奥林匹克中小学系列教材

迎春杯
数学竞赛指导讲座

第二册

主　编　钟善基　副主编　孙家钰　罗小伟

北京师范大学出版社

奥林匹克中小学系列

迎春杯数学竞赛指导讲座

第二册

主　编　钟善基
副主编　孙家钰　罗小伟

北京师范大学出版社

内容简介

本系列教材包括:《迎春杯数学竞赛指导讲座》(共四册)和《迎春杯数学竞赛试题汇编》。

本书是根据广大中、小学师生和家长的要求,在总结了历届迎春杯数学竞赛及多年中小学数学奥林匹克活动的基础上,由《中小学数学教学》报编辑部和迎春杯数学竞赛命题组组织编写的。

《指导讲座》分四册,每册配有测试题和综合测试题,每讲都配有一定数量的习题,书末附 有习题和测试题的答案或提示。本书内容丰富,重点突出,通俗易懂,深入浅出,有助于学生深入理解和巩固基础知识,拓宽知识视野,激发学习兴趣,发展学生的智力,提高学生分析问题和解决问题的能力。

《指导讲座》可作为小学生及初一学生数学课外活动教材或参考书,也可供学生家长辅导参考之用。尤其对于小学、初一学生的迎春杯数学竞赛更具有针对性和权威性,是参赛者的必读教材。

前　　言

我国自1955年举办高中学生的数学竞赛以来，至今已38年了。中间虽然中断过一个时期，但自1978年恢复了这项活动以后，可谓更加蓬勃地发展起来，不仅中国数学会继续举办高中学生的数学竞赛，而且各地的数学分会和数学教学研究会还先后举办了初中学生的数学竞赛和小学生(高年级)的数学竞赛。自1985年开始，还选派高中学生参加了历届的国际数学奥林匹克的竞赛(即IMO—International Mathematical Olympics)，并取得了优异的成绩。近年来，在国内还举行了中学生的物理、化学等学科的竞赛活动，有的也参加了国际的竞赛活动，并且也取得了好成绩。

举办高中学生数学竞赛的目的，和举办初中、小学学生数学竞赛的目的，是不会相同的：举办高中学生数学竞赛的目的，首先在于发现学习数学的素质较高的学生，经过一定的培养，成为发展我国数学研究的后备力量。其次则在于通过数学竞赛，促使更多的学生喜爱数学、学好数学，以适应社会发展对基础教育阶段的数学教育的需要。当然，举办数学竞赛的目的，也在于促进学校提高数学教学的质量。举办初中、小学生

数学竞赛的目的，则首先在于促使更多的学生喜爱数学、学好数学；与此相应的则在于促进初中、小学数学教学质量的提高。当然，发现学习数学的素质高的学生，也应考虑予以适当的培养，但这不是主要的目的。回顾十几年来全国各地举办的各级数学竞赛，不仅参加竞赛的学生取得了好成绩，而且参加竞赛的学生也在逐年增加。不仅越来越多的受到学生的重视和欢迎，而且也得到老师们和学生家长的赞扬和支持。之所以取得这样好的成效，其原因主要就在于举办数学竞赛的上述的目的是正确的；举办数学竞赛的工作是符合上述的目的的。

根据上述的目的，对高中学生数学竞赛内容（竞赛题）的选择，虽然基础在于他们在课内之所学，但不论在深度上还是在难度上，都是超出较多的。对初中、小学生数学竞赛内容的选择，虽然在深度、难度上要略高于课内之所学，但应与课内所学结合得更密切些，而且对课内所学的掌握也适当地进行竞赛。

这样，不论是准备参加哪一级数学竞赛的学生，在参加竞赛前，都将作一定的准备。或自己搜集有关的资料进行准备；或求教于老师，请老师作准备辅导。这样地准备，虽然确能取得一定的成效，但总以没有一本教材性的书籍，即没有一本为学生准备参加数学竞赛用的、既讲授一些必要的数学知识，又对参加竞赛的准备进行指导的书籍，感到遗憾。

北京师范大学出版社有鉴于此，为了帮助各竞赛学科的参加者作好竞赛前的准备，于 1992 年秋决定出版《奥林匹克中小学系列教材》，邀请各学科的水平高，并在辅导学生方面有丰富经验的教师，分头编写各学科的《奥林匹克中小学系列教材》。

由《中小学数学教学报》编辑部和北京教育局教研部数学教研室于1985年开始，先后陆续地举办了每年一度的《迎春杯小学数学竞赛》和《迎春杯初中一年级数学竞赛》。于1991年，在举办过7届竞赛经验的基础上，还编订了《小学数学竞赛大纲(试行草案)》，并且连同历年来对学生进行参加竞赛辅导使用过的材料一起编辑成册，出版了《小学迎春杯数学竞赛指导讲座》。1992年秋，更计划在这部《指导讲座》的基础上，予以充实和修改，以便成为更好的一部供小学高年级学生用来准备参加数学竞赛适用的书籍。时逢其会，北京师范大学出版社乃与《指导讲座》的编者商定，将这项充实、修改计划纳入《奥林匹克中小学系列教材》的出版计划，这样，便由北京师范大学出版社作为《奥林匹克中小学系列教材》的一部份出版了。

新版迎春杯数学竞赛《指导讲座》和《试题汇编》运用于小学和初一年级。是以在北京市举办小学数学竞赛的经验为主而编写的，不敢说也适合兄弟省、区、市的实际情况。因此希望广大的读者，老师们、同学们多提宝贵的意见和建议。

《奥林匹克中小学系列教材——初中数学》虽然是在近年来各地举办竞赛的经验基础上，特别是在举办《华罗庚金杯数学竞赛》经验的基础上编写的，但经验不多，难免挂一漏万。因此也希望广大的读者，老师们、同学们多提宝贵的意见和建议。

《奥林匹克中小学系列教材——高中数学》是在较长时期的举办高中学生数学竞赛经验的基础上编写的。但编写成教材性的书籍还没有经验，这次还是创举。因此也希望广大的读者，老师们、同学们多提宝贵的意见和建议。

我们的水平有限，经验不多，编写出的这三部教材中，错误、不妥处在所难免，深切盼望广大读者指出错误、不妥之处，以便我们及时修正，使得教材日臻完善。

《奥林匹克中小学系列教材》——

《小学数学》、《初中数学》、《高中数学》

编者谨识

1993 年 5 月 16 日

目　录

第一讲　质数与合数(一)

质数与合数概念是数学运算、算式化简以及分析一些数字问题时常用到的。

如果一个比 1 大的自然数只有两个约数:1 和本身,那么这个自然数就叫质数。质数也叫素数。例如:43＝1×43

43 只有 1 和 43 两个约数,所以 43 是质数。100 以内的质数是极为常用的,它们是

2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97

在自然数中,如果除了 1 和本身两个约数,还有其它的约数,这个自然数就叫合数。例如:6 的约数有 1、2、3、6,那么 6 是合数。合数也叫复合数或合成数。应特别注意 1 既不是素数也不是合数。

例 1　求出 924 的质数约数的和。

解:我们要充分利用数字的整除特征,运用短除的形式,把 924 作质约数分解。

$$\begin{array}{r|l} 2 & 924 \\ \hline 2 & 462 \\ \hline 3 & 231 \\ \hline 7 & 77 \\ \hline & 11 \end{array}$$

924＝11×2×2×3×7

质约数有：11、2、3、7，其和为 $11+2+3+7=23$。

例2 求出 852 的约数。

分析：我们首先可把 852 的质数约数求出来进而求出全部约数。注意：1，852 也是约数。

解：$852=2\times2\times3\times71$

约数有 1，2，3，4，6，12，71，142，213，284，426，852 共 12 个约数。

一般地：对一个自然数作质约数分解（也称质因数分解）

$A=a_1^{n_1}\times a_1^{n_2}\cdots\cdots a_m^{n_m}$（其中 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 是不同的质数，$n_1,n_2,\cdots,n_m$ 都是正整数）

A 的约数个数有 $(n_1+1)\times(n_2+1)\times\cdots\cdots\times(n_m+1)$ 个。

例3 有两个两位数的积是 3927，这两个数的和是几？

解：首先将这个积做质因数分解

$$3927=3\times7\times11\times17$$

把这四个质因数适当搭配可以得到这两个两位数是

$3\times17=51$，$7\times11=77$。

所以两数的和是 $51+77=128$。

例4 比 $\frac{1}{2}$ 大比 5 小，并且分母是 13 的最简分数有多少个？

分析：我们可以把分母是 13 的分数按照规定的范围先列出来，再将其中分子是 13 的倍数的那些分数去掉。

解：$\frac{1}{2}=\frac{6}{12}<\frac{7}{13}$　$5=\frac{65}{13}$　$\frac{7}{13}\leqslant x<\frac{65}{13}$

分子应在 7 至 64 这 58 个自然数中选择，因为 13 是质数，去掉 13，26，39，52，用余下的 54 个自然数做分子，可以得到 54 个满足条件的最简分数。

例 5 有八个数 693,35,48,28,175,108,363,165 把它们分为两组,使两组数的积相等。

分析:要使两组数的乘积相等,那么两组中相同质因数的个数一定相等。首先,将它们分解质因数。

$693=3^2\times7\times11$　　$175=5^2\times7$

$28=2^2\times7$　　$35=5\times7$

$108=2^2\times3^3$　　$363=11^2\times3$

$165=3\times5\times11$　　$48=3\times2^4$

为了观察得清楚,我们将他们放在一个表格中:

	2	3	5	7	11	组别
693		2		1	1	*A*
175			2	1		*B*
35			1	1		*A*
28	2			1		*B*
108	2	3				*B*
363		1			2	*B*
165		1	1		1	*A*
48	4	1				*A*

这 8 个数的分组情况

一组是:693,35,165,48

另一组是:175,28,108,363

例 6 要使四个数的积

$135\times1925\times486\times($　　$)$结果的最后五位都是零，括号中的数最小填入几？

分析：要使乘积结果的最后五位是零，就应当使这四个数中保证有五对 2 和 5 的因子。

解：首先将前面三个数字分解质因数：

$135=3^3\times5$

$1925=5\times5\times7\times11$

$486=2\times3^5$

它们当中共有三个 5，一个 2。应再补上两个 5，四个 2，括号中的数最少应当取 $5\times5\times2\times2\times2\times2=400$。

例 7　合数 3570，有很多的约数，其中最小的三位约数是多少？

分析：如果我们一味地把 3570 的质因子凑成满足条件的三位数，也是可以的。还可将三位数由小到大逐个分解质因数，看其因子是否都是 3570 的因子即可。

$3570=2\times3\times5\times7\times17$

三位数从小到大：100，101，102，103……

$100=5^2\times2^2$　显然 100 中因子里 5 和 2 各多一个，100 不是 3570 约数，

101 是质数，也不是 3570 的约数，

$102=2\times3\times17$　2，3，17 都是 3570 的质因子，所以 102 是 3570 最小的三位约数。

例 8　九个连续的自然数，它们都大于 80，那么其中质数最多有几个？

分析：我们用不同的条件做筛子，逐步加强条件的限制，使其结果明显化。

由于大于 2 的质数一定是奇数，而大于 80 的九个连续自然数至多只有 5 个奇数，所以质数的个数不大于 5 个。

我们知道：在三个连续的奇数中至少有一个数是 3 的倍数。所以这五个连续奇数中至少有一个是合数。因此，质数至多只有四个。

如：101—109 中，质数有 101，103，107，109

例 9 把 33 拆成若干个不同质数之和，如果要使这些质数的积最大，问这几个质数分别是多少？

分析：首先假设可以分成五个质数之和（分成 6 个以上质数之和不可能）：33 是奇数，因此五个质数中不能有 2（否则和是偶数），取最小连续五个奇质数 3，5，7，11，13 的和是 39 超过 33。所以分成五个是不可能的。

假设 33 可以分成四个质数之和，33 是奇数，因此四个数中一定有一个是偶质数 2，即其余三个的和是 31，显然可以找出其余三个分别是：3，5，23　　3，11，17　　7，11，13　　5，7，19　　三数乘积最大的是 $7\times11\times13=1001$　　假设 33 可分成三个质数和，只可能是

3，13，17；

3，11，19；

3，7，23；

5，11，17；

乘积均小于 $2\times7\times11\times13$，33 若分为两个质数之和，只可能是 2 和 31，乘积仅为 62。故应将 33 写成四个质数：2，7，11，13 的和。

例 10 A,B,C 是三个自然数，已知：$[A,B]=42$，$[B,C]=66$，$(A,C)=3$，求所有满足上述条件的 A,B,C。

说明:$[A,B]$表示 A,B 的最小公倍数,(A,B)表示 A,B 两数的最大公约数。

解:由$[A,B]=42=2\times3\times7$ 可知 A,B 中只含有 2,3,7 的质因子。

由$[B,C]=66=2\times3\times11$ 可知 B,C 中只含有 2,3,11 的质因子。

因此,B 的因子只可能取 2,3;

又因为$(A,C)=3$,A,C 都含有 3 的因子,且 A,C 不同时含有 2 的因子,这样 B 中一定含有 2 的因子。

下面我们排一个表格,将 A,B,C 的数值写进去。

A	3×7	3×7	$2\times3\times7$	3×7	3×7	$2\times3\times7$
B	2	2	2	2×3	2×3	2×3
C	3×11	$2\times3\times11$	3×11	3×11	$2\times3\times11$	3×11

可以看出,满足条件的 A,B,C 有六组。

由于一个整数的质因数分解是唯一的,这往往就成为我们进一步分析问题的一个理想的出发点。

习 题 一

1. 把下面的整数分解质因数:

   1001,546,1993

2. 由 1、2、3、4、5、6、7、8、9 这九个数字组成的九位数是质数吗?

3. 把下列八个数,分为两组,每组四个数,使两组数的积相等,问如何分?

   14,33,35,75,39,30,143,169

4. 自然数 199119921993，除本身之外最大的约数是几？

5. 要使 $975 \times 935 \times 972 \times (\quad)$ 的积，最后四位都是“零”，括号中最小填入几？

6. 200 除以一个两位数质数，余数是 14，求这个两位数。

第二讲　简单几何图形的面积计算

一、基本概念

（一）　几个基本概念

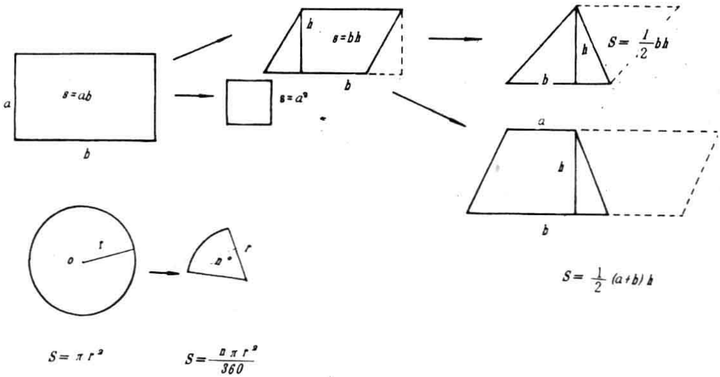
1.　平面图形　图形上所有的点都在同一平面内的图形，叫平面图形。如三角形、长方形、正方形、平行四边形、梯形、圆、扇形等。

2.　面积　平面图形所围的平面部分的大小，叫这个图形的面积。

3.　全等形　如果两个平面图形叠合在一起，能够处处重合，便称这两个图形为全等形。

4.　等积形　面积相等的两个图形，叫等积形、全等形一定是等积形。

（二）　常用的面积公式及其联系图



（三） 几个重要结论

如果两个三角形的底和高分别相等，那么这两个三角形的面积相等。

如果两个三角形的底（或高）相等，那么它们的面积之比，等于它们高（或底）的比。

二、几种常用的求面积方法

（一） 利用公式计算面积