微　　积　　分

（下　册）

湖南师范学院数学系编印

一九七七年八月

《微积分》下册目录

第六章　无穷级数

§6.1　无穷数值级数

一、一般概念

在造纸厂里，我们会遇到纸浆纯度的计算问题。为了去掉纸浆所含的盐份，采用的洗涤办法是：先在纸浆中注入一定量的清水，搅拌均匀后倾出等量的不含纸浆的水，第二次又重复第一次的做法，这样重复洗涤几次后，就可使纸浆达到所需的纯度。

现在我们从数量关系上对该问题进行分析。设在洗涤前纸浆含有 a 千克的水，每千克水中溶有 x_0 千克的盐，故纸浆所含的总盐量是 ax_0。第一次注入 b 千克的清水，搅拌后盐的浓度记为 x_1，则

$$x_1=\frac{ax_0}{a+b},$$

排出 b 千克不含纸浆的水，其中所含的盐量为

$$bx_1=\frac{a}{a+b}\cdot bx_0;$$

第二次注入 b 千克清水后，盐的浓度记为 x_2，则

$$x_2=\frac{ax_1}{a+b}=\left(\frac{a}{a+b}\right)^2\cdot x_0,$$

再排出 b 千克水，其中所含的盐量为

$$bx_2=\left(\frac{a}{a+b}\right)^2\cdot bx_0;$$

继续进行下去，一般说来，第 n 次注入 b 千克清水后，盐的浓度记为x_n，则

$$x_n=\left(\frac{a}{a+b}\right)^n\cdot x_0,$$

排出 b 千克不含纸浆的水中所含的盐量为

$$bx_n=\left(\frac{a}{a+b}\right)^n\cdot bx_0。$$

故洗涤 n 次后，从纸浆中去掉的总盐量为

$$s_n=\frac{a}{a+b}\cdot bx_0+\left(\frac{a}{a+b}\right)^2\cdot bx_0+\cdots+\left(\frac{a}{a+b}\right)^n\cdot bx_0。$$

实践经验告诉我们，洗涤的次数越多，纸浆含盐量就越小，它的纯度也就越高。从数学理论上也很容易看到这一点。特别，当 $n\to\infty$时，我们得到一个退缩等比级数

$$\frac{a}{a+b}bx_0+\left(\frac{a}{a+b}\right)^2bx_0+\cdots+\left(\frac{a}{a+b}\right)^nbx_0+\cdots,$$

它的和是 ax_0。这个结果表明，如果洗涤次数无限制地增加下去，纸浆中所含的盐份可以完全洗掉。在实际操作中，洗涤的次数当然只须使纸浆达到需要的纯度就够了。

从上述实际问题中抽象出来的等比级数是一个无穷级数，它是由无穷多个数（无穷数列）

$$\frac{a}{a+b}bx_0,\left(\frac{a}{a+b}\right)^2bx_0,\cdots,\left(\frac{a}{a+b}\right)^nbx_0,\cdots$$

组成的。

定义一　设有一无穷数列$\{a_n\}$，把数列中的各数依次用加号联起来的式子

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1}$$

或简写为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，叫做无穷级数，简称级数。$a_n$叫做它的第 n 项，也叫通项。从第一项起，依次作下列各有限项的和

$$s_1 = a_1，\ s_2 = a_1 + a_2，\ \cdots，\ s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n，\ \cdots，$$

它们都叫做级数（1）的部分和，且把s_n叫做它的前 n 项的部分和。

从形式上看，似乎级数（1）就是把数列$\{a_n\}$的所有各项按顺序一个一个地加起来所得之"和"。但我们只能求有限个数的和，这样的加法是不可能完成的。恩格斯说："为了达到不确定的、无限的东西，必须从确定的、有限的东西出发，所以一切数学的序列，正的或负的，都必须从一开始，否则就无从计算"。因此，我们讨论问题必须以有限的量——级数（1）的部分和作为出发点来解决有限与无限之间的矛盾，以得到对级数（1）的正确理解。

定义二　当 n 无限增大时，若部分和的数列$\{s_n\}$趋于一个极限（有限的定数）

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s，$$

就叫无穷级数（1）收敛，这时极限值 s 叫做级数（1）的和，记作

$$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots。$$

若数列$\{s_n\}$没有极限，就叫无穷级数（1）发散，并说它没有和。

例1　讨论级数$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$的敛散性。

解：部分和

$$s_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

所以该级数收敛，其和为1。

例2　试讨论公比为r的等比级数（几何级数）$a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots(a\neq0)$的敛散性。

解：在$|r|\neq1$时，我们有

$$s_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r},$$

如果$|r|<1$，当$n\to\infty$时，$\frac{ar^n}{1-r}\to0$，因此

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{a}{1-r},$$

这就是说，级数是收敛的，其和为$\frac{a}{1-r}$。

如果$|r|>1$，当$n\to\infty$时，$\frac{ar^n}{1-r}\to\infty$，因此

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty,$$

这就是说，级数是发散的。

在 $r = 1$ 时，级数变为

$$a + a + a + \cdots + a + \cdots,$$

而 $s_n = na$，当 $n\to\infty$ 时，$s_n\to\infty$，故级数是发散的。

在 $r = -1$ 时，级数变为

$$a - a + a - a + \cdots + (-1)^{n-1} a + \cdots,$$

而

$$s_n = \begin{cases} 0，当 n 为偶数时， \\ a，当 n 为奇数时。\end{cases}$$

因此，当 $n\to\infty$ 时，s_n 没有极限，故级数发散。

综合上述结果，我们得到：若等比级数的公比 r 的绝对值 $|r|<1$ 时，则级数收敛，若 $|r|\geq 1$ 时，则级数发散。

收敛级数的和及其前 n 项部分和之差：

$$r_n = s - s_n$$

叫做级数的 n 项后的余项。发散级数没有和，当然也谈不上余项。一个收敛级数的余项数列 $\{r_n\}$ 的极限是零。因为

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}(s - s_n) = 0。$$

二、基本性质

性质 1　如果级数（1）收敛，和为 s，而 c 是一个常数，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n + \cdots$$

也收敛，且其和为cs。如果级数(1)发散，又$c\neq 0$，则上面这级数也发散。

证：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$的部分和

$$\sigma_n = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n = cs_n, \qquad (2)$$

因此，在级数(1)收敛时，

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty} cs_n = c\lim_{n\to\infty} s_n = cs。$$

另一方面，由(2)可知，如果s_n没有极限，而$c\neq 0$，那末σ_n也不可能有极限。

这个性质也可以简单地这样说，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_m$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$具有相同的敛散性。（其中$c\neq 0$）

性质2　两个收敛的级数可以逐项相加或相减。

证：设收敛级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$的和分别为$s$与$\sigma$，部分和分别为$s_n$与$\sigma_n$。

由于当$n\to\infty$时，

$$\begin{aligned}&(a_1\pm b_1)+(a_2\pm b_2)+\cdots+(a_n\pm b_n)\\&=(a_1+a_2+\cdots+a_n)\pm(b_1+b_2+\cdots+b_n)\\&=s_n\pm\sigma_n\to s\pm\sigma。\end{aligned}$$

因此级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$收敛，它的和就是$s\pm\sigma$。

性质3　在一个级数的头上添入或去掉有限个项，并不影响这级数的敛散性。

证：假定从级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中去掉最前 m 项，得到另一个级数

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+n} + \cdots, \tag{3}$$

如果分别以 s_{m+n} 与 s'_n 记级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数（3）的部分和，那末

$$s_{m+n} = a_1 + a_2 + \cdots + a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{m+n}$$

$$= \sum_{k=1}^{m+n} a_k,$$

$$s'_n = a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+n} = \sum_{k=1}^{n} a_{m+k},$$

而

$$s_{m+n} = a_1 + a_2 + \cdots + a_m + (a_{m+1} + \cdots + a_{m+n})$$

$$= a_1 + a_2 + \cdots + a_m + s'_n,$$

由此可知，$\lim_{n\to\infty} s_{m+n}$ 存在，必有 $\lim_{n\to\infty} s'_n$ 存在，反之亦然。而且当

$\lim_{n\to\infty} s_{m+n} = s$，$\lim_{n\to\infty} s'_n = s'$ 时，就有

$$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_m + s' = s_m + s',$$

从而可知 $s' = s - s_m = r_m$，即级数（3）的和就是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的 m 项后的余项。

性质 4（级数收敛的必要条件） 收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的通项 a_n 在 $n\to\infty$ 时趋于零：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 。$$

证：部分和

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = s_{n-1} + a_n,$$

从而

$$a_n = s_n - s_{n-1},$$

已知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，就有$\lim_{n\to\infty} s_n = s$，同时也有

$\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s$，所以

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1}$$

$$= s - s = 0。$$

由此可知，如果通项不趋于零，那末级数一定发散。

例 3　级数$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n}{n+1} + \cdots$是发散的，因为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0 。$$

但应当注意，这条件只是级数收敛的必要条件，而并不是充分条件，尽可以通项趋于零而级数是发散的。

例 4　调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$的通项

$\frac{1}{n}$当 $n \to \infty$时趋于零，但该级数发散。

证：部分和

$$s_1 = 1 ,$$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2},$$

$$s_{2^2} = s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{2},$$

$$s_{2^3} = s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{9} + \cdots + \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\right)}_{8\text{项}}$$

$$+ \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)}_{2^{n-1}\text{项}}$$

$$= 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{n\text{项}} = 1 + \frac{n}{2},$$

…………………………………………………………………………

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{n}{2}\right)=\infty$，而$s_{2^n}>1+\frac{n}{2}$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}s_{2^n}=\infty$，故调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$是发散的。

习　题

1. 试用 $\varepsilon—N$方法，写出级数收敛于其和的定义。

2. 根据级数收敛、发散的定义，判断下列级数哪些收敛？哪些发散？如果收敛，和等于多少？

(1) $1+2+3+\cdots+n+\cdots$；

(2) $ln\frac{2}{1}+ln\frac{3}{2}+\cdots+ln\frac{n+1}{n}+\cdots$；

(3) $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$；

(4) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}+\cdots$；

(5) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$；

(6) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}\surd+\sqrt{n}\right)$。

3. 判别下列级数的敛散性

(1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}+\cdots$；

(2) $\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{4}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n+1}}+\cdots$；

(3) $0.001+\sqrt{0.001}+\sqrt[3]{0.001}+\cdots+\sqrt[n]{0.001}+\cdots$；

(4) $\cos 1+\cos\frac{1}{2}+\cdots+\cos\frac{1}{n}+\cdots$。

4. 试把循环小数$0.\dot{5}$与$0.4\dot{7}$化为分数。

§6.2 敛散性的判别法

许多科学技术问题的研究中，往往需要知道一个级数是收敛的还是发散的。从原则上讲，根据定义二，我们可以用s_n的极限存在与否来判定一个级数的敛散性。但是一般说来，无穷级数的部分和的结构往往较复杂，不容易把它化成便于求极限的形式，因此，我们有必要另外寻找简便易行的判定方法。

伟大领袖毛主席教导我们：**“人们的认识，不论对于自然界方面，对于社会方面，也都是一步又一步地由低级向高级发展，即由浅入深，由片面到更多的方面”**。随着认识的深化，人们对某类无穷级数建立了一套使用方便的判别法则，下面，我们将对几种最基本的方法加以介绍。

一、正项级数

若级数（1）的通项$a_n\geq 0$（$n=1, 2, \cdots$），则称级数（1）为正项级数。显然，对于正项级数的部分和有

$$s_{n+1}=s_n+a_{n+1}\geq s_n。$$

这说明正项级数的部分和数列$\{s_n\}$是不减的，从§3.5 定理八可知：

定理一　正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛的充要条件是部分和$s_n$上有界。

很明显，若s_n上无界，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散于正无穷大。由此可知，正项级数或收敛或发散于正无穷大。

例1　判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$的敛散性。

解：由于$\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2^n}$，所以对任何自然数$n\geq 1$，都有

$$s_n<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=1-\frac{1}{2^n}<1。$$

因s_n上有界，故级数是收敛的。

根据定理一，我们可以推出一些判别正项级数收敛或发散的法则。

定理二（比较判定法）　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 是两个 正项级数，且

$$a_n \leq b_n \ (n=1, 2, \cdots)。$$

那末

(1) 从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛可以推断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$也收敛；

(2) 从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$发散可以推断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$也发散。

证：先证（1）。令s_n与σ_n分别记级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$的部分和，根据假设有

$$s_n \leq \sigma_n \ (n=1, 2, \cdots)。$$

由定理一可知当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时，σ_n 必上有界：$\sigma_n \leq M$，于是由上面的不等式可知 $s_n \leq M$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$也收敛。

其次证（2），用反证法。如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，由已经证明的结论（1），知道 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也应收敛，这与假设矛盾，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$发散。

例2　判断级数 $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$是否收敛？