新數學

中學適用

半羣學社編著

第四册

下卷

聯合書院出版社

新數學

中學適用

半羣學社編著

第四册

下卷

聯合書院出版社

總編輯

周紹棠 理學士(數學)，哲學博士(數學)

編輯

潘海紅 理學士(數學)

鄭肇楨 文學士(數學)

潘煒棠 文學士(數學)教育文憑

T. McC. Chamberlain 文學碩士(數學)，教育學士

何兆倫 理學士(數學)，英國 IMA 會士

潘鎮邦 文學士(數學)

徐思明 文學士(數學) 教育文憑

經理編輯

彭錫恩 文學士

良友印刷有限公司印製

香港西灣河街九至十一號

葛佛来·威廉·来勃尼兹
（1646—1716）

第四册

下卷目錄

5

第 五 章

純 幾 何

5.1 假設和結論

在本書第一册裏，我們見過了好些簡單的平面的和立體的幾何圖形，並且見到了它們的一些淺易的性質•在第二册裏我們應用了這些性質來作好些幾何圖形，其後在第三册，四册裏我們由不同的角度來研究幾何圖形的性質，亦即經由坐標，幾何變換和向量來研究幾何•現正好將我們的幾何知識組織起來，以顯露它們間彼此的聯繫以求新的發現，由第二册所學的邏輯知識可在本章裏充份應用•

5.11 邏輯上的結論

在本書第四册節 2.4 我們曾用幾何向量以証明下列定理：

[P_1] 聯三角形兩邊中點的線平行於第三邊且等於第三邊的一半•

假如我們不用向量，祇由第一，二册的知識能否建立一列系的定理，以証明定理 [P_1] 呢？答案是肯定的•我們且看下列推理。

設 M, N 是 $\triangle OAB$ 的兩邊 OA 和 OB 的中點（圖 5.1），

求証：

i) $MN \parallel AB$

ii) $MN = \frac{1}{2}AB$.

聯 M, N 延長至 P 使 $NP = MN$,
聯 P, B. $\triangle OMN$ 和 $\triangle BPN$ 有什麼關係呢？它們是否全等？何故？

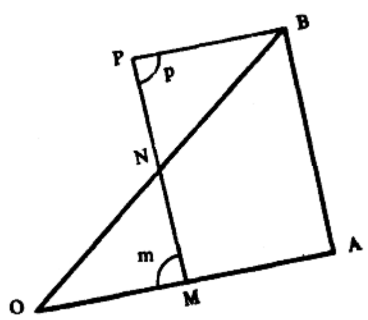

圖 5.1

由第一册節 3.72 我們已知有下列結果：
[A_1]，若兩三角形有兩邊及夾角相等則這兩三角形全等•
現在我們假定 [A_1] 眞確•由 [A_1]，及 NP = MN, ON = NB, ∠ONM = ∠BNP,
（何故？）得

$$\Delta OMN \cong \Delta BPN.$$

（符號"≅"表示"全等"），由此得

$$\angle p = \angle m \ , \ OM = PB.$$

又由第一册節 3.34 知有下列結果：
[A_2] 兩線爲另一線所截，若有一雙錯角相等則該兩線平行•
現在又假設 [A_2] 是眞確•由 [A_2] 及 $\angle p = \angle m$ 知

$$PB \parallel OM,$$

即

$$PB \parallel MA.$$

但 MA = OM 且 OM = PB, 由是

$$PB = MA.$$

這結果不是我們所要求的，但很接近•我們知四邊形 PBAM 有一雙對邊平行且相等•若能証明有此性質的四邊形是一平行四邊形便可•

設（圖 5.2）四邊形 KLMN 中 KL ∥ NM 且 KL = NM.

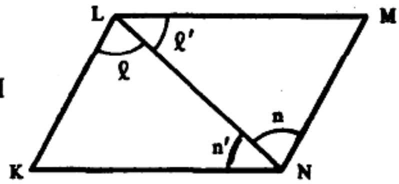

圖 5.2

由第一册節 3.34 得下列定理：
[A_3] 一線截兩平行線所得任一雙錯角等•
設 [A_3] 眞確，且 KL ∥ NM 則

$$\angle \ell = \angle n.$$

在 ΔKLN 和 ΔMNL 內，有

$$KL = MN$$
$$LN = NL$$
$$\angle \ell = \angle n$$

由 [A_1] 得 $\Delta KLN \cong \Delta MNL.$

$$\therefore \quad \angle \ell' = \angle n'.$$

由 [A_2]，得 KN ∥ LM 故 KLMN 是一平行四邊形•由是可証明

[A_4] 任一四邊形有一雙對邊平行且相等則這四邊形是平行四邊形。
由這定理可知圖 5.1 內 PBAM 是一平行四邊形，故 $MN \parallel AB$.
再由第一册節 3.44 知

[A_5] 平行四邊形的對邊等且對角等，
若 [A_5] 眞確則（圖 5.1）

$$MP = AB$$

而 $MN = NP = \frac{1}{2}MP$, 故得

$$MN = \frac{1}{2}AB.$$

我們終於尋求得一列系定理，由 [A_1] 至 [A_5] 並由它們的假定眞確性以推出 [P_1]，作爲它們跟隨邏輯方法而得的結論。

5.12 假設

有人或會問，"我們既然已用向量証明了 [P_1]，爲什麼還要用一列系的定理來証明它呢？"

這問題是很有意義的。當我們應用向量時（第四册節 2.4），先應用下列性質:

$$\frac{\vec{b}}{2} - \frac{\vec{a}}{2} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}),$$

這性質仍未証明確實的，當時我們以爲這性質是顯而易見，且亦有理由假定爲眞確。若要証明它是眞確，必須根尋另一些幾何圖形的性質。這裏我們要注意兩重要事項:

1) 當我們應用一列系語句及邏輯推理法來証明一定理時，必須清楚知道所用的語句中那一個已証明爲眞確；那一個是假定爲眞確的。

2) 理論上我們可以假定任何事物。但若假設太多，則結果變得毫無價值了。

事實上，若在某一討論中以爲 [P_1] 是顯淺的且方便於接受則亦無須先將這定理証明。

5.13 另一示範

在第四册節 2.4 我們已用向量証明了下列定理：

[P_2] 平行四邊形的對角線互相平分。

現在作爲練習，以邏輯推理法來証明，並找出証法中必須假設的性質。

在圖 5.3 內，設 OABC 是平行四邊形，兩對角線 AC 和 OB 交於點K •現要証明：

OK = KB

及　AK = KC

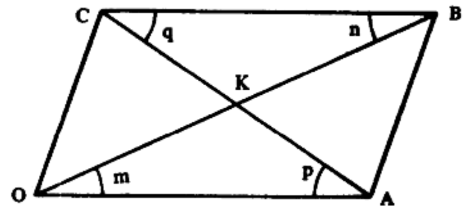

圖 5.3

這裏我們祇要假設 $[A_3]$, $[A_5]$ 及下列 $[A_6]$ 爲眞確：

$[A_6]$ 兩三角形有兩對應角及一對應邊相等則全等•（參看第一册節 3.72 ）則應用這一列系定理可証明上述定理 $[P_2]$ 如下•

在 ΔOAK 和 ΔBCK 內，

$$\begin{aligned} BC &= OA && \text{– – – –} \quad 由\ [A_5] \\ \left.\begin{aligned}\angle p &= \angle q \\ \angle m &= \angle n\end{aligned}\right\} && && \text{– – – –} \quad 由\ [A_3] \\ \therefore\quad \Delta OAK &\cong \Delta BCK && \text{– – – –} \quad 由\ [A_6] \end{aligned}$$

由是

$$\left.\begin{aligned} OK &= KB \\ AK &= KC \end{aligned}\right. \quad \text{– –（全等三角形的對應部份等）}$$

在上述証法內，若假定 $[A_3]$, $[A_5]$, $[A_6]$ 爲眞確，經由邏輯推理，則隨着 $[P_2]$ 亦爲眞確•有些人或許以爲 $[A_3]$, $[A_5]$ 和 $[A_6]$ 並不顯淺而要加以証明•但這是另一回事•這裏的重點在於邏輯推理的形式：假若我們認爲由 A_1 至 A_n 是眞確，（ n 是一自然數且 $\geqslant 1$ ）則 P必然眞確•

注意：有時一語句 B 在某一次討論中假設爲眞確，而在另一討論中作爲結論•前者是想用 B 來証明另一語句；後者是用其他語句來証明 B •

例 1

如圖 5.4 , ΔABC 的一邊 BC 延長至 X 求証：

$$\angle ACX = \angle A + \angle B,$$

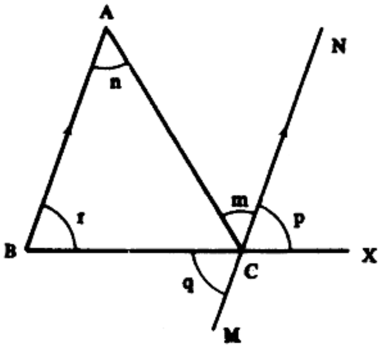

圖 5.4

應用 [A_3] 及假設下列語句眞確。
[A_7] 兩直線相交，所成對頂角等。
解：

作直線 MCN 經 C而平行 BA（圖 5.4）

則

$$\left.\begin{aligned}\angle m &= \angle n\\ \angle q &= \angle r\end{aligned}\right\} \quad ---- \quad \text{由 } [A_3]$$

但 $\angle p = \angle q$ ---- 由 [A_7]

∴ $\angle p = \angle r$

故 $\angle ACX = \angle m + \angle p$

$= \angle n + \angle r$

即 $\angle ACX = \angle A + \angle B$

習題 5A

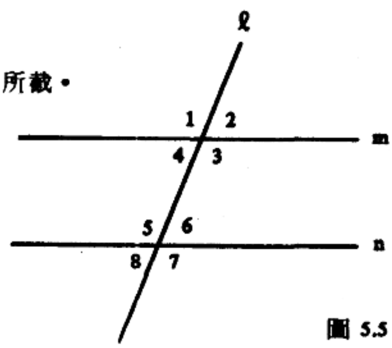

圖 5.5

1) 在圖 5.5 內，直線 n ∥ m 且爲第三直線 ℓ 所截。
假設 [A_3], [A_7] 眞確，求証：

$\angle 1 = \angle 5$,
$\angle 2 = \angle 6$,
$\angle 4 = \angle 8$,
$\angle 3 = \angle 7$.

2) 假設下列兩語句眞確：
[A_8] 外兩邊成一直線的兩鄰角之和等於兩直角。
[A_9] 一三角形的外角等於兩內對角之和。
由此以証明：
[A_{10}]三角形三內角的和等於兩直角。

3) 假設[A_{10}]眞確，求証：
[A_{11}]一凸 n 邊形各內角的和等於 (2n − 4) 個直角。

4) 假設 [A_8] 和[A_{11}]眞確，求証：
[A_{12}]一凸 n 邊形各外角的和等於四直角。

5) 試假定 [A_8] 和[A_{12}]眞確以証明[A_{11}]眞確。

例 2

依次聯一任意四邊形各邊中點的線圍成另一四邊形，試証明這四邊形是一平行四邊形，又指出証明過程中須用那些假設。

解：

設圖 5.6 內 ABCD 是一四邊形，M, N, P, Q 是四邊的中點。

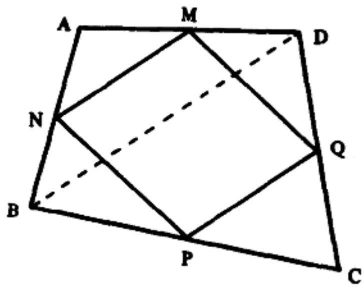

圖 5.6

$$\left.\begin{array}{lll}\text{在 } \triangle ABD \text{ 內} & MN \parallel BD \text{ 且} & MN = \frac{1}{2}BD \\ \text{在 } \triangle BCD \text{ 內} & PQ \parallel BD \text{ 且} & PQ = \frac{1}{2}BD\end{array}\right\} \text{ —— 由 } [P_1]$$

$$\therefore \quad MN \parallel PQ \text{ 且 } MN = PQ$$

故 MNPQ 是一個平行四邊形 (由 [A_4])

習題 5B

1) 在圖 5.7 內，m ∥ n, 求証
$\angle 3 + \angle 6 = 2$ 直角
$\angle 4 + \angle 5 = 2$ 直角
說出所用的假設

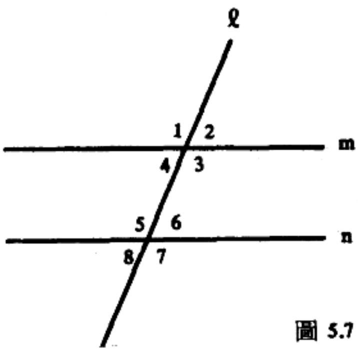

圖 5.7

2) ΔABC 內 $\angle A$ 是一鈍角，求証其他三角都是銳角。說出所用的假設。

3) 應用題 1 結果，若平行四邊形有一角是直角，証明其他各角都是直角。

4) 聯一矩形各邊中點的線圍成一菱形。試証明，並說出所用的假設。

5) 在圖 5.8 內，ΔPQR 內 $\angle P = 90°$
$PS \perp QR$. 求証

$$\angle Q = \angle SPR.$$

說出所用假設。

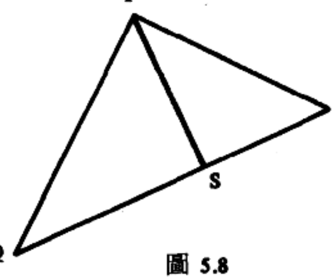

圖 5.8

例 3

証明
[A_{13}]等腰三角形內對等腰的兩角相等。
並說出所用的假設。

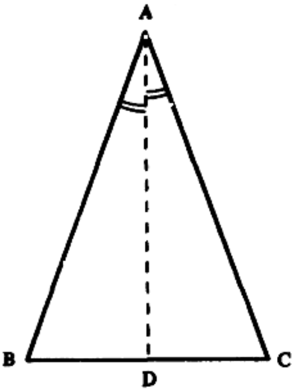

圖 5.9

証：
如圖 5.9，ΔABC 內 $AB = AC$
作 $\angle BAC$ 的平分線，交 BC 於點 D.
在 ΔABD 和 ΔACD 內，有

$$AB = AC$$
$$AD = AD$$
$$\angle BAD = \angle CAD$$

$\therefore \quad \Delta ABD \cong \Delta ACD$ ---- 由 [A_1]
$\therefore \quad \angle B = \angle C$

習題 5C

1) 在圖 5.10 內，Δ ABC 的各角都是銳角•
BD ⊥ AC ,CE ⊥ AB. 求証
$\angle ABD = \angle ACE$.
說出所用假設•

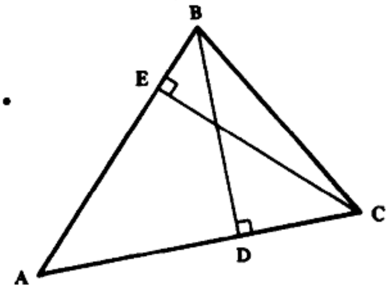

圖. 5.10

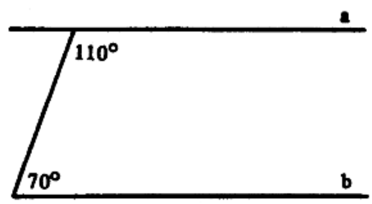

圖 5.11

2) 在圖 5.11 內說出 a // b 的理由•

3) 在圖 5.12 內，說出 DF // BA 的理由•（提示：$\angle DEC$ 的度數是什麼？）

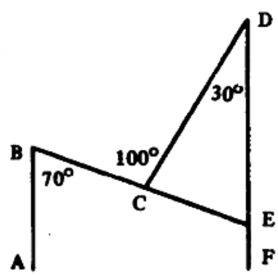

Fig. 5.12

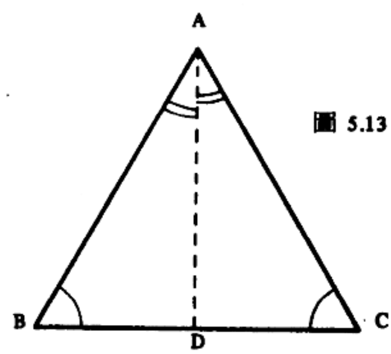

圖 5.13

4) 設 [A_6] 爲眞確，証明：
[A_{14}] 若三角形有兩角等，則這兩角的對邊也相等•
（提示：在圖 5.13 內 $\angle B = \angle C$, AD 是 $\angle A$ 的平分線；可考慮兩三角形BAD 和 CAD•）

5) 在圖 5.14 內，

$\angle C = 90°$,
BM = MC.

應用 [A_{13}] 和 [A_{14}] 証明

MB = MA.

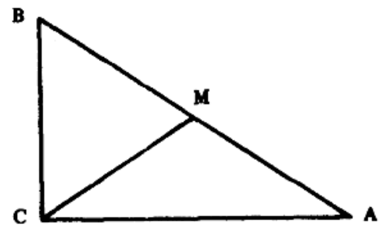

圖 5.14

5.2 無定義名詞及公設

"正方形是什麼？"
"正方形是一個矩形，它的鄰邊相等。"
"矩形是什麼？"
"矩形是一個平行四邊形，其中一角是直角。"
"但一個平行四邊形又是什麼？"
"一個平行四邊形是一個四邊形，它的兩對對邊是平行的。"
"一個四邊形又是什麼？"
"一個四邊形是平面圖形，由四條直線圍成的。"
"一條直線的定義又是什麼呢？"
....

這般尋根問底地追問名詞的意義，原則上是可以繼續至無盡期的。因此，無法開始討論。為了防止無盡期的定義要求，有些原始的名詞只好不給予定義，這些不給予定義的名詞稱為**無定義名詞**。例如在幾何學上，"點，線，面"都是無定義名詞。其他名詞都建立在無定義名詞之上。

當我們要証明某一命題時，我們要用其他命題來支持我們的理論。但這些命題的眞確性也有待証明。如此下去，這些命題也需要其他命題來証明，情形就和找尋名詞的定義相同。為了避免連串無盡期的証明和循環式的謬誤証法（例如証明A時根據B，証B時根據C，而証C時則根據A），我們必須提出一組基礎命題，假設他們眞確；它們的眞確性在直覺上無可置疑而在它們之間亦無矛盾存在。這組假設是眞確的命題，稱為**公設**。例如研究幾何學時，可有下列公設：—

[B_1] 兩不同點可定一條且祇一條直線。
[B_2] 經已知線外一點可以作唯一的直線和已知線平行。
[B_3] 兩三角形有兩邊及夾角相等則全等（這命題與節 5.11 內 [A_1] 相同）
[B_4] 一直線上兩鄰角的和是兩直角（這命題與習題 5A 內 [A_8] 相同）
[B_5] 若兩鄰角的和是兩直角則它們的外邊成一直線。

例 1

由上述五公設，在節5.11內我們可以建立 [A_2] 的眞確性，這種建立法稱爲 " [A_2] 的証法" •

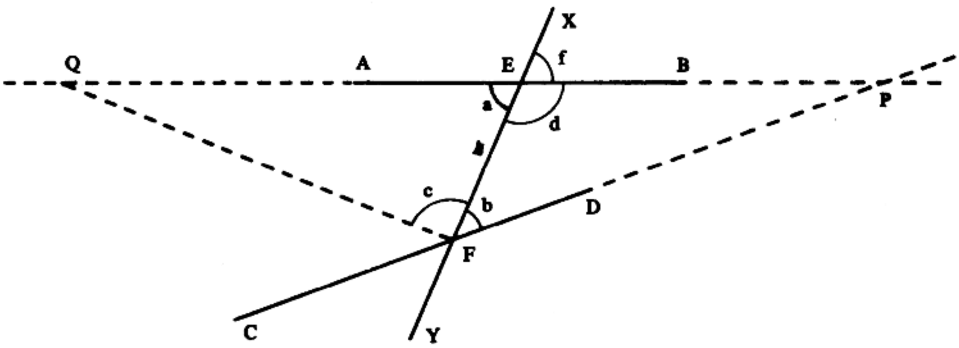

圖 5.15

在圖5.15內，直線 XY 爲另兩直線 AB, CD 截於 E 及 F 而使 $\angle a = \angle b$. 求証

AB ∥ CD.

現在我們要証明 AB 不可能不平行 CD, 這即是說，如假設 AB 不平行 CD 時，經由邏輯推理，可得一結果與假設矛盾•

現假設 AB, CD 不平行而交於一點 P, P在 XY 的右方•

在 XY 的左方，且在 BA 的延線上取一點 Q而使 EQ = FP. 則

	$\Delta QEF \cong \Delta PFE$	– – – –	由 [B_3]
	$\therefore \quad \angle c = \angle d$		
又	$\angle a + \angle d = 180°$	– – – –	由 [B_4]
	$\therefore \quad \angle c + \angle b = 180°$		
故	QFP 成一直線	– – – –	由 [B_5]

但由 [B_1], AB 與 QFP 成一直線，這是不可能的，因 AB 和 CD 是兩不同直線•這矛盾是由於假設 AB 不平行 CD，這是不對的，故

AB ∥ CD.

例 2

由公設 [B_1] 至 [B_5] 我們可以証明節 5.11 內的 [A_3] • 即証明一線截兩平行線所得任一雙錯角等•

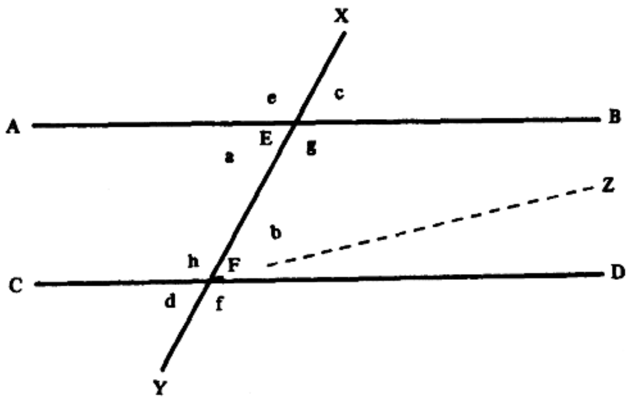

圖 5.16

在圖 5.16 內，AB ∥ CD, XY依次截AB, CD於E及F。我們要証明任一對錯角相等，現祇需証明 $\angle AEF = \angle EFD$ 便足以証其他。

設 $\angle AEF \neq \angle EFD$ ，令 $\angle EFD > \angle AEF$ ，

作一線 FZ 在 FD 與 FE 之間且 $\angle EFZ = \angle AEF$.

$\therefore$ FZ ∥ AB － － － － 由例 1.

但已知 AB 平行 CD，如是便得兩直線過F點而平行 AB，由 [B_2], FZ 和 CD 是同一直線，即 $\angle EFD$ 不大於 $\angle AEF$.

同樣方法可証明 $\angle AEF$ 不大於 $\angle EFD$ ，故

$$\angle AEF = \angle EFD.$$

習題 5D

1) 應用 [A_2] 以証明

[A_{15}]一線截兩直線，若所得兩同位角相等則此兩直線平行。

2) 在圖 5.17 內，AB ∥ XY, BC ∥ YZ.

求証 $\angle ABC = \angle XYZ$,

說明理由。

（提示：可延長其中一些直線，使與其他直線相交。）

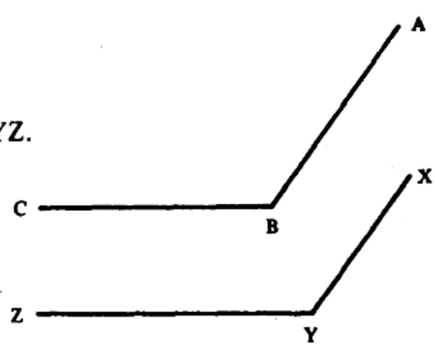

Fig. 5.17

3) 應用節 5.11 內 $[A_5]$ 以証明，一平行四邊形兩對角的平分線成一直線或平行。說明在証法內更需要那些別的假設。

4) 証明一平行四邊形兩鄰角的平分線互相垂直。

5) 在圖 5.18 內，$AB = AC, AD = AE.$
假設 $[A_{13}]$ 是眞確，求証

$$DE \parallel BC.$$

（提示：亦應用 $[A_{10}]$）

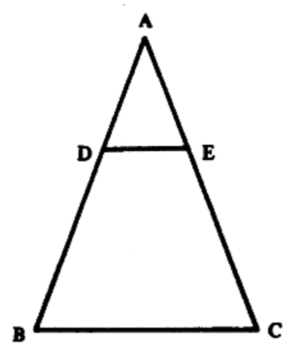

圖 5.18

例 3

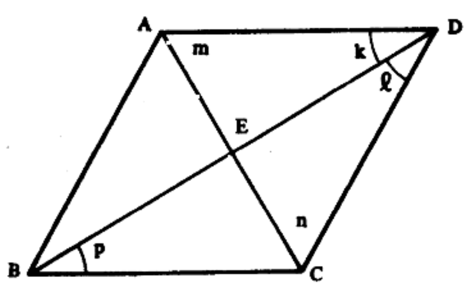

圖 5.19

假設 $[A_6]$ 和 $[A_{13}]$ 眞確，求証一菱形的對角線互相垂直。
証：

在圖 5.19 內， ABCD 是一菱形，兩對角線交於 E。
在 $\triangle BCD$ 內，$BC = CD$ ，由 $[A_{13}]$，$\angle p = \angle \ell$,

$\angle m = \angle n$ （$\because$ $AD = CD$ 且由 $[A_{13}]$）
$\angle k = \angle \ell$ （$\because$ 由 $[A_3]$ $\angle k = \angle p$, 及 $\angle p = \angle \ell$）
$AD = CD$ （菱形的各邊等長）