

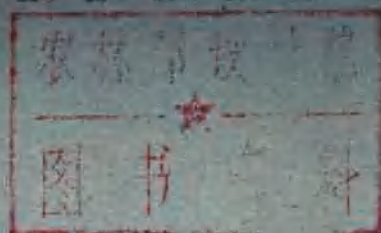
编	90-277
张	
册数	74.1

内部资料

技术情报

(73)第12号

承受对称荷载的圆锥形旋转壳体分析

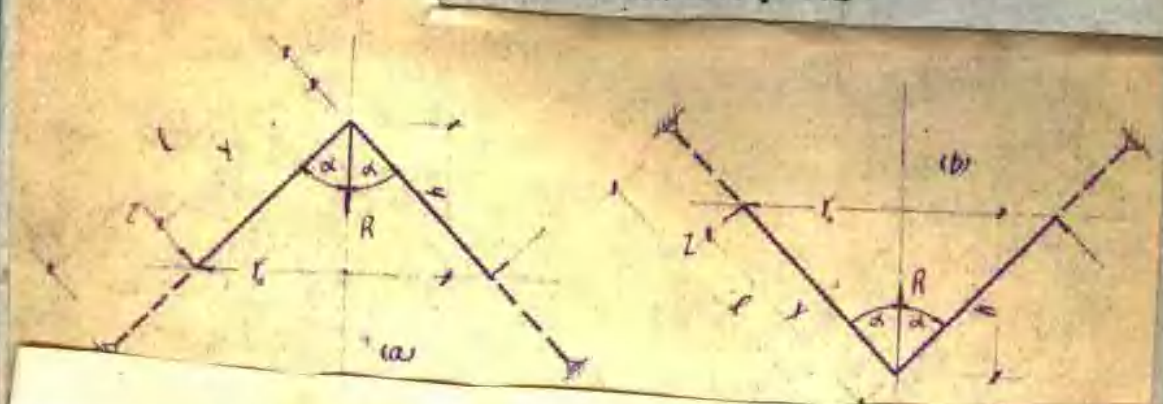


吉林省给水排水勘察设计院

一九七三年十二月

承受对称荷载的圆锥形旋转壳体分析

本文给出了等厚圆锥旋转壳体，在对称荷载作用下的近似解，及在沿边缘均布单位力和力矩作用下的变形和应力表达式。这些近似解可用来求边缘约束力的值，及确定这些约束力对薄膜应力的影响，并有足够的精度。文中例题对近似解和精确解进行了对比。



圆锥形旋转壳体在工程结构中已被广泛应用，作为底部或顶部构件，如在圆形水池和容器中作为一个组成部分。它们承受对称分布荷载时，产生的几乎全是法向力（薄膜力），与平板相比，壳体中弯矩很小，并仅局限在接近边缘的地方。

壳体的结构情况和应力状态受很多因素的影响，纯薄膜应力状态是最理想的应力状态，但是这仅当壳体的曲率半径、厚度及荷载是连续的没有任何突然变化，而且支撑壳体的力面与中面相切时才是可能的。

为满足最后这个条件，支承型式应使边缘能在母线平面内转动并可沿中面法线方向移动。（如图1所示）实际上，圆锥形壳体总是与其他构件相接，如其边缘与圆柱形壁，圆形板或环形梁连接着，这样

RWT/40/18 = 1 =

壳体边缘的薄膜应力变与附近构件中的应变相差很大，为满足变形连续条件，设计中必须考虑弯矩和剪力。

壳体、弯矩的大小和作用范围，受边缘约束程度，壳厚与直径之比及顶角的变化控制的，可是，一般所采用的壳体，厚度是很小的，以致即使不大的弯矩也会产生相当大的应力，因此，一般来说，薄膜理论分析圆锥壳体是不够的，还需要用有矩理论来补充。

分 析 方 法

通常采用的分析方法，是将壳体从任意其他构件或超静定支撑系统中分离出来，计算其静定应力总和以及在壳面荷载作用下的边缘变形。荷载的突然变化增加壳体的超静定性，严格的情况，必须在变化处沿着平行圆作增加切面。每一个切面决定由荷载形成的几何中断。这些缝可以用壳体边缘和附近构件边缘的位移和角位移的代数和求得。

考虑到静不定应力组合作用的必须存在以保持连续性，以相同和相反的单位力偶和剪力作用于每个切面，所形成的缝，可以与分布应力一样求得。最后决定荷载作用下形成缝的相同和相反的力偶和剪力的实际值，壳体内应力分布可以用上述数值的薄膜应力值求得。

符 号

a, a_1, a_2 分别为顶点到中间截面的距离与顶点到圆锥体大端距离和小端距离之比。

- D : 壳体抗弯刚度 ($D = \frac{E t^3}{12(1-\mu^2)}$)
- E : 弹性模量。
- h, h_1 : 壳体轴线距离。
- l, l_1 : 分别为圆锥大端和小端到顶点的距离。
- M_θ, M_φ : 分别为沿母线和垂直于母线的截面上, 单位长度的弯矩, 壳体外面受拉为正。
- N_θ, N_φ : 分别为沿母线和垂直于母线的截面上, 单位长度的中面力(直接力), 正号表示受拉。
- Q_φ : 与母线垂直的截面上与 Z 轴平行的单位长度剪力。
- r_0 : 圆平面半径。
- t : 壳体厚度。
- U : 应力函数。
- w : 圆锥中面的垂直位移。
- u, Z : 分别为母线方向和垂直于圆锥面的座标轴。
- α : 圆锥的顶角一半。
- Δ : 水平圆平面的位移。
- δ_{10}, δ_{20} : 分别为在所取出的构件上仅由外荷载作用下, 水平圆平面上的边缘位移和 Z 轴平面上边缘转角。
- δ_{11}, δ_{21} : 分别由于作用在边缘的单位力 X , 产生的水平位移和 Z 轴平面内的边缘转角。

$\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{21}, \delta_{22}$: 分别由于作用在边缘的单位力矩 X_1 产生的水平位移和 Z 轴平面内的边缘转角。

η_1, η_2 : 无因次坐标轴。

λ_1, λ_2 : 参数。

ν : 母线平面内的转角。

薄 膜 解

薄膜力和变形的表达式可由力的平衡方程式求得。作用在中面的薄膜力为：

$$N_y = -\frac{R}{2\pi\gamma_0 C_0 S\alpha} ; \quad N_\theta = -Z\gamma_0 \sec \alpha \quad \dots(1)$$

其中 R 是顶点到距顶点为 y 的水平圆平面之间壳体上作用的外荷载垂直分量的合力， Z 是计算截面以上壳体表面单位面积处荷载的垂直分量。

R 和 Z 的正方向见图 1

水平位移 Δ 和转角 ν 为

$$\Delta = \frac{y \sin \alpha}{Et} (N_\theta - \mu N_y) ; \quad \dots(2)$$

$$\nu = \pm \frac{\tan \alpha}{Et} \left[(1+\mu)(N_y - N_\theta) - y \frac{d}{dy} (N_\theta - \mu N_y) \right]$$

上面和下面符号分别在图 1 a 和 1 b 中表示。

考虑到作用荷载的特殊情况，设 $\mu = 0$ 。表1列出通常遇到的荷载性质的 Δ 和 ν 值。

圆锥壳体的弯矩

在沿旋转壳体边缘的均布力和力矩作用下，弯矩一般公式已被许多作者推导出来了，这些公式可以方便地应用于等厚圆锥壳体的一般情况，引入二个未知函数 U 和 ν 得到二个二次线性微分方程：

$$\left. \begin{aligned} y \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{dU}{dy} - \frac{U}{y} &= Et \nu \cot^2 \alpha \\ y \frac{d^2 \nu}{dy^2} + \frac{d\nu}{dy} - \frac{\nu}{y} &= -\frac{U}{D} \end{aligned} \right\} \dots\dots(3)$$

式中： $U = yQ_y$ 及 $\nu = \frac{dw}{dy}$

平行圆的半径方向的应力值和形变 Δ 用函数 U 和 ν 表示为：

$$\left. \begin{aligned} N_y &= -\frac{U}{y} \tan \alpha; \quad N_\theta = -\frac{dU}{dy} \tan \alpha \\ M_y &= -D \left(\frac{d\nu}{dy} + \frac{\mu \nu}{y} \right); \quad M_\theta = -D \left(\frac{\nu}{y} + \mu \frac{d\nu}{dy} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots(4)$$

$$\Delta = -\frac{y \sin \alpha \tan \alpha}{Et} \left(\frac{dU}{dy} - \frac{\mu U}{y} \right)$$

• 见例题，S. P. 铁木辛柯“板与壳”，1940，
PP. 375~9.

引入无因次变量 η 代替 y 及辅助函数 U^* 和 γ^* 代替 U 和 γ 后, 方程式(3)变得简单了, 当考虑边缘 ($y=l$) 的情况有:

$$\eta = \frac{2l}{\lambda} (1 - a^{\frac{1}{2}})$$

$$U^* = U \left(l^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2l}{\lambda} - \eta \right) \right)^{\frac{1}{2}} ; \gamma^* = \gamma \left(l^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2l}{\lambda} - \eta \right) \right)^{\frac{1}{2}} \dots (5)$$

$$\text{式中: } \lambda = \left(\frac{l^2 t^3 \tan^2 \alpha}{3(1-\mu^2)} \right)^{\frac{1}{3}} \quad a = \frac{y}{l}$$

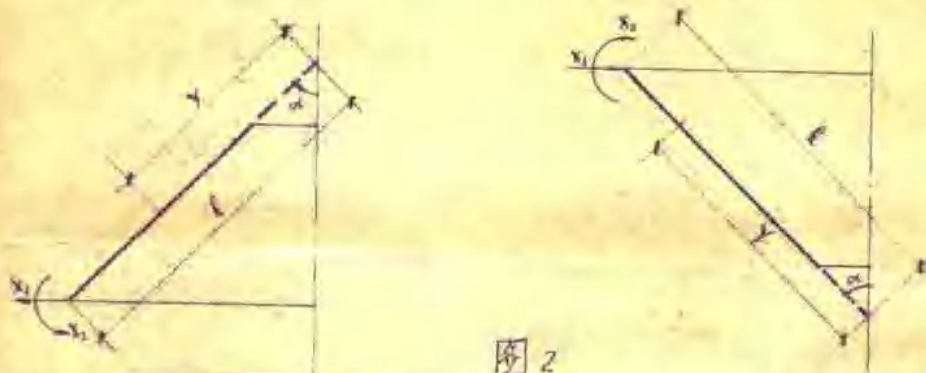


图 2

辅助函数对新变量的一阶导数为另, 方程(3)变为:

$$\frac{d^2 U^*}{d\eta^2} = \frac{15 t \tan \alpha}{16 a l \sqrt{3(1-\mu^2)}} \quad U^* = \frac{\lambda^2 E t}{l \tan^2 \alpha} \gamma^* \quad \} (6)$$

$$\frac{d^2 \gamma^*}{d\eta^2} = \frac{15 t \tan \alpha}{16 a l \sqrt{3(1-\mu^2)}} \quad \gamma^* = \frac{\lambda^2}{D l} U^*$$

参考“Geckeler”方法可使方程进一步简化, 此法是略

去较小项并以上述方程组的非齐次解为基础的。

D 实际上，壳体通常是较薄的，并且半顶角 α 一般不大于 $\pi/2$ ，所以均匀作用在边缘的力和力矩的影响，随距边缘的距离增加而很快地衰减，因此方程(6)表示距顶点适当大的距离时的情况，方程组的左边，函数 U^* 和 γ^* 的对应项与函数的二阶导数相比是很小的。概括说，对工程上所采用的大部分圆锥壳体，可仅保留方程(6)左边的二阶导数，得：

$$\frac{d^2 U^*}{d\eta^2} = \frac{\lambda^2 E t}{l \tan^2 \alpha} \gamma^* ; \quad \frac{d^2 \gamma^*}{d\eta^2} = - \frac{\lambda^2}{D l} U^* \quad \dots (7)$$

消去 U^* 即可得到下面包含 U^* 的方程式：

$$\frac{d^4 U^*}{d\eta^4} + 4 U^* = 0 \quad \dots (8)$$

于是，求沿边缘均匀分布的力矩和力产生的圆锥壳的弯矩问题变为求一元四阶微分方程的积分问题。

完整圆锥：求完整圆锥时，若 $l \geq \pi \lambda$ ，则壳中二个边界条件已经满足 方程(8)的解仅包含二个积分常数。

$$U^* = e^{-\eta} (A_1 \cos \eta + A_2 \sin \eta) \quad \dots (9)$$

第二个辅助函数可以方程(7)的第一式中求得：

$$\gamma^* = \frac{2 l \tan^2 \alpha}{\lambda^2 E t} e^{-\eta} (A_1 \sin \eta - A_2 \cos \eta) \quad \dots (10)$$

= 7 =

利用关系式(4)和(5)辅助函数 U^* 和 γ^* 公式求出中面上应力和变形公式，同样，略去较小项并引入符号 $\xi = \frac{2l}{\lambda} \sqrt{\frac{a}{\lambda}}$ 和新的常数 C_1 和 C_2 在边缘 $y = l$ 处：

$$\Delta = \frac{\xi \sin \alpha \tan \alpha}{2lEt} e^{-\gamma} [C_1 (\sin \gamma + \cos \gamma) + C_2 (\sin \gamma - \cos \gamma)]$$

$$\gamma = \mp \frac{2 \tan^2 \alpha}{\lambda^2 \xi Et} e^{-\gamma} (C_1 \sin \gamma - C_2 \cos \gamma)$$

$$N_y = \frac{4 \tan \alpha}{\lambda^2 \xi^2 \xi} e^{-\gamma} (C_1 \cos \gamma + C_2 \sin \gamma)$$

$$N_\theta = \frac{2 \tan \alpha}{\lambda^2 \xi \xi} e^{-\gamma} [C_1 (\sin \gamma + \cos \gamma) + C_2 (\sin \gamma - \cos \gamma)]$$

$$M_y = \frac{1}{l \xi \xi} e^{-\gamma} [C_1 (\cos \gamma - \sin \gamma) + C_2 (\sin \gamma + \cos \gamma)]$$

$$M_\theta = \mu M_y$$

$$Q_y = N_y \cot \alpha$$

上式中下面的符号用于倒圆锥。

截头圆锥~在截头圆锥的情况中，如果截园之间的距离是大的，那末边缘效应是很小的，或不致影响到壳体另一边，若

$$l \gg \frac{\pi l}{1 \left(\frac{a}{\lambda} \right)_{y=l}}, \quad \text{假定边缘之间不存在互相影响, 则单独研究}$$

每一个边缘是足够精确的。

对完正圆锥推出的公式可应用到截头圆锥大头边缘上，可是小头边缘必须单独地考虑，实用上，可以利用下列关系：

$$\eta_1 = \frac{2l_1}{\lambda_1} (a_1^{\frac{1}{2}} - 1)$$

$$U_1^* = U(l_1^{\frac{1}{2}}(\eta_1 - \frac{2l_1}{\lambda_1}))^{\frac{1}{2}}; V = v(l_1^{\frac{1}{2}}(\eta_1 - \frac{2l_1}{\lambda_1}))^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

式中： $\lambda_1 = \left(\frac{l_1^2 t^2 \tan^2 \alpha}{3(1-\mu)} \right)^{\frac{1}{4}} \quad a_1 = \frac{y}{l_1}$

与前同样的方法，求得四阶微分方程：

$$\frac{d^4 U_1^*}{d\eta_1^4} + 4 U_1^* = 0 \quad (13)$$

符合边缘之间距离大的假定，二个边界条件即自行满足，方程(13)的解包含二个常数：

$$U_1^* = e^{-\eta_1} (A_1 \cos \eta_1 + A_2 \sin \eta_1) \quad (14)$$

第二个辅助函数是：

$$v_1^* = \frac{2l_1 \tan^2 \alpha}{\lambda_1^2 E t} e^{-\eta_1} (A_3 \sin \eta_1 - A_4 \cos \eta_1) \quad (15)$$

条件(4)和(12)表示中面应力和变形，略去较小项并引入符号：

$$\epsilon_1 = \frac{2l_1}{\lambda_1} a_1 \quad \text{和新的常数 } C_3 \text{ 和 } C_4 \text{，截头圆锥小头边缘的应力和}$$

变形为：

$$\Delta = - \frac{\xi_1 \sin \alpha \tan \alpha}{2l_1 E t} e^{-\gamma_1} (C_1 \cos \gamma_1 + \cos \gamma_1) + C_2 (\sin \gamma_1 - \cos \gamma_1)$$

$$\gamma = \frac{2 \tan^2 \alpha}{\lambda_1^2 \xi_1 E t} e^{-\gamma_1} (C_1 \sin \gamma_1 - C_2 \cos \gamma_1)$$

$$N_y = \frac{4 \tan \alpha}{\lambda_1^2 \xi_1^2 \xi_1} e^{-\gamma_1} (C_1 \cos \gamma_1 + C_2 \sin \gamma_1)$$

$$N_\theta = - \frac{2 \tan \alpha}{\lambda_1^2 \xi_1^2 \xi_1} e^{-\gamma_1} (C_1 (\sin \gamma_1 + \cos \gamma_1) + C_2 (\sin \gamma_1 - \cos \gamma_1))$$

$$M_y = \frac{1}{l_1 \xi_1^2 \xi_1} e^{-\gamma_1} (C_1 (\sin \gamma_1 - \cos \gamma_1) - C_2 (\sin \gamma_1 + \cos \gamma_1))$$

$$M_\theta = \mu M_y$$

$$Q_y = N_y \cot \alpha$$

上式中下面的符号用于倒圆锥。

单 位 力 的 影 响

公式(11)和(16)可用来求沿壳体边缘均匀分布的单位力和力矩的影响作用截头圆锥大头边缘的单位力：

单位力X，一边界条件为 $[N_y]_{y=l} = \pm \sin \alpha$ 及 $[M_y]_{y=l} = 0$ ，因此由公式(11)得：

$$Q_1 = -Q_2 = \pm \frac{2l \cos \alpha}{\lambda}, \quad \Delta = \pm \frac{\lambda^2 \cos^2 \alpha}{2D} a^{\frac{1}{2}} e^{-\eta \cos \eta}$$

$$\lambda = \frac{\lambda^2}{2D} a^{-\frac{1}{2}} e^{-\eta} \cos \alpha (\sin \eta + \cos \eta)$$

$$N_y = a^{-\frac{1}{2}} e^{-\eta} \sin \alpha (\cos \eta - \sin \eta)$$

$$N_\theta = \pm \frac{2l}{\lambda} a^{-\frac{3}{2}} e^{-\eta} \sin \alpha \cos \eta$$

$$M_y = \pm \lambda a^{-\frac{3}{2}} e^{-\eta} \cos \alpha \sin \eta$$

$$Q_y = N_y \cot \alpha$$

$$\delta_{11} = \mp \frac{\lambda^2 \cos^2 \alpha}{2D}; \quad \delta_{21} = \frac{\lambda^2 \cos \alpha}{2D}$$

上、下符号分别与图 2 a 和图 2 b 有系

单位力矩 X_2 边界条件为 $(N_y)_{y=l} = 0$ $(M_y)_{y=l} = 1$

利用公式 (11) 得:

$$C_1 = 0, C_2 = \frac{2}{\lambda^2} \frac{2l \cdot \frac{1}{2}}{R}$$

$$\Delta = \frac{\lambda^2 \cos \alpha}{2D} a^{\frac{1}{2}} e^{-\eta} (\sin \eta - \cos \eta)$$

$$\gamma = \pm \frac{\lambda}{D} a^{-\frac{1}{2}} e^{-\eta} \cos \eta$$

$$N_y = \frac{2}{\lambda} a^{-\frac{3}{2}} e^{-\eta} \tan \alpha \sin \eta$$

$$N_\theta = \frac{2l}{\lambda^2} a^{-\frac{3}{2}} e^{-\eta} \tan \alpha (\sin \eta - \cos \eta)$$

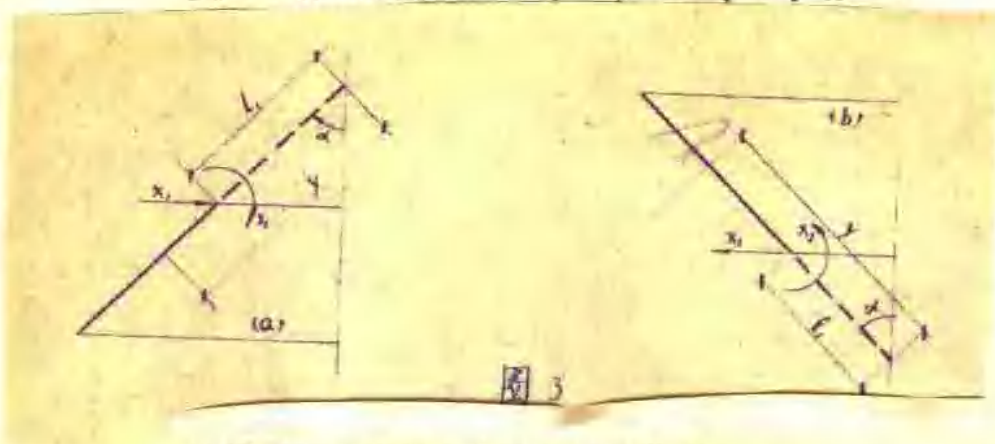
$$M_y = a^{-\frac{1}{2}} \cdot -\gamma (\sin \gamma + \cos \gamma)$$

$$Q_y = N_y \cot \alpha$$

(18)

$$\delta_{1,2} = \frac{\lambda^2 \cos \alpha}{2D} ; \delta_{2,2} = \pm \frac{\lambda}{D}$$

上、下符号分别与图 2 (a) 和 2 (b) 有关。



作用在截头圆锥小头边缘的单位力。

单位力 X ，~边界条件为 $[N_y]_{y=l} = \pm \sin \alpha$

$[M_y]_{y=l} = 0$ ，因此利用公式 (16) 得：

$$C_1 = -C_2 = \pm \frac{2l^{\frac{1}{2}} \cos \alpha}{\lambda}$$

$$\Delta = \mp \frac{\lambda^{\frac{1}{2}} \cos^2 \alpha}{2D} a^{\frac{1}{2}} e^{-\gamma} \cos \gamma,$$

$$\gamma = -\frac{\lambda^{\frac{1}{2}}}{2D} a^{\frac{1}{2}} e^{-\gamma} \cos \alpha (\sin \gamma + \cos \gamma)$$

$$N_y = \pm a^{-\frac{1}{2}} e^{-\gamma} \sin \alpha (\cos \gamma - \sin \gamma)$$

$$N_\theta = \frac{2l_1}{\lambda_1} a_1^{-\frac{1}{2}} e^{-\eta_1} \sin \alpha \cos \eta_1$$

$$M_y = \pm \lambda_1 a_1^{-\frac{1}{2}} e^{-\eta_1} \cos \alpha \sin \eta_1 \quad \dots\dots \} (1)$$

$$Q_y = N_y \cot \alpha$$

$$\delta_{11} = \frac{\lambda_1^2 \cos^2 \alpha}{2D} \quad ; \quad \delta_{21} = -\frac{\lambda_1^2 \cos \alpha}{2D}$$

上、下符号分别与图 3 a 和 3 b 有关。

单位力矩 $X_2 \sim$ 边界条件为 $[N_y]_{y=l_1} = 0$ 及 $[M_y]_{y=l_1} = 1$

利用公式 (16) 得：

$$C_1 = 0, C_2 = -\frac{2}{\lambda_1^2} \frac{2l_1^{\frac{1}{2}}}{\lambda_1^{\frac{1}{2}}},$$

$$\Delta = \frac{\lambda_1^2 \cos \alpha}{2D} a_1^{\frac{1}{2}} e^{-\eta_1} (\sin \eta_1 - \cos \eta_1)$$

$$\gamma = \frac{\lambda_1}{D} a_1^{-\frac{1}{2}} e^{-\eta_1} \cos \eta_1$$

$$N_y = -\frac{2}{\lambda_1} a_1^{-\frac{1}{2}} e^{-\eta_1} \tan \alpha \sin \eta_1$$

$$N_\theta = \frac{2l_1}{\lambda_1} a_1^{-\frac{1}{2}} e^{-\eta_1} \tan \alpha (\sin \eta_1 - \cos \eta_1)$$

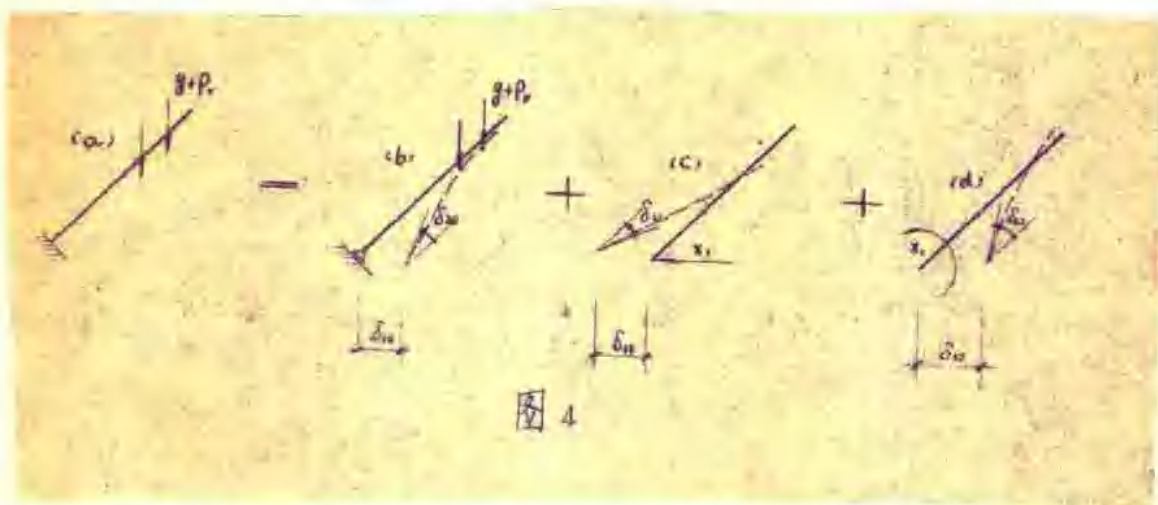
$$M_y = \alpha, -\frac{1}{2} \cdot \gamma, (\sin \gamma, +\cos \gamma,)$$

$$Q_y = N_y \cot \alpha$$

(20)

$$\delta_{12} = -\frac{\lambda_1^2 \cos \alpha}{2D} ; \quad \delta_{22} = \pm \frac{\lambda_1}{D}$$

上、下符号分别与图 3 a 和 3 b 有关。



例 题

用例题来说明上述理论在壳体设计中的应用，设有一圆锥壳体厚度为 6 mm 底部直径为 80 mm 顶角一半为 60°，壳体表面自重为 $q = 75 \text{ lb/ft}^2$ 另外还承受水平投影每平方呎的垂直荷载为 $P_v = 250 \text{ lb}$ ，假定壳体边缘为完全固定。

在壳体表面垂直的平面内引入滚动支承，将除去二个未知边缘约束力 X_1 和 X_2 ，为图 4 b 所示，从表 1 的情况 I 和 IV 查得薄膜力和边缘变形为：

$$N_y = -5884 ; N_\theta = -874.54 ;$$

$$\delta_{10} = \Delta_{y=l} = 1616 \frac{10^3}{E} ; \delta_{10} = \gamma_{y=l} = 94.3 \times \frac{10^3}{E}$$

壳体长度 $l = 46.19 \text{ ft}$, 并假设 $\mu = 0$

$$D = \frac{0.5^3 E}{12} = 0.01042E \text{ 及}$$

$$\lambda = \left(\frac{46.19 \times 0.5 \times \tan 60^\circ}{8} \right) = 4.8056$$

由边缘力和力矩产生的位移和转角由式 (17) (18) 求得，
在单位力 X 作用下：

$$\delta_{11} = \frac{4.8056^2 \cos^2 60^\circ}{2 \times 0.01042E} = 1.8314 \frac{10^3}{E}$$

$$\delta_{21} = \frac{4.8056^2 \times \cos 60^\circ}{2 \times 0.01042E} = 0.5541 \frac{10^3}{E}$$

在单位力矩 X_1 作用下，

$$\delta_{11} = \delta_{12} = -0.5541 \frac{10^3}{E}$$

$$\delta_{22} = \frac{4.8056}{0.01042E} = 0.4612 \frac{10^3}{E}$$

由于边缘固定，壳体边缘的实际位移和转角必然为另，因此（见图4）

$$1.8814X_1 - 0.5541X_2 - 1618 = 0$$

$$-0.5541X_1 + 0.4612X_2 + 94.8 = 0$$

$$\text{解得 } X_1 = 2260 \frac{\text{lb}}{\text{ft}}, \quad X_2 = 2510 \frac{\text{lb} \cdot \text{ft}}{\text{ft}}$$

将 X_1 和 X_2 的值代入式（17）和（18），壳体内应力值为：

$$N_y = 148e^{-\frac{1}{2}} e^{-\eta} (18.28 \cos \eta - 81 \sin \eta)$$

$$N_\theta = 17890e^{-\frac{1}{2}} e^{-\eta} (1.18 \cos \eta + 81 \sin \eta)$$

$$M_y = 2510e^{-\frac{1}{2}} e^{-\eta} (\cos \eta - 1.168 \sin \eta)$$

表II是用上述各式求得的应力值与精确理论求得的值比较，由表看出，误差是极微小的。

壳体总应力和纯薄膜应力在图5中画出，从图中可看出，误差仅发生在支承环的附近。

—译自 CONCRETE AND
CONSTRUCTIONAL ENGINEERING

VOL. LX, NO. 2, 3, 4

翻译 梁志花 姚时 陈嘉猷