

2002 年 考 研 冲 刺 辅 导

理工数学模拟试卷

(北京模考班内部资料)

2001 年 12 月

目 录

数学(一)模拟试卷(No. 1)	(1)
数学(一)模拟试卷(No. 2)	(7)
数学(一)模拟试卷(No. 3)	(13)
数学(一)模拟试卷(No. 4)	(19)
数学(一)模拟试卷(No. 5)	(25)
数学(一)模拟试卷答案与解析(No. 1)	(31)
数学(一)模拟试卷答案与解析(No. 2)	(37)
数学(一)模拟试卷答案与解析(No. 3)	(44)
数学(一)模拟试卷答案与解析(No. 4)	(51)
数学(一)模拟试卷答案与解析(No. 5)	(59)
数学(二)模拟试卷(No. 1)	(67)
数学(二)模拟试卷(No. 2)	(73)
数学(二)模拟试卷(No. 3)	(79)
数学(二)模拟试卷(No. 4)	(85)
数学(二)模拟试卷(No. 5)	(91)
数学(二)模拟试卷答案与解析(No. 1)	(97)
数学(二)模拟试卷答案与解析(No. 2)	(104)
数学(二)模拟试卷答案与解析(No. 3)	(110)
数学(二)模拟试卷答案与解析(No. 4)	(117)
数学(二)模拟试卷答案与解析(No. 5)	(124)

013-44/74

数学(一)模拟试卷(No.1)

得分	评卷人

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分,把答案填在题中横线上。)

(1) 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{f(x)}{\sin x})}{a^x - 1} = A (A \neq 0)$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 设 $f(x) = \int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt$, 则 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 由曲线 $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 12 \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转面在点 $(0, \sqrt{3}, \sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(4) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ 则 $(A - 2B^T)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 设随机变量 X 与 Y 相互独立且都服从区间 $[-1, 7]$ 上的均匀分布, 则 $P\{\min(X, Y) \leq 5\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

得分	评卷人

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分。每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内。)

(1) 直线 $L_1: \begin{cases} 2x - 3y - 7z + 8 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$ 与直线 $L_2: \begin{cases} 2x - y - z + 2 = 0 \\ x - 5y + z + 7 = 0 \end{cases}$

(A) 异面

(B) 相交于一点

(C) 平行但不重合

(D) 重合

()

(2) 设 $f(x), g(x)$ 是恒大于零的可导函数, 且 $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$, 则当 $a < x < b$ 时, 有

(A) $f(x)g(b) > f(b)g(x)$ (B) $f(x)g(a) > f(a)g(x)$ (C) $f(x)g(x) > f(b)g(b)$ (D) $f(x)g(x) > f(a)g(a)$

()

(3) 设 $k > 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k+n}{n^2}$

(A) 发散

(B) 条件收敛

(C) 绝对收敛

(D) 收敛性与 k 有关

()

(4) 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, 则 $|2A^{-1}|$ 为

(A) $\frac{2}{n-1}$ (B) $(-1)^{n-1} \frac{2}{n-1}$ (C) $\frac{2^n}{n}$ (D) $(-1)^{n-1} \frac{2^n}{n-1}$

()

(5) 设二维随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布, 则随机变量 $\xi = X + Y$ 与 $\eta = X - Y$ 不相关的充分

必要条件为

(A) $E(X) = E(Y)$

(B) $E(X^2) - [E(X)]^2 = E(Y^2) - [E(Y)]^2$

(C) $E(X^2) = E(Y^2)$

(D) $E(X^2) + [E(X)]^2 = E(Y^2) + [E(Y)]^2$ ()

得分	评卷人

三、(本题满分 6 分)

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $f(0) = 3$, 且对 $\forall x, y \in [0, 1]$ 恒有 $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$, 估计 $\int_0^1 f(x) dx$ 的值.

得分	评卷人

四、(本题满分 7 分)

设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有连续的二阶导数, 且 $f(0) = 0$,

$$f'(x) + f(x) - \frac{1}{x+1} \int_0^x f(t) dt = 1,$$

求 $f(x)$.

得 分	评卷人

五、(本题满分 6 分)

设 $f(x)$ 具有连续的二阶导数, 且 $f(1) = f'(1) = 1$

$\oint_L \left[\frac{y^2}{x} + xf\left(\frac{y}{x}\right) \right] dx + \left[y - xf'\left(\frac{y}{x}\right) \right] dy = 0$, 其中 L 是任一不与 y 轴相交的简单光滑曲线, 试求 $f(x)$.

得 分	评卷人

六、(本题满分 7 分)

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} \right)$ 的收敛性, 并证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln n} = 1$

得 分	评卷人

七、(本题满分 8 分)

设有直线: $L_1: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$, $L_2: \frac{x+2}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2}$

(1) 证明 L_1 与 L_2 是异面直线

(2) 求平行于 L_1, L_2 且与他们等距的平面方程。

得 分	评卷人

八、(本题满分 8 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上可导, $f(x) > 0$, 且满足不等式 $[xf(x)]' \leq -kf(x)$, (k 为确定的常数), 试证在 $[2, +\infty)$ 上 $f(x) \leq Ax^{-1-k}$, 其中 A 为与 x 无关的常数.

得分	评卷人

九、(本题满分6分)

已知齐次线性方程组
$$\begin{cases} (a+3)x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2ax_1 + (a_1-1)x_2 + x_3 = 0, \\ (a-3)x_1 - 3x_2 + ax_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解, 且 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & a & -2 \\ 2 & -2 & 9 \end{bmatrix}$ 是正定矩阵, 求 a 并求 $X^T X = 2$ 时, $X^T A X$ 的最大值.

得分	评卷人

十、(本题满分8分)

设方程组 (I)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_4 = -6, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 3, \end{cases} \quad (\text{II}) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + mx_3 - x_4 = 5, \\ 4x_2 - x_3 + nx_4 = -11, \\ x_3 - 2x_4 = t. \end{cases}$$

(1) 求方程组 (I) 的导出方程组的基础解系及 (I) 的通解;

(2) 能否取到适当的 t, m, n 使 (I) 与 (II) 为同解方程组, 证明你的论断. 若能, 并求出相应的

t, m, n .

得分	评卷人

十一、(本题满分 7 分)

在电源电压不超过 200 伏, 200~240 伏和超过 240 伏三种情况下, 某仪器损坏的概率分别为 0.1, 0.001 和 0.2, 假设电源电压 X 服从正态分布 $N(220, 25^2)$, 试求 (1) 该仪器损坏的概率 α ; (2) 该仪器损坏时, 电源电压为 200~240 伏的概率 β . (已知 $\Phi(0.8) = 0.788$)

得分	评卷人

十二、(本题满分 7 分)

设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} a x e^{-\frac{x^2}{\lambda}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \quad (\lambda > 0)$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$ 为简单随机样本

- (1) 确定常数 a ;
- (2) 求 λ 的极大似然估计量;
- (3) (2) 中求出的估计量是否为 λ 的无偏估计量?

数学(一)模拟试卷(No.2)

得分	评卷人

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分,把答案填在题中横线上。)

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\tan \frac{n\pi}{2n+1} \right)^{\frac{1}{n}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^{x+y} + \cos(xy) = 0$ 确定, 则 $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 设向量 $\vec{x}$ 垂直于向量 $\vec{a} = \{2, 3, 1\}$ 和 $\vec{b} = \{1, -1, 3\}$, 与 $\vec{c} = \{2, 0, 2\}$ 的数量积为 -10 , 则 $\vec{x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $n \geq 2$ 为正整数, 则 $A^n - 2A^{n-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 袋中有50个乒乓球, 其中20个是黄球, 30个是白球, 今有两人依次随机地从袋中各取一球, 取后不放回, 则第二个人取得黄球的概率是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

得分	评卷人

二、选择题(本题共5小题, 每小题3分, 满分15分。每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母选在题后的括号内。)

(1) 直纹 $L: \begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ 6x + y + z = 8 \end{cases}$ 与平面 $P: 4x - y + z = 4$

(A) 垂直

(B) 斜交

(C) 平行但不共面

(D) 共面

()

(2) 设在 $[0, 1]$ 上 $f'(x) > 0$, 则 $f'(0)$ 、 $f'(1)$ 、 $f(1) - f(0)$ 或 $f(0) - f(1)$ 的大小顺序是

(A) $f'(1) > f'(0) > f(1) - f(0)$

(B) $f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$

(C) $f(1) - f(0) > f'(1) > f'(0)$

(D) $f'(1) > f(0) - f(1) > f'(0)$

()

(3) 设 $a_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 常数 $\lambda \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n \tan \frac{\lambda}{n}) a_{2n}$

(A) 绝对收敛

(B) 条件收敛

(C) 发散

(D) 敛散性与 λ 有关

()

(4) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $A = B$

(A) 合同且相似

(B) 合同但不相似

(C) 不合同但相似

(D) 不合同且不相似

()

(5) 设随机变量 X 与 Y 均服从正态分布, $X \sim N(1, \sigma^2)$, $Y \sim N(2, \sigma^2)$, 记 $p_1 = P\{X \leq -2\}$, $p_2 = P\{Y \geq 4\}$, 则

- (A) 对任意实数 σ , 都有 $p_1 = p_2$ (B) 对任何实数 σ , 都有 $p_1 < p_2$
 (C) 只对 σ 的个别值才有 $p_1 = p_2$ (D) 对任何实数 σ , 都有 $p_1 > p_2$ ()

得分	评卷人

三、(本题满分 6 分)

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的二阶导数连续的函数, 且满足 $f(x) + 3f'(x + \pi) = \sin x$, 求 $f(x)$.

得分	评卷人

四、(本题满分 7 分)

设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - \cos x}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$, 其中 $g(x)$ 具有二阶连续导函数, 且 $g(0) = 1$

- (1) 确定 a 的值, 使 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续;
 (2) 求 $f'(0)$;
 (3) 讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 的连续性.

得 分	评卷人

五、(本题满分 6 分)

设 $y = f(x, t)$, 而 t 是由方程 $F(x, y, t) = 0$ 所确定的 x, y 的函数, 其中 f, F 都具有二阶连续偏导数, 试求 $\frac{dy}{dx}$.

得 分	评卷人

六、(本题满分 7 分)

设 $a_1 = 1, a_2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}, a_3 = \frac{1}{2}, a_4 = \int_2^3 \frac{dx}{x}, \dots, a_{2n-1} = \frac{1}{n}, a_{2n} = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}, \dots$.

证明: (1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ 收敛;

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n.$$

得分	评卷人

七、(本题满分8分)

若一曲线上任一点 $M(x, y)$ 处的切线的斜率为 $\frac{xy}{(x+y)^2}$, 且过点 $(\frac{1}{2}, 1)$, 求此曲线方程. 又当 x 为何值时, 切线的斜率为 $\frac{1}{4}$.

得分	评卷人

八、(本题满分8分)

已知函数 φ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\varphi(x)}{x^n} = 0.$$

试证: (1) 若 n 是奇数, 则存在一个 ξ , 使 $\xi^n + \varphi(\xi) = 0$;

(2) 若 n 是偶数, 则存在一个 η , 使 $\eta^n + \varphi(\eta) \leq x^n + \varphi(x), x \in (-\infty, +\infty)$.

得分	评卷人

九、(本题满分 6 分)

A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 n 阶矩阵, C 是 $n \times m$ 矩阵, 如 $AB = A, BC = 0$, 且秩 $r(A) = n$, 证明: $B = E$, 并求行列式 $|CA - B|$ 的值.

得分	评卷人

十、(本题满分 8 分)

设有两个四元齐次方程组 (I) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$ 与 (II) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

试问方程组 (I)、(II) 是否有非零公共解? 若有求出所有公共的非零解; 若没有, 请说明理由.

得分	评卷人

十一、(本题满分 7 分)

设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x) = ke^{-\left(\frac{x^2}{2} + x\right)}$$

- (1) 确定 k 值;
- (2) $Y = aX + b$, 试确定 a, b 的值, 使 Y 成为标准化随机变量, 即 $E(Y) = 0, D(Y) = 1$;
- (3) 写出标准化随机变量 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

得分	评卷人

十二、(本题满分 7 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} (\theta + 1)x^\theta & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

其中 $\theta > -1$ 是未知参数, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是来自总体 X 的一个容量为 n 的简单随机样本, 分别用矩估计法和极大似然估计法求 θ 的估计量.

数学(一)模拟试卷(No.3)

得分	评卷人

一、填空题(本题共5小题,每小题3分,满分15分,把答案填在题中横线上。)

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\tan \frac{\pi}{2} x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 设 $f(\pi) = 2, \int_0^{\pi} [f(x) + f'(x)] \sin x dx = 5$, 则 $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 设 $a = \{3, 5, -2\}, b = \{2, 1, 4\}$. 若 $\lambda a + b$ 与 z 轴垂直, 则 $\lambda = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 设 $|A| = |(a_{ij})| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式 ($i, j = 1, 2, 3, 4$), 则 $2A_{13} + A_{23} + A_{33} + A_{43} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 设 A, B, C 是两两独立且不能同时发生的随机事件, 且 $P(A) = P(B) = P(C) = P$, 则 P 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

得分	评卷人

二、选择题(本题共5小题,每小题3分,满分15分。每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内。)

(1) 两平行平面 $x - 2y + 2z - 15 = 0, x - 2y + 2z + 18 = 0$ 间的距离为

- (A) 1 (B) 3
(C) 11 (D) 33 ()

(2) 设在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) > 0, f'(x) < 0, f''(x) > 0$, 令 $S_1 = \int_a^b f(x) dx, S_2 = f(b)(b-a),$

$S_3 = \frac{1}{2}[f(a) + f(b)](b-a)$, 则

- (A) $S_1 < S_2 < S_3$ (B) $S_2 < S_1 < S_3$
(C) $S_3 < S_1 < S_2$ (D) $S_2 < S_3 < S_1$ ()

(3) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x = -1$ 处收敛, 则此级数在 $x = 2$ 处

- (A) 是条件收敛 (B) 绝对收敛
(C) 发散 (D) 收敛性不能确定 ()

(4) 已知 $A, B, A+B, A^{-1}+B^{-1}$ 均为 n 阶可逆阵, 则 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$ 等于

- (A) $A+B$; (B) $A^{-1}+B^{-1}$;
(C) $A(A+B)^{-1}B$; (D) $(A+B)^{-1}$. ()

(5) 设有随机变量 X_1, X_2, X_3, X_4 . 记 $E(X_i) = \mu_i, D(X_i) = \sigma_i^2 (i = 1, 2, 3, 4)$, 则

$P(\mu_i < X_i < \mu_i + \sigma_i) < P(\mu_i - \sigma_i < X_i < \mu_i)$

成立的是

(A) $X_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$

(B) $X_2 \sim U(a, b)$, 即 (a, b) 上的均匀分布

(C) X_3 有 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

(D) X_4 有 $f(x) = \begin{cases} 1+x & -1 \leq x < 0 \\ 1-x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

()

得分	评卷人

三、(本题满分 6 分)

设 $f(x) = \arcsin(x-1)^2$ 及 $f(0) = 0$, 求 $I = \int_0^1 f(x) dx$.

得分	评卷人

四、(本题满分 7 分)

设 $\varphi(x) = \int_0^{\sin x} f(tx^2) dt$, 其中 $f(x)$ 为连续函数. (1) 求 $\varphi'(x)$; (2) 讨论 $\varphi'(x)$ 的连续性.

得分	评卷人

五、(本题满分6分)

设 $u = f(x, y, z)$, $\varphi(x^2, e^y, z) = 0$, $y = \sin x$, 其中 f, φ 都具有二阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$, 求 $\frac{du}{dx}$.

得分	评卷人

六、(本题满分7分)

函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 1$, 且满足等式

$$f'(x) + f(x) - \frac{1}{x+1} \int_0^x f(t) dt = 0$$

(1) 求导数 $f'(x)$;

(2) 证明: 当 $x \geq 0$ 时, 有不等式 $e^{-x} \leq f(x) \leq 1$ 成立