偏微分方程论文丛刊

(УСПЕХ 1940)

I

中国科学院数学研究所偏微分方程组印

СОДЕРЖАНИЕ.

ОБЗОРЫ И ПЕРЕВОДЫ.

ЦИКЛ СТАТЕЙ ПО УРАВНЕНИЯМ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА.

О ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ /ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ/ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА И О СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ЭТИМ УРАВНЕНИЯМ.

/ Обзор. /

С. Н. Бернштейн и И. Г. Петровский.

§ 1. Постановка задачи. Задача Дирихле для уравнения Лапласа.

Задача Дирихле, или первая краевая задача, состоит в следующем. Пусть на границе некоторой n-мерной области G задана непрерывная функция f. Требуется найти непрерывную в области G и на ее границе функцию u, которая внутри G удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0,$$

а на границе G обращается в заданную функцию . Всюду в этой статье мы будем рассматривать только конечные области G[1].

Прежде при формулировке задачи Дирихле от функции u требовали также, чтобы она имела непрерывные или интегрируемые вторые производные. Это условие относительно вторых производных использовалось в доказательствах единственности решения задачи Дирихле, которые проводились при помощи формулы Грина. Но потом [2] было дано новое доказательство единственности решения задачи Дирихле без использования каких-либо других свойств вторых производных функций u, кроме существования этих производных. Из этого доказательства следует, в частности, что всякое непрерывное в области G решение уравнения Лапласа обязательно имеет непрерывные производные всех порядков даже в том случае, если стоящие в левой части вторые производные функции u понимать не в обычном смысле, а в смысле Шварца, т. е. как пределы при $h \to 0$ отношений

$$\frac{u(x_1,\dots,x_{k-1},x_k+h,x_{k+1}\dots x_n)+u(x_1,\dots,x_{k-1},x_k-h,x_{k+1}\dots,x_n)-2u(x_1,\dots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},\dots,x_n)}{h^2}$$

$$(k=1,\dots,n)$$

Напротив, требование непрерывности самой функции по совокупности $x_1, \dots, x_n$ весьма существенно, как показывает следующий пример. Действительная часть функции

$$e^{-\frac{1}{(x+iy)^4}}$$

на всей плоскости (x,y) имеет вторые производные и удовлетворяет уравнениям Лапласа, но она неограниченна в окрестности начала координат. Поэтому всюду в дальнейшем, говоря о решении уравнения Лапласа или какого-нибудь другого эллиптического уравнения, мы будем считать это решение непрерывным внутри G, если даже нет особой оговорки об этом.

Первое решение задачи Дирихле было дано Пуассоном для того частного случая, когда областью G служит круг. Первую попытку доказать существование решения задачи Дирихле при широких предположениях относительно границы области G сделал Риман. Он рассуждал так. Поставим следующую вариационную задачу: из семейства функций v, которые непрерывны в области G и на ее границе, причем на границе G принимают значение заданной непрерывной функции f, а внутри G имеют непрерывные первые производные, выбрать ту функцию, которая дает минимум интегралу

$$I(v) = \int_G \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx_1 \cdots dx_n .$$

Легко видеть, что уравнением Лагранжа-Эйлера для рассматриваемой вариационной задачи служит уравнение Лапласа. Поэтому если эта вариационная задача имеет решение, то оно и будет служить решением задачи Дирихле. Существование решения вариационной задачи Риман выводил из того, что множество значений интеграла $I(v)$ ограничено снизу, так как $I(v) \geq 0$, и потому имеет конечную нижнюю грань.

Как потом показал Вейерштрасс, это заключение Римана было неправильным; Вейерштрасс привел примеры подобных вариационных задач, которые не имеют решения. Кроме того, Адамар / Hadamard / [1] привел пример такой непрерывной функции, заданной на границе круга, которую невозможно распространить непрерывным образом на внутренность круга так, чтобы для получившейся функции v интеграл $I(v)$ не был расходящимся. Но ошибка Римана была одной из тех творческих ошибок, которые способствуют развитию науки. Позже она была исправлена, и на идее Римана было дано несколько новых решений задачи Дирихле. Сюда относятся работы Гильберта / Hilbert / [1] [3], Лебега / Lebesgue/ [1] , Люстерника /1/ [4] и др.

Следующей была попытка Неймана / C. Neumann / [1] [5] доказать существование решения задачи Дирихле для выпуклых областей. Но доказательство самого Неймана вполне строго только для самых простых областей. В применении же метода Неймана к более сложным областям возникают трудности такого же порядка, как и в методе Римана. В последнее время Лебег /3, 4/ точно выяснил эти трудности и внес нужные исправления в рассуждения Неймана. Развитием метода Неймана был метод интегральных уравнений [6].

Шварц предложил "альтернирующий" метод, позволяющий решать задачу Дирихле для области G, являющейся суммой таких областей G_1 и G_2, для каждой из которых мы умеем решать задачу Дирихле [7].

На совершенно новой мысли был основан метод "выметания" Пуанкаре. Этот метод был потом усовершенствован Перроном / Perron / [1] 8/, Радо / Radó / и Риссом / F. Riesz / [1]. Метод Перрона позволяет решать задачу Дирихле в самых широких предположениях относительно границы рассматриваемой области. Чтобы охарактеризовать широту этого метода, введем понятие о "регулярной" точке границы области. Мы будем точку P, принадлежащую границе области G, называть регулярной точкой, если, какова бы ни была заданная на границе G непрерывная функция f, построенная для нее по методу Перрона функция u, гармоническая внутри G и совпадающая с f на границе, непрерывна в точке P.

Для случая одномерной области задача Дирихле тривиальна: на каждом конечном интервале можно построить линейную функцию, которая на концах этого интервала принимает любые заданные значения. В этом случае обе граничные точки рассматриваемой области всегда регулярны.

У двумерной области будет регулярной всякая граничная точка P, для которой можно указать такую окрестность, в которой точку P нельзя окружить замкнутой линией, состоящей только из точек области G. С другой стороны, можно показать, что всякая изолированная точка границы области G нерегулярна.

У трехмерной области будут регулярными все те точки границы, до которых можно дотронуться извне острием конуса К, полученного вращением вокруг оси X_1 кривой

$$x_2 = f(x_1) = x_1^k,$$

где к--любое положительное число. Точнее это условие можно сформулировать так: в том пространстве $/x_1, x_2, x_3/$, где расположена область G, можно так выбрать оси координат с началом в точке Р, что все точки, лежащие внутри конуса К и имеющие положительные абсциссы x_1, не превосходящие некоторого положительного числа η, располагаются вне области G. С другой стороны, Лебегом /1/ и независимо от него П. С. Урысоном [1] было показано, что нерегулярной будет всякая точка Р границы области обладающая такой окрестностью U_P, что при соответствующем выборе координатных осей все точки этой окрестности, не принадлежащие области G, не выходят из конуса, образованного вращением вокруг оси X_1 кривой

$$x_2 = e^{-\frac{1}{x_1}}, \quad x_1 > 0.$$

То же самое будет, если эту кривую заменить кривой

$$x_2 = F(x_1) = e^{-|\ln x_1|^{1+\varepsilon}} = x_1^{|\ln x_1|\varepsilon},$$

где ε --любое положительное число.

Для n-мерного пространства при $n > 2$ роль функции $f(x_1)$ играет функция

$$\frac{x_1}{|\ln x_1|^{\frac{1}{n-3}}}, \tag{1}$$

а роль функции $F(x_1)$ играет функция

$$\frac{x_1}{|\ln x_1|^{\frac{1}{n-3}+\varepsilon}} \text{ 2)}, \tag{1'}$$

где ε --любое положительное число. Уравнения соответствующих конусов получатся, если выражения (1) или (1') приравнять $\sqrt{x_2^2+\cdots+x_n^2}$. Заметим, что свойство точки P быть регулярной или нерегулярной есть локальное свойство, оно зависит только от строения границы области G вблизи этой точки. Необходимое и достаточное условие регулярности точки P было найдено Винером 10/.

К направлению Пуанкаре-Перрона примыкает недавно появившаяся работа Каратеодори / Carathéodory / [1] о решении задачи Дирихле.

Другим направлением в решении задачи Дирихле был метод конечных разностей. Без строгих обоснований этот метод применялся уже давно 11/. Но строго он был впервые проведен для двумерного случая Л. А. Люстерником /1/. Для случая любого числа измерений этот метод был проведен Курантом / Courant /, Фридрихсом / Friedrichs / и Леви / Lewy / [1] 12/. Но эти авторы рассматривали только области с достаточно гладкой границей и притом показали лишь, что построенная ими внутри области G гармоническая функция принимает заданные на границе значения "в среднем". Используя один прием С. Н. Бернштейна /15/, а также идею Пуанкаре о "барьере", можно показать 13/, что построенная методом конечных разностей гармоническая внутри области G функция принимает значения заданной на границе непрерывной функции во всех регулярных точках границы области. Этот метод, так же как и метод Куранта, Фридрихса и Леви, переносится на решение задачи Дирихле для общих линейных уравнений эллиптического типа.

§ 2. ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБЩИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА.

Линейным уравнением второго порядка эллиптического типа называется уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x_1,\dots,x_n)u = f(x_1,\dots,x_n), \qquad (2)$$

если для каждой точки / $x_1,\dots,x_n$ / из рассматриваемой области квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1,\dots,x_n)\alpha_i\alpha_j$$

строго дефинитна, т. е. не обращается в нуль ни при каких действительных значениях $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, для которых $\sum \alpha_k^2 = 1$.

На возможность решения первой краевой задачи для эллиптического уравнения (2) оказывает существенное влияние знак коэфициента $a(x_1,\dots,x_n)$. Если этот коэфициент принимает положительное значение, то даже в случае постоянных коэфициентов уравнения /2/ первая краевая задача для этого уравнения может не иметь решения, если область G достаточно велика. Так, например, уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0 \qquad (3)$$

имеет решение

$$u_0 = \sin kx \sin ky,$$

которое обращается в нуль на границе квадрата Q со сторонами

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x = \frac{\pi}{k}, \quad y = \frac{\pi}{k}.$$

С другой стороны, легко показать, что если уравнение /3/ имеет какоенибудь решение, обращающееся в нуль на границе области, имеющей достаточно гладкую границу, и имеет там кусочно непрерывные нормальные производные то всякое другое решение u того же уравнения /3/ должно на границе области G удовлетворять соотношению

$$\int \frac{\partial u_0}{\partial n} u \, ds = 0, \qquad (4)$$

где интегрирование производится по границе области G. Соотношение /4/ получится, если произвести интегрирование по частям в левой части равенства

$$\int_G \int u_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u \right) dx\, dy = 0$$

таким образом, чтобы исчезли производные по x и y в интегралах по области G.

Из соотношения/4/следует, что первая краевая задача для уравнения/3/, когда областью G служит квадрат Q, не может иметь решения, если заданная на краю функция не удовлетворяет этому соотношению. Вообще, при решении первой краевой задачи для эллиптического уравнения /2/

случай, когда коэфициент a всюду ≤ 0, существенно отличается от случая, когда этот коэфициент в некоторых местах положителен. В первом случае задача имеет единственное решение при любой непрерывной функции, заданной на границе области G, если

1/ граница области G достаточно правильна;

2/ коэфициенты a_{ij}, a_i и функция f непрерывны вместе с их производными достаточно высоких порядков.

Если же коэфициент a принимает в некоторых точках рассматриваемой области положительные значения, то для обеспечения существования и единственности решения достаточно потребовать еще, чтобы область G была достаточно малой. Как показал В. В. Немыцкий /1/, даже для более общих уравнений /нелинейных/ здесь важно, чтобы площадь области G была достаточно малой, диаметр же ее может быть как угодно большим. Другие условия, при которых существует единственное решение задачи Дирихле для линейных эллиптических уравнений, дали Пикар / Picard / /4/, Параф / Paraf / /1/ и С. Н. Бернштейн /10, 13, 20/. Ср. также Lichtenstein, Enzyklopädie, Bd. 11, стр. 1300.

На эллиптические уравнения вида

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + au = f, \qquad (5)$$

которые называются самосопряженными, можно распространить метод Пуанкаре-Перрона, если вторые производные от коэфициентов a_{ij} удовлетворяют условиям Гельдера с положительным показателем, а функции a и f имеют непрерывные первые производные [14]. Тогда класс областей, для которых решается первая краевая задача, расширяется до таких же пределов, как в случае уравнения Лапласа: все те граничные точки, которые были регулярны при решении первой краевой задачи для уравнения Лапласа, остаются регулярными и при решении этой задачи для общего уравнения /5/ обобщенным методом Пуанкаре-Перрона. При этом, конечно, в том случае, когдакоэфициент принимает положительные значения, рассматриваемую область надо брать достаточно малой. Теоремы существования для общего линейного эллиптического уравнения /2/ при более общих условиях относительно коэфициентов доказаны Шаудером(Schauder)[2]

В последние годы появился целый ряд работ Лихтенштейна, Брело, Жиро и др., посвященных решению первой краевой задачи для эллиптических уравнений вида /2/ с коэфициентами, имеющими в некоторых точках, линиях или поверхностях разрывы.

§ 3. ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Первая краевая задача /или задача Дирихле/ для нелинейных уравнений была разрешена Пикаром /1, 2, 3/ для уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y, z).$$

Метод Пикара заключался в соединении метода последовательных приближений с соответствующим образом видоизмененным альтернирующим методом Шварца. Идея Пикара могла бы быть использована и для несколько более широких классов уравнений, в частности, и тогда, когда число независимых переменных $n \geq 3$. Другой общий метод для решения задачи Дирихле, параметрический метод, представляющий соединение метода последовательных приближений с аналитическим продолжением по некоторому параметру, был предложен и развит С. Н. Бернштейном [15].

Метод С. Н. Бернштейна тесно связан с доказанной им теоремой об аналитическом характере решений эллиптических уравнений. Он рассматравает, в первую очередь, уравнения эллиптического типа

$$F(r, s, t, p, q, z, x, y) = 0, \quad 4F'_r F'_t - F'^2_s > 0, \qquad (6)$$

где F есть аналитическая функция в данной области $S(x, y)$ при всех вещественных конечных значениях r, s, t, p, q, z, и подробно развивает свой метод для случая, когда имеет место условке

$$F'_r F'_z \leq 0, \qquad (7)$$

благодаря которому задача Дирихле для уравнения /6/ не может иметь более одного решения /если неравенство /7/ соблюдается тождественно/. Кроме того, в работах /10/ и /13/ все доватвльства ведутся в предположении, что контур С /внутри S/, для которого ставится задача Дирихле, есть окружность радиуса R. Но так как при конформном отображении на круг области, ограниченной аналитическим контуром, уравнение /6/ сохраняет свои о б щ и е **свойства**, то формулировки о б щ и х теорем остаются в силе для любых аналитических контуров. Напротив, при рассмотрении частных видов уравнений /6/ соответствующее преобразование переменных / x, y / может нарушить некоторые свойства функции F , и здесь геометрические свойства контура могут иногда играть существенную роль; этому вопросу уделено значительное внимание в работе /17/.

В основе параметрического метода С. Н. Бернштейна лежит следующая фундаментальная лемма 16/:

Если Z_0 есть аналитическое решение аналитического уравнения эллиптического типа

$$F(r, s, t, p, q, z, x, y, \alpha) = 0 \quad F'_r F'_z \leqslant 0, \qquad (8)$$

соответствующее вещественному значению параметра $\alpha = \alpha_0$, имеющее ограниченные производные первых двух порядков в замкнутой области $\overline{G}$, ограниченной аналитическим контуром С, на котором $Z_0 = \varphi(S)$ обращается в данную аналитическую функцию дуги, то существует такое положительное число ε_0 , что при всех значениях /вещественных или комплексных/ параметра α , удовлетворяющих неравенству $|\alpha - \alpha_0| \leqslant \varepsilon_0$, уравнение /8/ также допускает аналитическое решение, совпадающее с Z_0 на контуре С и имеющее ограниченные производные первых двух порядков во всей замкнутой области $\overline{G}$.

Таким образом ε_0 представляет собой нижнюю границу радиуса сходимости по степеням $\alpha - \alpha_0$ аналитической вблизи α_0 функции $z(x,y,\alpha)$, причем ε_0 зависит только от верхней границы P_0 модулей частных производных z_0 по x, y первых двух порядков. Поэтому, применяя ту же лемму к решению $z_1 = z(x,y,\alpha_1)$, где $\alpha_1 = \alpha_0 + \varepsilon_0$, у которого производные первых двух порядков будут ограничены некоторым числом P_1, мы найдем, что решение уравнения /8/ существует также и для α в промежутке $(\alpha_1, \alpha_1+\varepsilon_1)$, где $\varepsilon_1 > 0$; однако P_1 вообще может быть больше P_0, а следовательно, $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$. Для того чтобы аналитическое продолжение функции $z(x,y,\alpha)$ было возможно от α_0 до β_0, причем функция $z(x,y,\alpha)$ оставалась бы аналитической по на всем замкнутом отрезке $/\alpha_0, \beta_0/$, необходимо и достаточно, чтобы на этом отрезке радиус сходимости имел положительную нижнюю границу. Отсюда нетрудно было вывести следующую общую теорему [17]:

Т е о р е м а А. Для того чтобы первая краевая задача для данного уравнения /6/ допускала регулярное [18] решение, обращающееся в некоторую определенную аналитическую функцию дуги $\varphi(s)$ на данном аналитическом контуре C, необходимо и достаточно, чтобы в данное уравнение /6/ мог быть введен параметр α мок, чтобы оно обратилось в уравнение /8/, для которого: 1/ при всех $\alpha (0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ из предположения существования регулярного аналитического решения, соответствующего тем же краевым заданиям, вытекала равномерная ограниченность его модуля, как и модулей его частных производных по x, y первых двух порядков; 2/ при $\alpha = 1$ уравнение /8/ обращалось в данное уравнение /6/; 3/ при $\alpha = 0$ оно имело очевидное регулярное аналитическое решение.

Если уравнение /6/ квазилинейно, т. е. имеет вид

$$A(x,y,p,q)r + 2B(x,y,p,q)s + C(x,y,p,q)t = D(x,y,z,p,q)$$

$$(AC - B^2 > 0, \quad AD'_z \geqslant 0), \tag{9}$$

то с помощью метода вспомогательных функций ограниченность вторых производных выводится из ограниченности первых производных /см. примечание {4} к печатаемой в настоящем выпуске "Успехов математических наук", стр. 32--74, работе [17], поэтому в теореме А в условии 1/ фигурируют лишь первые производные.

В работе /17/ теорема А распространена на случай, когда знак F'_z произволен, но известно, что соответствующее решение уравнения /8/ простое /см. сноску 16//при всех α в промежутке $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Таким образом для уравнения /9/, в котором А, В, С могут также содержать z , С. Н. Бернштейн получает следующую теорему:

Т е о р е м а В. Если /при любом знаке D'_z / задача Дирихле ни при каком задании $f(s)$ на данном контуре С не имеет более одного регулярного решения, то задача Дирихле имеет регулярное решение при любой аналитической функции $\varphi(s)$ на этом контуре тогда и только тогда, когда: 1/ она имеет регулярное решение при неко-