同數。其餘各項。為天之長數辛各整方。以巳午未申之類。為各倍數。其各倍數皆為天之別種函數。其式亦從本函數而生。

由以上各式。又可見函數為 $\frac{1}{x}$ 之類。則其變數與函數之變比例。必

為

$$\frac{\text{辛}}{\text{戌}} = \frac{\text{天}}{\text{辛}}$$

$$\frac{\text{辛}}{\text{戌}} = \frac{\text{天}}{\text{天}} \frac{\text{天}}{\text{辛}}$$

$$\frac{\text{辛}}{\text{戌}} = \frac{\text{天}}{\text{天}} \frac{\text{天}}{\text{天}} \frac{\text{天}}{\text{辛}}$$

之類。總之若以卯為天之整指數。則

$$\frac{\text{戌}}{\text{天}}$$

之變比例。必為

$$\frac{\text{辛}}{\text{戌}} = \frac{\text{天}}{\text{天}} \frac{\text{天}}{\text{天}} \frac{\text{天}}{\text{辛}}$$

由此可見變數天之長數。與函數卯天之長數。其變比例。辛戌之同數。可分之為

二。其一為已。此式與天之長數辛無相關。

又式為

$$\frac{\text{辛}}{\text{戌}} = \frac{\text{天}}{\text{天}} \frac{\text{天}}{\text{天}} \frac{\text{天}}{\text{辛}}$$

即此式因以辛為乘

數。故辛若變小。其數亦必隨辛而變小。如令辛為任何小。則此式之數。可小至甚近于〇。故此數可以不計。而以已為變比例之限。

設有繁函數之式。

$$\frac{\text{戌}}{\text{天}} = \frac{\text{天}}{\text{天}} \frac{\text{天}}{\text{辛}}$$

令天之長數為辛。則天變為天之時。其函數之同數。必變為

以此法徧試各種特設之函數。見其皆有相類之性情。所以設例如左。
 例曰命任何自主之變數為天。而今天之任何函數等于戊。則天變為 $\frac{戊}{天}$ 之時。函

$$\frac{\frac{甲}{天} \cdot \frac{乙}{天} \cdot \frac{丙}{天} \cdot \frac{丁}{天} \cdot \frac{戊}{天} \cdot \frac{己}{天} \cdot \frac{庚}{天} \cdot \frac{辛}{天} \cdot \frac{壬}{天}}{\frac{甲}{天} \cdot \frac{乙}{天} \cdot \frac{丙}{天} \cdot \frac{丁}{天} \cdot \frac{戊}{天} \cdot \frac{己}{天} \cdot \frac{庚}{天} \cdot \frac{辛}{天} \cdot \frac{壬}{天}} = \frac{戊}{天}$$

故而

$$\frac{戊}{天} = \frac{戊}{天} \cdot \frac{戊}{天} \cdot \frac{戊}{天} \cdot \frac{戊}{天} \cdot \frac{戊}{天} \cdot \frac{戊}{天} \cdot \frac{戊}{天} \cdot \frac{戊}{天} \cdot \frac{戊}{天}$$

其為本函數變比例之限。

數之新同數為 $\frac{戊}{天}$ 其變數與函數之變比例為 $\frac{戊}{天}$ 此式中之初項已為變比例

$$\frac{戊}{天} = \frac{戊}{天} \cdot \frac{戊}{天} \cdot \frac{戊}{天} \cdot \frac{戊}{天} \cdot \frac{戊}{天} \cdot \frac{戊}{天} \cdot \frac{戊}{天} \cdot \frac{戊}{天} \cdot \frac{戊}{天}$$

$$\frac{戊}{天} = \frac{戊}{天} \cdot \frac{戊}{天} \cdot \frac{戊}{天} \cdot \frac{戊}{天} \cdot \frac{戊}{天} \cdot \frac{戊}{天} \cdot \frac{戊}{天} \cdot \frac{戊}{天} \cdot \frac{戊}{天}$$

之限。無論何種函數其限皆可依此例求之。
 由以上所論變數之長數與函數之長數相關之理。可于算學中開出兩種極大極精微之法。

其第一種為有任何變數之任何函數而求其變數與函數變比例之限。
其第二種為有任何變數與函數變比例之限而求其函數之原式。
此兩種法若細攷其根源即奈端所謂正流數反流數也亦即來本之所謂微分
算術積分算術也又即拉果蘭諸所謂函數變例也。

第五款 論各種函數求微分之公法

若函數之式為 $y = f(x)$ 今天變為 $y = f(x + \Delta x)$ 則函數之新同數必為 $f(x + \Delta x)$ 其與原同數之較為 Δy 。

即 Δy 此式之初項 Δx 名之曰溢率。

依同理推之若函數之式為 $y = f(x)$ 今天變為 $y = f(x + \Delta x)$ 則函數之新同數為 $f(x + \Delta x)$ 其與原同

數之較為 Δy 即 Δy 其初項 Δx 為溢率。

若函數之式為 $y = f(x)$ 而天變為 $y = f(x + \Delta x)$ 則函數之新同數與原同數之較為 Δy 而其溢率

Δx

為_四天_辛

總言之。凡天之函數無論為某方。恒可以_天代其天。而變其函數之同數如下式。

為_天

乃以原同數_戊減之。得_天而取其初項_辛為溢率。

戊_天

已_天

準此推之。則知天之溢率。即為其長數_辛。惟因函數之溢率。每藉天之長數而生。故微分術中。恒以_天代天之溢率。其_天號者。非天之倍數。不過謂是天之溢率耳。溢率之名。本為流數術中所用。而_天號者。即微字之偏旁。故微分之術用之。

如有式_天

則_天

此式之意。謂_天之微分。等于_天乘天之微分。猶言函數_天之溢率。

等于以_天乘其天之溢率也。

如有式_天

則_天

此式之意。謂_天之微分。等于_天乘天之微分。猶言函數_天之溢率。

等于以_天乘其天之溢率也。

第六款

惟因每遇^三天^二則^三天^二所以可寫之如^三天^二此為天微分之倍數亦謂之微係數

又依前法推之如函數之式為^三天^二則^三天^二而^三天^二其三為原函數^三天^二之微係數

總言之無論何種函數之微係數皆可以^三天^二代之而函數之新同數為^三天^二所以

^三天^二其已為天之他函數其形每隨函數之式而變如知^三天^二之同數為何式則其

已之同數即易求得

凡函數之欲求微分者先于其式之左旁作一^三天^二號以記之

如有^三天^二式欲求其微分則可先作^三天^二

凡函數之欲求微係數者于其式之左旁作^三天^二號又以^三天^二為其分母

如有式^三天^二欲求其微係數則作^三天^二

^三天^二

從以上各款諸說易知求微分之公法

法曰無論天之任何函數欲求微分則以天代其原式中之天而詳之依辛之整方數自小而大序之取其初有辛之項而以天代其辛即得

如有式^三求微係數則以天代其天而令函數之新同數為戊則得

$$\text{戊} = \frac{\text{甲天}}{\text{乙天}}$$

取其初有辛之項

$$\text{甲} \frac{\text{乙天}}{\text{丙辛}}$$

以天代其辛即得故其

$$\text{戊} = \frac{\text{甲天}}{\text{乙天}}$$

$$\text{戊} = \frac{\text{甲天}}{\text{乙天}}$$

第七款

上款之法必令天變為天

$$\frac{\text{天}}{\text{天}}$$

而詳其函數之同數為級數此乃論其立法之理當如是也惟求得級數之後所用者僅為其辛一方之項則但能求得此項已足用矣

前于第四款中言此項之倍數為變數與函數變比限之限又于第六款中

言此項之倍數謂之微係數然則求函數之微係數與求變數與函數變比例之限其法本無異也

$$\begin{cases} \text{戊} = \frac{\text{甲天}}{\text{乙天}} \\ \text{戊} = \frac{\text{甲天}}{\text{乙天}} \\ \text{戊} = \frac{\text{甲天}}{\text{乙天}} \end{cases}$$

如有式

$$\begin{aligned} & \frac{\text{天}}{\text{甲}} = \frac{\text{天}}{\text{甲}} \\ & \frac{\text{戊}}{\text{戊}} = \frac{\text{天}}{\text{甲}} \\ & \frac{\text{戊}}{\text{戊}} = \frac{\text{天}}{\text{甲}} \\ & \frac{\text{戊}}{\text{戊}} = \frac{\text{天}}{\text{甲}} \end{aligned}$$

故其變比例之式為

$$\frac{\text{辛}}{\text{戊}} = \frac{\text{天}}{\text{甲}}$$

惟此式可不待詳

為級數而始得其變比例之限因可見辛愈小則其式愈近于天甲故此式必即

為天甲之同數所以得

$$\frac{\text{天}}{\text{甲}} = \frac{\text{天}}{\text{甲}}$$

若以戊為任何函數之原同數而以天代其天則其函數之新同數為即得

$$\frac{\text{辛}}{\text{戊}} = \frac{\text{天}}{\text{甲}}$$

惟因辛之限為已故得

$$\frac{\text{天}}{\text{甲}} = \frac{\text{天}}{\text{甲}}$$

$$\frac{\text{戊}}{\text{戊}} = \frac{\text{天}}{\text{甲}}$$

由此得一解曰凡微分之術其意專為求任何變數與函數同時變大之限耳凡求任何函數之微分不過將一尋常之代數式另用他法以變化之因其變化之法與代數中常用之法異則不得不另有一名以別之故謂之微分術

第八款

凡變數與函數變比例之限無論以何數為主其形必同