控制系统的状态空间分析

（第一册）

（日）绪方胜 廖新著 华东工程学院译

武汉钢铁学院电气自动化教研室翻印

1979年1月

前　　言

本书介绍的是控制系统状态空间分析的基本知识和提供为研究近代控制理论所需要的基础。本书可以作为工程领域方面高年级大学生和一年级研究生在反馈控制系统领域深入阅读的课本。除了供教学使用之外，它还可作为想要研究控制系统状态空间分析基本理论，以及希望获得近代控制理论基本知识的从事实际工作的工程师们的参考书。读者应具备的知识是他至少要掌握大学三～四年级关于反馈控制系统课程的内容。

本书中的大多数内容都已包含在作者在明尼苏达州立大学机械工程系高年级和一年级研究生的教程中。

前五章介绍的主要是基础知识，而后四章的主题是控制系统的状态空间分析。具体地说，第一章介绍绪言。第二章复习矩阵和向量的基本内容。第三章到第五章详细的给出了控制系统状态空间分析所必须的基本的数学知识。由于近代控制理论是以常微分方程理论为基础的，因此在第六章对向量矩阵微分方程作了详细的论述。第九章讨论的是控制系统的可控性和可测性。第八章介绍的是线性系统和非线性系统的稳定性分析。最后，讨论设计最佳控制系统的解析方法。在每章的结尾都提供了相当数目的已作出的习题。它们补充了这些理论的应用，并且进一步用实例说明了所介绍的方法。

作者向麻省理工学院教授W.W.Seifert致谢，他审阅了原稿并且提出了很多有益的意见。作者非常感谢国家科学基金会给予的支持，这是本书得以完成的主要因素。最后，为作者的夫人所作的打字工作表示感谢。

KATSUH1KO　OGATA

第一章 概 论

1—1 状态空间概念的引入

在1955年前后，控制科学方面的一个很大的进展是在控制系统的分析和综合这二个基本概念上发生了变化。这种进展主要是由于应用了最佳控制系统的数学研究方法。

以状态空间概念为基础的近代控制理论，不仅对于设计具体的最佳控制系统是十分有用的，而且对于改进系统运行的基本原理也是很有用的。由于使用状态空间法，控制工程师可以设计出这样一些系统，这些系统所具有的性能特性是利用经典的频域法或根轨迹法所无法达到的。

装置和控制系统：受控的物理对象称之为装置（Plant）。它可以是加热炉，化学反应器，宇宙飞船等等。这些同时动作并且实现某个目标的各部件的组合称之为系统。控制系统是这样一种系统，它由若干部件组成，这些部件可以是传感器，控制器，装置等等。装置通常是控制系统中给定的一种部件。

复杂系统的控制。在给定的运行时间间隔内，控制信号的技术说明称之为控制法则。建立在近代控制理论基础之上的控制系统设计，主要是在于确定最佳控制法则，对于某些约束条件而言，这一法则将使得给定的性能指标取极小值。性能指标是性能的定量指标。它是对于理想性能的偏差的量度。除了一些简单的情况外，装置的最佳控制要求使用数字计算机来实现，计算机利用由装置得到的反馈信号来产生最佳控制信号。图1—1所示为计算机控制系统的方框图。计算机实现二项功能：(1)利用装置的数据来形成运行指南；(2)根据运行指南计

算各控制器的命令信号，这些控制器则是用来控制装置的不同输入。

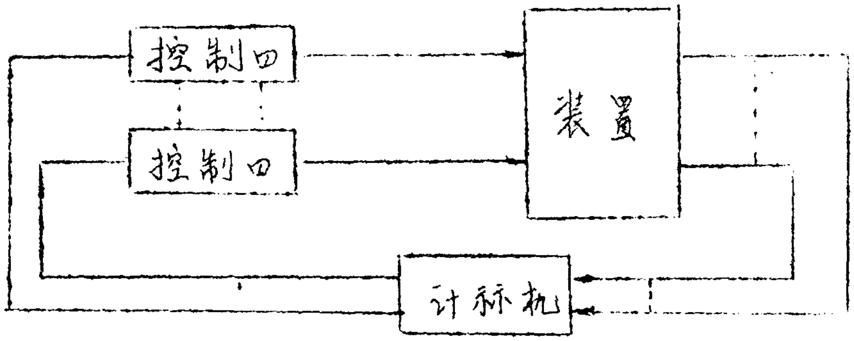
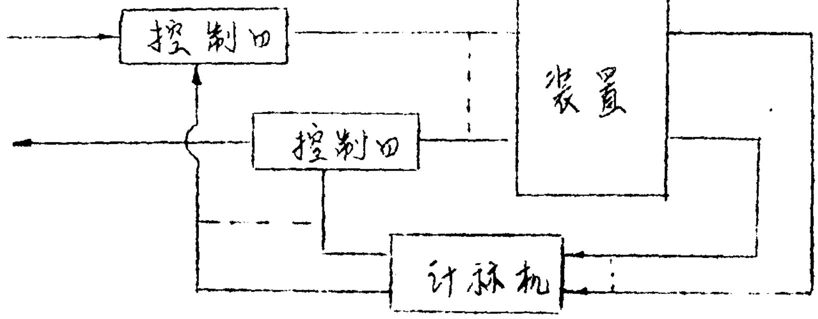


图　1—1　计算机控制系统

计算机产生的各种命令信号去调整各控制器的位置。命令信号的计算是根据装置的数学模型和给定的性能指标来进行的。在某些情况下，计算机的输出信号用来调整控制器的参量（这就是自适应控制系统）。各控制器的调整点可以由同一个计算机产生的命令信号来控制，也可以由不同的计算机产生的命令信号将控制。图１—２所示为这种计算机控制系统的方框图。在每一个系统中，使用计算机的目的都在于使给定的性能指标达到极小值，或使得系统的“利润”、“效率”等达到极大值。

图１—１和图１—２所示方框图表明了控制系统的简例，它们可以产生优良的特性。这类控制系统只要利用建立在状态空间方法基础上的近代控制理论即可以进行综合。状态空间概念的使用以一致的方

图１—２
计算机控制系统



式简化了复杂控制系统的分析和综合·在使用状态空间法综合最佳控制系统时，我们只需要对问题的解析投影进行求解·通过程序设计可用计算机处理必要的数值计算·

数学模型·在控制系统的分析和综合中，第一步就是要建立给定装置的适当的数学模型·从原理上讲，装置的数学模型可以根据装置的结构和装置各独立元件的特性，结合一些基本的物理定律来求得·除简单的情况外，装置的合适的数学模型的建立，通常是个困难的问题，并且可能导致严重的误差·建立数学模型时所出现的困难，是由于近代装置通常都是十分复杂所造成的·此外，足够数量的运行数据也是不易得到的·要指出的是，过于简单的数学模型可能会表示不出装置的一些固有特性；而过于复杂的数学模型，则可能引起数学上的困难·适当的模型是对于复杂的方程存在的数学困难和希望最终结果具有一定精度，这二者之间的一种折衷·

描述装置动态特性的方程，常常可以由以时间 t 为独立变量的 n 阶常微分方程来近似·在本书中我们只处理可以由若干几阶常微分（或差分）方程，或若干组一阶常微分（或差分）方程组所描述的系统·

如果方程中的每一项至多只包含相应变量或它的导数的一次幂则称这个 n 阶常微分方程是线性的·由线性微分方程所描述的系统称为线性系统·

线性系统可以分为线性时不变系统和线性时变系统·如果它的特性不随时间变化，这样的系统称为时不变系统·大多数物理系统都是时变的·如果与输入量的变化相比，系统特性的变化是很慢的·那么，可以在足够精确的条件下，用线性时不变系统来近似线性时变系统·

如果微分方程不是线性的，就称为非线性的·由非线性微分方程描述的系统，称为非线性系统·

任何一个物理系统，如果非常仔细地分析，它都是非线性的。但是，一些物理系统可以在足够的精度条件用线性系统来近似。如果相对于线性特性的偏离是那样的小，以至于可以认为这样的偏差对于具体问题是不重要的，那么，可以把这样的系统当作线性系统来处理。因此，认为系统是线性的还是非线性的，主要的取决于求解问题时所要求的精度。

分析和综合系统的困难，主要的依赖于描述系统的微分方程的类型。一般地说，如果系统的微分方程是线性的和时不变的，那么系统的分析和综合将会变得容易得多。由于这样的线性时不变微分方程在理想的意义上表示了很多物理系统的特性，所以在本书中我们将要详细论述这种方程。

系统方程的化简。复杂装置通常是由多个输入量，主要的输入量可以是十个以上，和同样数量的输出量来表示的—对于装置适当的精度和完整的描述，将需要上百个一阶微分方程。通过处理简化这些基本方程，即使是在最简单的情况下，也是很麻烦的事，并且在很多情况下是不现实的。不进行简化，由于代数回路方面的困难，我们将无法在模拟计算机上研究复杂的系统，即使是足够大的机器也是如此。数字计算机可以通过程序设计来处理复杂的系统。但即使在这种情况下，也希望化简基本方程以满足存贮空间和计算时间方面的要求。状态空间表示法以系统的方式在不损失基本信息的条件下，提供了进行这种化简的理想方法。

状态和状态空间。动态系统的状态是一些量的最小集合，这些量在 $t=t_0$ 时刻，必须是确定的，以便在 $t>t_0$ 的输入集的每个元素都已知的情况下，对于 $t>t_0$ 时给定输入集的任一输入量能够唯一的予测出系统的特性。这样的一组量称为状态变量。这里的输入集定义为

能够加入系统的所有可能的输入量。系统在时刻 t 的状态，由 t_0 时刻的状态和 $t \geqslant t_0$ 时已知的输入量所唯一确定，并且以 t_0 以前的状态和输入值无关。

假定最少的n个状态变量 x_1，x_2，……，x_n 的集，对于完整的描述给定的系统是必须的。那么可以认为n个状态变量的集是向量x的n个分量。这个向量x称为状态向量。状态空间定义为一个n维空间，在这个空间中 x_1，x_2……x_n 是坐标。系统是在t时刻的状态是由n个一阶微分方程定义的。并且可以用n维状态空间中的点来表示。要注意的是，在控制系统的分析和综合的状态空间方法中，我们涉及的是n个一阶微分方程组成的方程组，而不是单个的n阶微分方程。

在 t 时刻上，状态空间中的点称为样点。在时间间隔 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ 内各样点的轨迹称为这段时间间隔的轨道。

动力学系统经典理论的复习。近代控制理论的基础——状态空间概念是由质点和刚体动力学的经典理论发展起来的。现在我们对于这种动力学系统的经典理论作一个简要的回顾。

在研究具有约束条件的质点和刚体动力学中，通常用独立变量方法来确定位置，而不是利用矩形坐标来表示质点或刚体的位置，这是因为并不是所有的矩形坐标都是线性无关的。

我们来研究由r个质量 m_1、m_2，……m_r 组成的系统。我们规定r个质点的坐标分别为（x_1，x_2，x_3），（x_4，x_5，x_6）……，（x_{3r-2}，x_{3r-1}，x_{3r}），作用在r个质点上的力分别为（X_1，X_2，X_3），（X_4，X_5，X_6）……（X_{3r-2}，X_{3r-1}，X_{3r}）。则牛顿运动方程为

$$m_i \ddot{x}_i = X_i \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots, 3r) \qquad (1-1)$$

其中 $m_1=m_2=m_3$，$m_4=m_5=m_6$，……，$m_{3r-2}=m_{3r-1}=m_{3r}$。

方程（1—1）描述的是在没有任何约束条件下r个质点的运动。如果存在下面的S个约束方程：

$$f_j(X_1, X_2, \cdots\cdots, X_{3r})=0 \quad (j=1, 2\cdots, S)$$

则我们可以义定一组3r－S个线性无关变量q_1，q_2……，q_k（其中$k=3r-S$）来表示X_1，X_2，……，X_{3r}，或：

$$X_i=X_i(q_1, q_2, \cdots\cdots q_k) \quad (i=1, 2, \cdots\cdots, 3r)$$

这些线性无关变量q_1，q_2，……q_k称为广义坐标。广义坐标的数量等于系统的自由度的数目。在上述系统中自由度的数目是$k=3r-S$。已知了广义坐标的数值，我们就能够确定任一给定时刻上质点或刚体的位置。

系统运动的拉格朗日方程是以q_1，q_2，……，q_k表示的微分方程。这个方程是通过使用哈米尔顿原理得到的。为了简化我们的讨论，我们来研究一个没有任何外力作用的保守系统。拉格朗日指出保守系统的运动方程可以表示为：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \quad (i=1, 2, \cdots\cdots k) \quad (1—2)$$

其中 $L=T-V$

T＝动能

V＝位能

q_i＝独立的广义坐标

因为$L=L(q_1, q_2, \cdots\cdots, q_k, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots\cdots, \dot{q}_k)$，所以方程（1—2）简化为一组K个关于$q_1$，$q_2$……，$q_k$的二阶常微分方程。

哈米尔顿指出过，如果我们定义称之为广义动量坐标的一组新坐标P_i，即

$$P_i=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,k)$$

则运动方程可以简化。利用P_i和q_i运动方程可以简化为一组2k个一阶微分方程：

$$\left.\begin{aligned}\dot{q}_i&=\frac{\partial H}{\partial q_i}\\ \dot{P}_i&=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\end{aligned}\right\} \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,k)\ (1—3)$$

其中　$H=T+V$

（对于方程（1—3）的导数可参看习题A—1—4）。方程（1—3）称为哈米尔顿运动方程。函数H称为哈米尔顿函数。它是q_i和P_i（$i=1,2,\cdots\cdots,K$）的已知函数。

对于具有K个自由度的系统，以q_1，q_2，……q_k，和P_1，P_2，……P_k为坐标的2k维空间称之为相空间。当坐标和矩（momenta）随时间变化时，相空间中的样点也相对于相空间运动。哈米尔顿方程（1—3）给出了相空间中样点向量的分量。质点和刚体的经典动力学问题，就是研究样点在相空间中的路径。

注意：方程（1—3）是一组2k个一阶微分方程，它的形式是：

$$\left.\begin{aligned}\dot{q}_i&=f_i(q_1,q_2,\cdots\cdots q_k;\ P_1,P_2,\cdots\cdots P_k)\\ \dot{P}_i&=q_i(q_1,q_2\cdots\cdots q_k;\ P_1,P_2,\cdots\cdots P_k)\end{aligned}\right\} (1—4)$$

$$(i=1,2,\cdots\cdots,K)$$

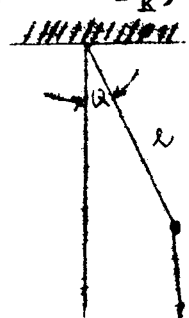


图1—3　单　摆

在方程（1—4）的系统中，2k个变量q_1，q_2……q_k；P_1，P_2，……P_k完全描述了系统的动态特性。因为这2k个变量是完全表示系统动态特性所必须确定的最少数目的组合，因此，它

们是状态变量。

作为一个例题，我们来研究图1—3所示的单摆。在考虑这个系统的时候，使用通常的矩形坐标x和y并不方便，这是因为存在约束方程$x^2+y^2=l^2$。选择极坐标Q和r是方便的，其中r是常量。这样只有一个系统变量或称广义坐标Q。

在这个系统中，质点m从它的平衡位置被升高的距离是$l(1-\cos Q)$。因此位能为：

$$V=mgl(1-\cos Q)$$

质点m的速度是$l\dot{Q}$。因此动能可以表示为：

$$T=\frac{m}{2}(l\dot{Q})^2$$

我们令Q＝q，则哈米尔顿函数H为：

$E=T+V=\frac{m}{2}(l\dot{q})^2+mgl(1-\cos q)$

因为P定义为：

$$P=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}=ml^2\dot{q}$$

所以H可以写为：

$$H=\frac{1}{2ml^2}P^2+mgl(1-\cos q)$$

根据公式（1—3）

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial P}=\frac{1}{ml^2}P$$

$$\dot{P}=-\frac{\partial H}{\partial q}=-mgl\sin q$$

方程（1—5）确定了单摆在以P和q为坐标的相平面上的运动。因此P和q完全描述了这个系统的动态特性。它们就是一组状态变量。

在动力学经典理论中使用相空间来描述由质点和刚体组成的系统的

动态特性。对于具有k个自由度的系统相空间是2k维的，它的坐标分别为q_1，q_2……q_k和p_1，p_2，……p_k。因此，对于一个自由度的系统，相空间就变成了相平面，即一个二维的相空间。对于二个自由度的系统，相空间是4维的。

在动力学经典理论中使用的由自度的概念，不能应用于控制系统，因此上面指出的相空间的定义也不能直接应用于控制系统。然而相空间的概念却可以直接应用于控制系统。事实上，状态空间的概念正是由相空间的概念引伸出来的。值得注意的是在近代控制理论中使用的状态空间的定义比起在动力学经典理论中使用的相空间的定义更具有一般性（在最佳制控系统的分析和综合中经常使用的“三维相空间”实际上就意味着三维状态空间）。

到此，我们完成了在质点和刚体动力学的经典理论中使用的相空间概念的简要回顾。

在下一节中，我们要介绍在以后的关于状态变量和状态空间的讨论中要用到必要的数学基础。

1—2　数学基础

本节我们将首先讨论利用向量矩阵表示法来表示系统微分方程。然后我们复习关于微分方程解的存在性和唯一性定理。这些定理对于已知输入集的给定系统而言，是正确的确定其状态变量组的基础。

利用向量矩阵表示法来表示系统微分方程。我们假定在本书中所要讨论的系统，可以用n阶常微分方程或由n个一阶常微分方程组成的方程组来描述。

我们首先应当指出，n阶微分方程总是可以简化为n个一阶微分方程组成的方程组（关于这一点，我们将在第4章中进行详细的讨论）。

我们来研究下面的n阶微分方程：

$$\overset{(n)}{x} = f(x, x, \cdots\cdots, \overset{(n-1)}{x}, u, t) \qquad (1-6)$$

其中u是强制函数·通过定义新的变量

$$x_1 = x$$
$$x_2 = \dot{x}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = \overset{(n-1)}{x}$$

方程（1—6）可以化简为：

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (1-7)$$
$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$
$$\dot{x}_n = f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, u, t)$$

方程（1—7）是一个由n个一阶微分方程组成的方程组·

下面我们来讨论更一般的情况·考虑图1—4所示系统·装置的方程可以用下面的n个一阶常微分方程组成的方程组来适当的描述·

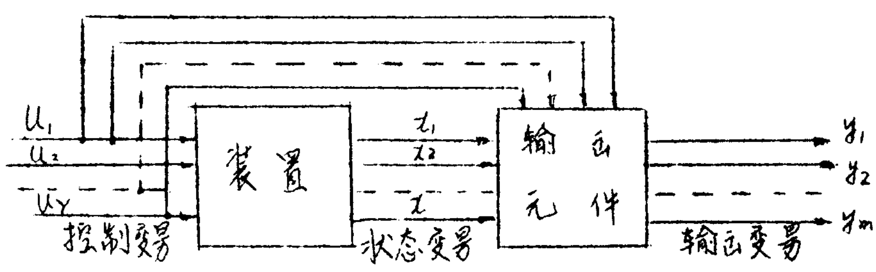


图1—4 说明控制系统术语的方块图

$$x_i = f_i(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n; u_1, u_2, \cdots\cdots, u_r; t) \qquad (1-8)$$
$$(i = 1, 2, \cdots\cdots n)$$

其中x_1，x_2，……，x_n是状度变量，u_1，u_2，……u_r是控制变量。要指出的是状态变量x_i，不要求必须是可测量的。我们可以测量其中某些量（通常是系统的输出量）然后估计出另外一些实际的状态变量。我们假定系统的输出y_1，y_2……，y_m是直接可测量的，并且与状态变量x_1，x_2，……x_n和控制变量u_1；u_2，……，u_r之间的关系可表示为：

$$y_j=g_j(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n;\ u_1;\ u_2,\cdots\cdots u_r;\ t)$$

$$(j=1,2,\cdots\cdots,m;\ m\leqslant n) \quad (1-9)$$

如果系统的阶数并不低，这样的方程组表示起来就很麻烦。有必要使用向量和矩阵去简化这种表示法。利用向量表示法重新写出方程（1—8）和（1—9）分别变为：

$$\dot{x}=f(x,u,t) \quad (1-10)$$

和

$$y=g(x,u,t)$$

其中x，u，y，f（x,u,t）和g（x，u，t）是向量，它们的定义为：

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\ u=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_r\end{bmatrix},\quad y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{bmatrix}$$

$$f(x,u,t)=\begin{bmatrix}f_1(x,u,t)\\f_2(x,u,t)\\\vdots\\f_n(x,u,t)\end{bmatrix},\ g(x,u,t)=\begin{bmatrix}g_1(x,u,t)\\g_2(x,u,t)\\\vdots\\g_m(x,u,t)\end{bmatrix}$$

这里的向量x，u和y分别称为状态向量，控制向量和输出向量。系统

是用向量函数 f 和 g 表示的。

如果图1—4所示系统对于 X 和 u 是线性的，n 个一阶微分方程组成的方程组可以表示为：

$$\dot{X}_1 = a_{11}(t)X_1 + a_{12}(t)X_2 + \cdots\cdots +$$
$$+ a_{1n}(t)X_n + b_{11}(t)u_1 + \cdots\cdots + b_{1r}(t)u_r$$
$$\dot{X}_2 = a_{21}(t)X_1 + a_{22}(t)X_2 + \cdots\cdots +$$
$$+ a_{2n}(t)X_n + b_{21}(t)u_1 + \cdots\cdots b_{2r}(t)u_r$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\dot{X}_n = a_{n1}(t)X_1 + a_{n2}(t)X_2 + \cdots\cdots +$$
$$+ a_{nn}(t)X_n + b_{n1}(t)u_1 + \cdots\cdots + b_{nr}(t)u_r$$

输出变量，状态变量和控制变量之间的 m 个代数方程可以写出：

$$y_1 = c_{11}(t)X_1 + C_{12}(t)X_2 + \cdots\cdots +$$
$$+ c_{1n}(t)X_n + d_{11}(t)u_1 + \cdots\cdots + d_{1r}(t)u_r$$
$$y_2 = c_{21}(t)X_1 + c_{22}(t)X_2 + \cdots\cdots +$$
$$+ c_{2n}(t)X_n + d_{21}(t)u_1 + \cdots\cdots d_{2r}(t)u_r$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_m = C_{m1}(t)X_1 + C_{m2}(t)X_2 + \cdots\cdots +$$
$$+ C_{mn}(t)X_n + d_{m1}(t)u_1 + \cdots\cdots + d_{mr}(t)u_r$$

利用向量矩阵表示法重新写为：

$$\dot{X} = A(t)X + B(t)u$$
$$Y = C(t)X + D(t)u$$

其中

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots\cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots\cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots\cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

$$B(t)=\begin{bmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \cdots\cdots & b_{1r}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & \cdots\cdots & b_{2r}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & \cdots\cdots & b_{nr}(t) \end{bmatrix}$$

$$C(t)=\begin{bmatrix} C_{11}(t) & C_{12}(t) & \cdots\cdots & C_{1n}(t) \\ C_{21}(t) & C_{22}(t) & \cdots\cdots & C_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{m1}(t) & C_{m2}(t) & \cdots\cdots & C_{mn}(t) \end{bmatrix}$$

$$D(t)=\begin{bmatrix} d_{11}(t) & d_{12}(t) & \cdots\cdots & d_{1r}(t) \\ d_{21}(t) & d_{22}(t) & \cdots\cdots & d_{2r}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m1}(t) & d_{m2}(t) & \cdots\cdots & d_{mr}(t) \end{bmatrix}$$

A(t)的各元素决定于装置的参数，B(t)的各元素表明每个控制变量怎样影响装置的状态变量。C(t)指出了输出变量和状态变量间具有什么样的关系。D(t)则指出控制变量如何直接影响输出变量。在任何的实际情况下都有 $m \leqslant n$。

我们已经介绍了利用向量和矩阵描述系统方程的方法。对于理论工作来说，由于向量矩阵运算对于控制系统的状态空间分析是最方便的，而且是最基本的运算，从而增加了表示方法的简单性。这种以x为状态向量的系统方程的矩阵表示法称为系统方程的状态空间表示。利用状态空间表示的系统化的公式很容易处理大型的复杂问题。

例1—1．让我们来求取如下线性时不变系统的状态空间表示：

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots\cdots+a_{n-1}\frac{dx}{dt}+a_n x$$

$$=0$$

我们令：

$$X_1 = X$$

$$X_2 = \dot{X}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$X_n = X^{(n-1)}$$

方程（1—11）等效于下面的n个联立方程：

$$\dot{X}_1 = X_2$$

$$\dot{X}_2 = X_3$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\dot{X}_{n-1} = X_n$$

$$\dot{X}_n = -a_n X_1 - \cdots - a_1 X_n$$

因此方制（1—11）可以写为如下的状态空间方程：

$$X = AX$$

其中

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots\cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & a_1 \end{bmatrix}$$

微分方程的存在性和唯一性。下面我们复习一下有关微分方程解的存在性和唯一性定理。我们来研究由下面的一阶微分方程定义的自由动力学系统：

$$\dot{X} = f(X, t)$$

$$X(t_0)=X_0$$

我们来求取这个方程的解。从几何意义上看，解是经过点$P_0(X_0, t_0)$的积分曲线。因为积分曲线在P_0点的斜率是$f(X_0, t_0)$，所以可以由P_0点开始，以$f(X_0, t_0)$为斜率画一短的线段。我们称这个短线段的$P_1(X_1, t_1)$为端点。这样P_0P_1就可以在P_0点附近来近似积分曲线。然后再从P_1点以$f(X_1, t_1)$为斜率画一短的线段。这个短线端的端点为$P_2(X_2, t_2)$。重复这样的过程，我们可以构成如图1—5所示的由各短线段组成的分段线性曲线$P_0P_1P_2$……。如果我们通过增加线段的数目来使得每个线段的长度愈来愈短，那么极限$P_0P_1P_2$……将收敛于曲线。显然的，我们可以予料到

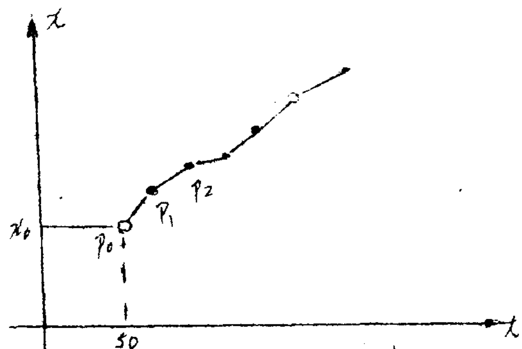


图1—5 积分曲线表示 $\dot{x}=f(x,t)$的解

这个曲线的极限就是给定微分方程的积分曲线。然而要使这一点成立，还要求$f(X, t)$必须满足某些条件。这些条件是以柯西——黎普辛兹定理的形式给出的，它是常微分方程理论中的一个著名的成果。

<u>定理1—1．柯西——黎普辛兹定理</u>．在由下式定义的动力学系统中

$$\dot{X}=f(X, t), \quad X(t_0)=X_0$$

我们假定

(a) 在由下式定义的域Γ内

$$|X-X_0|<h, \quad 0\leqslant t-t_0<\tau$$

$f(X, t)$是单值连续函数，并且存在正数M，使得在Γ域内

$$|f(X, t)|\leqslant M$$