

高級中學課本代數第二冊

教學參考資料

第一分冊

北京中小學教學參考資料編輯委員會

請
指
正
批
評

北京中小學教學參考資料編輯委員會敬贈



北京大眾出版社

高級中學課本
代數第二冊

教學參考資料第一分冊 書号: 519

編輯者: 北京中小學教學參考資料編輯委員會

校訂者: 白尚恕 王世強 殷士健

出版者: 北京大眾出版社

(北京西四區白塔寺順治巷)

北京市書刊出版營業許可證出字第〇七〇号

發行者: 新華書店

印刷者: 北京市印刷廠

開本: 850×1168 $\frac{1}{2}$ 印張: 1% 字數: 37,000

1955年10月第一版 第一次印刷 1—8,500冊

定價: 二角

13.3-16/128

編 者 的 話

一、本資料是爲了幫助京津兩市中學教師鑽研教材、改進教法、正確地使用教學大綱和教科書，以貫徹政務院和中共北京市委提高教育質量的指示而編修的。

二、根據中華人民共和國教育部的指示，本資料發行範圍限於京津兩市，其他地區如需參考，可以作爲內部交流經驗之用。

三、本資料僅供教學時參考，希望教師們在教學中發揮自己的創造性，不必受資料的拘束。

四、本資料是由京津兩市部分教師在暑假中以去年本會所編的“中學數學授課計劃綱要”爲基礎集體編修的，在內容上雖然有所改進，但由於編修教師的水平和時間的限制，一定還存在着不少缺點和錯誤，希望教師們在使用中多多提出指正的意見。來函請寄北京西黃城根甲 32 號本會。

五、本資料在編修過程中，曾蒙人民教育出版社數學編輯室的一些同志熱情的指導，又在北京師範大學傅種孫副校長領導下，由該校數學系董延闓、梁紹鴻、鍾善基、白尚恕、王世強、嚴士健等同志集體校閱，謹在此致以衷心的謝意。

北京中小學教學參考資料編輯委員會

一九五五年八月

總 說 明

本教學參考資料是根據“中學數學教學大綱（修訂草案）”和“高中代數第二冊”課本（一九五五年秋季供應），並在一九五四年暑期本會所編的“中學數學授課計劃綱要”的基礎上進行編修的。

中學數學教學大綱（修訂草案）中指出：

“中學數學教學的目的是教給學生以數學的基礎知識，並且培養他們應用這種知識來解決各種實際問題所必需的技能和熟練技巧。

教師在講授數學的過程中，要以社會主義思想教育學生，要充分聯系我國社會主義建設中各方面的成就與情況，以培養他們成為積極參加社會主義建設和保衛祖國的全面發展的新人。注意培養學生的辯證唯物主義的世界觀，愛國主義思想和民族自尊心以及愛科學、愛勞動、愛集體、守紀律的美德，並且鍛鍊學生的堅強意志和性格。”

大綱中又指出：

“代數教學的目的，在於擴大學生關於數的概念，教會學生自覺地、迅速而又最合理地作出代數式的恆等變形，發展學生關於函數相依關係和它的圖象的概念，教會學生列出方程和解方程，並且教會學生應用代數知識解答有關物理、化學、技術方面、農業方面的簡單問題”。

在高中二年級第一學期的代數課中，主要是教給學生關於數列、指數及指數函數等知識。其教學目的如下：

（一）使學生理解數列、數列的極限、指數及指數函數等概

念；並使學生牢固地掌握等差級數、等比級數、及無限遞減等比級數中的各主要公式及指數冪的運算法則。

(二) 通過數列的學習，培養學生觀察現象、發現規律的能力；通過數列極限的學習，培養學生辯證唯物的觀點；並通過指數概念普遍化的學習，培養學生抽象概括的能力。

本資料是按照單元編寫的，在每單元中均包括教學目的、教材分配、教材分析、教法建議和其他等五部分。

“教學目的”分列於每單元和每課時中，指出一般的和具體的要求。希望教師根據教學大綱的精神和學生的具體情況使這些目的在教學中得以貫徹。

“教材分配”部分，因編修時間所限，只按照課時的順序提出教學題目和教學目的以及例題、習題和參考題的配備建議，一般未詳及細節。對於課時和例題、習題的安排是編者根據一般情況擬訂的，但因各校具體條件不同，不可能完全適用，任課教師要從實際出發，確定取捨，不能強求劃一。所列參考題係供教師佈置作業時調濟之用，也可留作進行複習時的參考。

“教材分析”部分，主要說明教材的講授順序、前後聯系和教學重點，旨在幫助教師深入地鑽研教材，進一步掌握和貫徹教學大綱的精神，但由於教材特點和教學需要的不同，所以詳略不一。

“教法建議”係根據一般的教學經驗，提出一些教學方法，旨在幫助教師更好的處理教學中的具體問題。教師必須在鑽研教材的基礎上，結合學生的具體情況和存在問題，決定自己的教學方法，不要機械搬用。

“其他”部分，係根據教學需要，提出一些僅供教師參考的材料，或對於編者意圖作某些必要的解釋。其中有些內容較深，是為了幫助部分教師深入的領會教材，明確概念，但絕不可搬到教

學中去。

此外，關於補充題、學期複習提綱以及對於課本的勘誤等統列於書後的“附錄”中，以備應用和查考。

本學期全部教材擬用 34 課時講授完畢（詳見下表），其餘時間可留作複習和考查之用。

講 授 內 容	授 課 時 數
第一單元 數列	共 22 課 時
I 數列的概念	3 課 時
II 等差級數	4 課 時
III 等比級數	5 課 時
IV 數列極限的概念	6 課 時
V 無限遞減等比級數	4 課 時
第二單元 指數概念的普遍化	共 8 課 時
I 零指數，負指數，分指數及其運算	5 課 時
II 無理指數的概念	3 課 時
第三單元 指數函數與對數（第一部分）	共 4 課 時
指數函數及其圖象與性質	4 課 時

此外在教學中還應注意下列事項：

（一）在教學過程中必須注意遵守教學原則。例如在講“數列”時，要注意啟發學生認識數列的變化規律，這不但容易求出通項公式，而且對引入極限概念有所啟發，對於等差級數與等比級數的學習也就更容易了。在教學中要隨時注意啟發學生，多讓學生活動，以培養學生的獨立思維能力。

在教學中還應遵守循序漸進的認識規律，如講等差級數與等比級數時，都應先從具體實例出發，然後再導出一般規律；在講指數時，先從正整指數的複習入手，然後講零指數、負指數再擴大到整指數；進一步學習分指數和無理指數以後，最後概括為實數指數。根據學生的年齡特徵，在高中講課可以多採用演繹的方式。

（二）教師在佈置課外作業時，應要求學生先複習教材內容而後作題，若遇較難的題目，還應給學生作必要的提示。教師平時也要多注重學生板演，經常批改學生的書面作業，並隨時指出學生在練習中的典型錯誤，分析錯誤的原因，使學生能認識錯誤，改正錯誤，正確地掌握知識，提高運算技能和熟練技巧。

（三）應在整個的教學過程中，認真貫徹教育部所發佈的“關於減輕中、小學學生過重負擔的指示”為進一步提高教育質量而努力。

目 錄

總說明	1
第一單元 數列	1
I 數列的概念	1
II 等差級數	6
III 等比級數	11
IV 數列極限的概念	15
V 無限遞減等比級數	27
第二單元 指數概念的普遍化	30
I 零指數、負指數、分指數及其運算	30
II 無理指數的概念	33
第三單元 指數函數与对數 (第一部分)	40
指數函數及其圖象与性質	40
附錄	46

第一單元 數 列

(見人民教育出版社“高中代數補充教材”及
“高中代數”第二冊 10—32 頁, § 73—§ 88)

本單元總的教學目的

(一) 在學生已經學過函數相依關係的基礎上, 使學生明確“數列”的概念, 並在數列的基礎上使學生掌握等差級數(算術級數)和等比級數(幾何級數)的主要公式及其應用。

(二) 使學生明確數列的極限概念, 為將來學習極限的理論打下基礎; 並給幾何課講“圓的周長與面積”等準備必要的知識。因之必須使學生會運用極限的定理(不必證明), 亦能用以求無限遞減等比級數的和與化循環小數為分數的法則。

(三) 通過數列的學習, 引導學生觀察數列的各項與項數的內在聯繫及其發展趨勢, 以培養其辯證的邏輯思維能力。通過各種級數公式的應用, 培養學生分析問題的能力並藉以提高解方程的熟練技巧。

I 數列的概念

(見人民教育出版社“高中代數補充教材”I 數列的概念、各種數列舉例、數列中的通項公式)

一、教學目的

(一) 通过具体实例給学生建立數列的概念,並使学生会做一些“已知簡單數列的前若干項求通項”或是“給了通項公式寫出數列來”等問題,為學習極限打下基礎。

(二) 通过數列的學習,啓發学生注意發現事物的內在規律,以培养学生的認識力。

二、教材分配 (共用 3 課時)

(一) 第一課時

1. 教學題目 數列的概念、各種數列舉例。

2. 教學目的

(1) 先由具体实例明確數列的意義;再舉各種數列為例,使學生掌握簡單數列之通項公式的求法。

(2) 要求學生對數列中有關名詞 (如數列的項、通項、遞增數列、遞減數列、擺動數列、有限數列、無限數列等) 有明確認識。

3. 教材 見補充教材中 (1) 數列的概念、(2) 各種數列舉例。

4. 例題 補充教材中例 1, 2, 3, 6, 4, 5, 7; 課本 84 頁 856^{a)} 中 7), 求通項及判斷它是遞增的還是遞減的?

5. 習題 課本 83—84 頁, 854^{2) 3) 4)}, 856^{a)} 中 2) 3) 5) 6), 6) 中只答是遞增的還是遞減的?

(二) 第二課時

1. 教學題目 數列的通項公式。

2. 教學目的

(1) 使學生能正確地由通項公式寫出數列來,並能用通項公式檢查一數是否是數列中的一項。

(2) 使學生學會描繪圖形（在數軸上），以觀察數列的變化情況。

3. 教材 見補充教材中(3)數列之通項公式。

4. 例題 除補充教材中之例題外，可選課本 85 頁 858_{11} ， $2) 中 a) 6)$ ， $855_{B) 11}$ 。（可參看 a ）。

5. 習題 課本 83—84 頁， $857_{1), 2) 中 a) B)$ ， $855 a) 6)$ $B) 2) 4) 5) 7)$ 。（可參看 a ）。

(三) 第三課時

1. 教學題目 數列複習。

2. 教學目的 鞏固學生所學的數列知識，為以後學習級數、極限概念等作準備。

3. 教材 通過談話和講解的方法，按下列內容進行複習，以鞏固有關數列的知識（教師可根據學生具體情況，酌予增減）。

(1) 已知數列的通項公式為 n 的一次或二次函數，寫出數列的前幾項。（配合適當的例題）

(2) 从上例說明各項的值與 n （正整數）的關係。

(3) 用通項公式，檢查一數是否是數列中的一項。

(4) 已經學過的數列的種類（包括遞增的、遞減的、擺動的；有限的，無限的。教師可事先在小黑板上寫出各種不同的數列，叫學生辨認）。

(5) 判斷數列是遞增的、還是遞減的方法。

(6) 由數列求通項。（只就學過的數列進行分析，不能選難題）

(7) 把數列的前幾項畫在數軸上，觀察數列的變化情況。

三、教材分析

(一) 初一算術裏講到自然數列, 就開始引進了數列的觀念, 但還不能形成完整的概念. 教學大綱中規定着“所謂數列, 就是排列好的數的集合, 其中每一個數, 都以它所在位置的次序來決定的”. 數列中各數和它們所在位置的關係, 一般情況下是用通項公式來表示的. 至於通項公式, 有的是很容易求的, 如自然數列 $1, 2, 3, 4, \dots$, 的通項爲 n , 偶數數列的通項爲 $2n$, 奇數數列的通項爲 $2n-1$, 自然數的倒數數列的通項爲 $\frac{1}{n}$ 等; 但有的數列的通項公式是比較難找的, 如擺動數列 $-1, 1, -1, 1, \dots$; $0, 2, 0, 2, \dots$; $0, 1, 0, 1, \dots$ 等的通項分別爲 $(-1)^n, (-1)^n + 1, \frac{(-1)^n + 1}{2}$; 還有的數列的通項公式是不能寫出來的, 如質數數列 $2, 3, 5, 7, \dots$ 與 $\sqrt{2}$ 之不足近似值數列 $1, 1.4, 1.41, 1.414, \dots$ 等, 這樣數列的所有項都是從某種運算求出來的. (對後兩個例只提出就夠了, 不必多加分析)

在學生建立數列概念之後, 酌量應用簡單例題, 引導學生觀察數列的變化情況, 發現數列的變化規律, 由其構成方法, 導出通項公式, 是具有教育意義的.

(二) 教師在講授時, 可一面叫學生把數列擴充幾項, 一面啓發學生發現規律; 可由簡單的逐漸引出稍繁的, 如 $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \dots$, $\frac{1 \cdot 3}{2}, \frac{3 \cdot 5}{4}, \frac{5 \cdot 7}{6}, \dots$; $\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}, \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6}, \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 8}, \dots$; 對於難發現規律的數列, 可以略去. 我們的目的, 只是通過這些數列題的練習, 把能構成等差級數, 或等比級數的數列提出來就夠了. 其次, 教給學生判別, 或從圖形上觀察, 這些數列是遞增的、遞減的、還是擺動的? 對於判別遞增和遞減的方法, 在第一課時只給

學生以感性認識，到第三課時才舉例說明判別遞增遞減的方法，可以看出， $a_{k+1} > a_k$ ，還是 $a_{k+1} < a_k$ ？（但不要求每個題都這樣做）。再次，通過簡單的例子，把有界無界的問題，略提一下，為今後學習極限準備條件，但切不要講得太多，只給學生感性的認識就夠了。然後講解由已知通項公式寫出數列來，及由已知通項公式與某項的值求項數問題，這也是判別一數是否為數列中的一項的問題，此時要注意到項數一定是自然數才有意義。

四、教法建議

（一）把數列描繪在數軸上時，必須注意原點、正方向與單位之長，描點時用色筆描繪比較醒目，要囑咐學生不要在數軸兩端都畫箭頭。

（二）教學大綱和補充教材中所說的“通項”，在課本正文中叫“任意項”，而習題部分又叫公項，它們都是一個意思，我們在教學中，都劃一稱為通項。（但若叫第 n 項，則須注意， n 為正整數）。還有，無限數列與無窮數列、有限數列與有窮數列、質數數列與素數數列、遞增數列與遞升數列、遞減數列與遞降數列也都是一個意思，茲根據教學大綱的規定，都用前者而不用後者。（但切忌無限數列與無界數列混淆，有界數列與有限數列混淆）

（三）在第二課時佈置作業時，可將 855 a) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 改為 $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ，因為零指數的概念現在尚未引入。

（四）在第三課時小結中，可以着重多舉等差級數與等比級數的例題，並應多給學生活動的機會。

五、其他

（一）判斷數列的遞增或遞減問題，一般地說，只從觀察（或

試驗)是否“一項比前一項大”或“一項比前一項小”即可,先不強調証明 $a_{k+1} > a_k$ 或 $a_{k+1} < a_k$, 等到講數列的極限時,再要求這樣証明。

(二) 有界數列的簡單定義就是“如果有這樣的正數 A 存在,而這數列的任何項的絕對值都不能大於這個數 A , 這樣的數列叫做有界數列”; (要注意: 並不必須自第一項起就要求適合這種關係, 只須自某項起各項均適合就够了。) 相反地, 如果沒有這樣的正數 A 存在, 就叫做無界數列。這定義目前只備教師參考, 俟將來講數列的極限時再講。

(三) 在數列這一單元中的例題與習題較多, 可根據具體情況在複習提問、舉例、鞏固、課堂書面檢查、以及課堂練習和課外作業中分別處理。

II 等差級數

(見課本 10—17 頁, § 73—§ 77.)

一、教學目的

(一) 在數列的基礎上, 使學生明確等差級數的意義, 掌握其通項公式及前幾項和的公式; 並能應用公式解決實際問題。

(二) 介紹我國古算家在等差級數上的成就, 進行愛國主義教育。

二、教材分配 (共用 4 課時)

(一) 第一課時

1. 教學題目 等差級數定義及其通項公式。

2. 教學目的

(1) 使學生明確等差級數的定義, 及其有關名詞 (等差級數的項、公差、遞增等差級數與遞減等差級數)。

(2) 使学生会導出等差級數的通項公式，並能熟練地用它解題。

3. 教材 見課本 10—12 頁，§ 73—§ 75.

4. 例題 課本 § 73—§ 75 例題；課本 85 頁，**860**_{1) 2) 3) 5)}；
89 頁，**887**₁₎。

5. 習題 課本 17 頁練習 **115, 118**；課本 85 頁 **861**_{1) 4)}。

6. 參考題 課本 89 頁，**887**₂₎。

(二) 第二課時

1. 教學題目 等差級數各項和的公式。

2. 教學目的 通過等差級數的性質(與級數兩端等距離之兩項和等於首末兩項之和)，推出其和的公式，使學生理解求和公式的推演過程並能熟練地應用。

3. 教材 課本 12—15 頁，§ 76.

4. 例題 課本 § 76 例題；課本 91 頁 **901**；課本 17 頁練習 **123**。

5. 習題 課本 85—87 頁，**862**₆₎，**865**，**872**₄₎，**874**₄₎。

6. 參考題 課本 90 頁，**888**。

(三) 第三課時

1. 教學題目 等差級數中兩個主要公式的應用。

2. 教學目的 使學生能夠靈活地使用等差級數中兩個主要公式；並能在已知兩數中間插入若干個等差中項。

3. 教材 見課本 15—16 頁，§ 77.

4. 例題 課本 § 77 例題；課本 86—89 頁，**878, 868, 883**₁₎。

5. 習題 課本 86—89 頁，**869**，**875**₉₎，**880**₁₎，**881**₁₎。

6. 參考題 課本 87 頁，**875**₁₁₎。

(四) 第課四時

1. 教學題目 關於等差級數應用問題的練習。
2. 教學目的 要求學生能應用已學的公式解答較複雜的應用問題；並通過解題培養學生分析問題的能力。
3. 例題 課本 89—90 頁，884, 892, 894, 897；
課本 17 頁練習，128。
4. 習題 課本 89—91 頁，884, 900, 903, 905。

三、教材分析

本段教材由一實例（課本 § 73）開始，引出等差級數是很好的。這是因為通過這一實例，一方面可以觀察到數列的規律，一方面也可以觀察到“與級數兩端等距的兩項和的性質”。這對於什麼叫等差級數，等差級數和的公式怎樣導出，及等差級數的遞增與遞減都有所啓發。

在等差級數的定義中，公差 d 為正數或為負數是遞增或遞減的關鍵；但若 $d=0$ 則為常數列了。它既非遞增也非遞減，第 n 項等於首項，其 n 項和就是首項的 n 倍。

在本書裏看不出級數與數列有什麼區別，實際上是應該加以區別的，如：1, 3, 5, 7, ……；1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ……等叫數列；而 $1+3+5+\cdots$ ； $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ 等叫級數。在高等數學中還要談到它，在目前教學中，可仍按課本講授。

級數與代數中的四個主要內容之三都有密切的聯繫：

(一) 與函數的聯繫：公式 l (或 a_n) $= a + (n-1)d$ ，及 S (或 S_n) $= \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$ 中，前者是 n 的一次函數，後者是 n 的二次函數，其中 n 是自然數。為了不斷的鞏固函數概念，可以在第三、四課時提出這種聯繫。

(二) 与恒等變形的联系:

$$a + (a+d) + \cdots + [a + (n-1)d] = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

是代數式的恒等變形，課本 884 題左式之和的化簡也是一例。

(三) 与方程的联系: 在等差級數的兩個主要公式

$$l = a + (n-1)d \text{ 及 } S = \frac{n}{2}(a+l) \text{ 中, 若已知 } a, d, n, l,$$

S 五個不同文字中的任意三個可求其餘兩個。这种習題類型很多，除直接代公式求解者外，有一元一次方程的問題如: 861₁₎ 872₁₎ 873₁₎ 874₁₎ 875_{1) 3) 5) 7)}; 有一元二次方程的問題如: 875₉₎; 有二元一次方程組的問題如: 875₁₁₎。解題時應注意先求哪個文字，後求哪個文字，及 n 的值要受什麼限制。

關於等差級數的应用問題，和一般的应用問題一樣，只不过加上一些等差級數的知識。所以要求学生善於用已学过的等差級數的知識，去分析題意，佈列方程；更要求解法簡練，答案正確合理，把解方程的技能再提高一步。

四、教法建議

(一) 在第一課時，因為學生已有數列的基礎，故比較容易講授。通过 § 73 的問題要達到兩個目的：一方面引出等差級數的定義，一方面給求和公式打下基礎。在講等差級數的遞增和遞減時，要強調指出 d 之關鍵性，在舉例中，除課本例題外，可选 860_{1) 2) 3) 5)} 作為口答，其中在口答 5) 時，要先使學生想一想 $a_7 - a_4$ 差是什麼？在証明 887₂₎ 時，可用 $b-x, b, b+x$ 表示等差級數的三個數 a, b, c ，然後再代入 $3(a^2 + b^2 + c^2)$ 及 $6(a-b)^2 + (a+b+c)^2$ 內即可証明其恒等。

(二) 和的公式証明後，要導出 $S = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$ ，即課本 17 頁 127 題。做題時可對三個公式（實際是兩個獨立公式）