数 学 分 析

第一卷　第一分册

2004 年 8 月

数 学 分 析

第一卷　　第一分册

2004 年 8 月

序　言

牛顿和莱布尼兹在三个世纪以前创立了微积分学的基础，直到今天，这仍然是科学史、特别是数学史上最伟大的事件.

今天，现代数学如同一株枝叉繁茂的大树矗立在由数学分析(广义的)和代数交织在一起构成的根系上，并通过这个根系保持着它与非数学领域的产生生机和活力的基本联系. 正是由于这个原因，甚至对所谓高等数学的最朴素的认识，也把分析基础当做它的必要组成部分，并且可能因此有大量以各种不同读者为对象的叙述分析基础的书.

本书是以我在莫斯科大学力学-数学系给一、二年级学生讲过多遍的《数学分析》的讲义为基础写成的.

在莫斯科大学力学-数学系的本科数学教育中，包括其内容在内，近年来发生了明显的变化. 开设了新的必修课，对老的内容作了改变和更新. 自然的更新过程也触动了古典分析课程. 它的演化大体上有以下特征.

数学分析与跟它平行讲授的以及后继的分析、代数和几何方面的现代数学课程之间的联系变得更加紧密和自由.

这种状况促使人们把重点移到从一般数学观点看最本质的概念和方法上，并更新语言叙述使之与现代数学科学文献的语言适当接近.

另一方面，在保持数学中一般理论叙述应有的严谨性同时，对展示其自然科学源泉和应用的要求也大大提高了. 对渊源丰富并作为数学自然科学基础的古典分析来说，这样的要求是自然的.

本书与上述情况有关的特点大体上可归结如下:

在叙述的风格方面. 在每个大课题的范围内，叙述通常是采用归纳的方法，有时，从问题的提出、求解的启发性想法，一直到基本概念和形式化概括，都是这样进行的.

教程开始叙述比较详细，越往后叙述得越简单扼要.

有效的光滑分析方法是教程的主干. 在讲述理论时，我(按自己的理解)力求提炼出那些最本质的方法和事实，而避免以大大增加证明的复杂性为代价去追求对定理的一些不重要的推广.

只要对揭示事物的本质有好处，我将常常采用几何的叙述方法.

在基本课文中配备了相当多的例题，而几乎每节末尾都给出一组习题，我希望它们能真正成为基本课文、甚至其理论部分的补充. 根据波利亚(Pólya)和舍贵(Szegö)的出色经验，我常尽量把数学上很漂亮或应用上很重要的结果做成学生可以接受的成套的习题.

材料的安排不仅受布尔巴基(Bourbaki)学派的数学结构体系的支配，还受到作为统一数学教育，或更确切地说，作为自然-数学教育组成部分的分析所处地位的制约.

在内容方面. 教程分两本书(I 卷和 II 卷)出版.

现在的第一卷包括一元函数微分学、积分学和多元函数微分学.

在微分学中特别注意微分作为直标准尺在刻画变量的局部变化特征时的作用. 除了利用微分学研究函数关系(单调性、极值)的许多例子以外，还通过最简单的微分方程展示了分析语言的作用，这些微分方程是一些具体现象和与其有关的、内容极其丰富的问题的数学模型. 研究了这样一些问题(如变质量物体运动，核反应堆，大气压力，物体在有阻力的介质中的运动)，它们的解归结为一些最重要的初等函数. 我们比较完整地使用了复数语言，其中

包括欧拉(Euler)公式的推导和基本初等函数统一性的证明.

在积分学中只讲黎曼积分①,但指出了积分的各种应用,其中包括归结为反常积分(如追赶速度)或椭圆函数(在重力场中当存在约束时的运动,摆)的那些积分应用.

多变量函数微分学是相当几何化的.比如,研究了隐函数定理一些重要而有益的推论,像曲线坐标,把光滑映射和函数局部地化成典则形式(秩定理和莫尔斯(Morse)引理)以及条件极值理论.

连续函数理论和微分学的结果,以一般形式集中在两章叙述.它们自然涉及到多变量实值函数微分学.但由于技术上的原因,这两章放到了第二卷.此外,在第二卷里还讲述了多变量函数的积分学(这是主要内容),于是,它有一定的完整性和独立性.

关于第二卷的完整介绍将放在其序言里,这里只补充一点,即除已经列举的材料外,它还包括函数项级数,含参变量的积分和渐近展开.

现在谈谈某些个别问题.

关于导论.我没有写课程概况介绍,因为大多数新入学的大学生在中学已经学过微积分初步以及它的应用,他们未必希望再读一个开场白.代替开场白,在头两章我致力于使过去的中学生关于集合和函数的概念,关于逻辑符号的运用以及关于实数理论方面的知识,在数学上达到一定完善的程度.

这些内容涉及的是分析的形式化基础,从而它首先是为数学系那样一些大学生写的,他们打算深究古典分析中用到的概念和原理的逻辑结构.数学分析本身的内容从第三章开始,因此,希望尽快掌握有效方法和看到这些方法的应用的读者,在读第一遍时,可以从第三章开始,如果什么地方觉得不清楚,产生了问题,同时

① 测度论和勒贝格(Lebesgue)积分在力学-数学系另外单独设课.

又想把它弄明白的话，再去翻阅前边的内容．对此我也给予了注意，并在头两章预先给出了有关问题的解答．

关于内容安排．两本书的内容分做许多章，都完整地编了号。节是在每一章范围内编号的，而一节中各段在这一节范围内编号。为了逻辑上更加确切，我们把定理、命题、引理、定义和例子都特别标了出来，而为查找方便，把它们在一节范围内编了号．

关于文献．再一次指出，古典分析如同古典音乐著作一样有且将有许多演奏者，他们各自需要分析的不同方面或对它全貌的一定认识．考虑到这一点，为读者查阅，在第一卷末尾列出了最流行的国内的和翻译的数学分析教科书和教学参考书，它们的对象是对数学要求较多的高等学校学生．

这部书首先是为那些既希望得到基本定理在逻辑上(应有的)无懈可击的证明，同时又对它们在数学以外的生活感兴趣的读者写的．

关于辅助性材料．书中有几章是作为古典分析本来的边缘写的．一方面包括前面提到的第一、二章，其内容是数学分析的形式化基础；另一方面包括第二卷第九、十、十五章，其中给出了关于连续性的理论、微分和积分学的现代观点．至于这几章中哪些内容应当纳入课程，要看听众水平如何，而且应由教员决定．但是，这里所引进的一些基本概念，通常在任何一门数学课程中都是有用的．

最后，我对在本书写作过程中在业务上给我以友好帮助的同志表示感谢，这些帮助对我非常珍贵和有益．

这套教材是相当详尽的，在许多方面与一些后继的现代大学数学课程相呼应，如微分方程、微分几何、复变函数论、泛函分析．在这些方面，我与 В. И. 阿勒诺尔德(В. И. Арнольд)，特别是与 С. П. 诺维柯夫(С. П. Новиков)在数学研究所试验组共同工作

期间的许多接触和讨论，对我是极其有益的.

我得到了莫斯科大学力学-数学系数学分析教研室主任H. B. 叶菲莫夫(Н. В. Ефимов)的许多建议.

我还对我系和我教研室的同事们表示感谢，他们给我的讲义胶印版提出了许多意见.

在本书写作过程中，我的学生把他们记的我最后一段讲课的笔记借给我使用，为此，我向笔记的主人们表示感谢.

我深深感谢评论家Л. Д. 库德里雅符采夫(Л. Д. Кудрявцев)，В. П. 彼得连柯 (В. П. Петренко)，С. Б. 斯捷史肯(С. Б. Стечкин)的建设性意见，这些意见的大部分在提供给读者的课文中都作了考虑.

В. 卓里奇(В. Зорич)

1980年

目　录

第一章

一些通用的数学概念与记号

§1. 逻辑符号

1. 关系与括号 本书的语言，像大多数数学教科书那样，由普通的语言及一串用以阐明理论的专用符号构成．除了这些按照需要而引入的专用符号之外，我们还要利用①通用的数学逻辑符号 $\neg, \wedge, \vee, \Longrightarrow$、$\Longleftrightarrow$，它们分别表示否定词《非》，《并且》，《或》，《蕴含》，《等价》这些词．

作为例子，我们举出代表三种不同旨趣的意见：

L 如果采用适合于发现的记号，……那么，思考的劳动就能大大地缩减．

(莱布尼兹②)

P 数学是把不同实体统一命名的艺术．

(庞加莱③)

G 自然界这部巨著是用数学语言写成的．

---

① 在逻辑学中常使用符号&，而不用$\wedge$．蕴含符号$\Longrightarrow$常写成$\longrightarrow$，而等价关系写做$\leftarrow\rightarrow$或$\longleftrightarrow$．但是为了不更换分析中传统的极限记号$\longrightarrow$，在本教程中、仍使用上面给出的记号．

② Leibniz(1646—1716)是杰出的德国学者、哲学家和数学家．他与牛顿一起享有发现无穷小分析基础的荣誉．

③ Poincaré(1857—1912)是法国数学家，他的卓越思想革新了数学的许多部门并在数学物理中得到应用．

(伽利略①)

这时，相应于上述记号，

写　法	表　示
$L \Longrightarrow P$	L蕴含P
$L \Longleftrightarrow P$	L与P等价
$((L\Rightarrow P)\wedge(\neg P))\Longrightarrow(\neg L)$	若P由L推出，而P不真，则L不真.
$\neg((L\Longleftrightarrow G)\vee(P\Longleftrightarrow G))$	G既不等价于L，也不等价于P.

我们注意，由较简单的命题构成复杂命题时，使用了括号，正像写代数式那样，它们起着有关结构层次的作用．同代数中一样，为了节省括号，必须约定"运算次序"．为此目的，我们对符号规定如下的优先次序：

$$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \Longrightarrow,\ \Longleftrightarrow.$$

在这样约定下，式子 $\neg A\wedge B\vee C\Longrightarrow D$ 应解释成

$$(((\neg A)\wedge B)\vee C)\Longrightarrow D,$$

而 $A\vee B\Longrightarrow C$ 应解释成 $(A\vee B)\Longrightarrow C$，而不是 $A\vee(B\Longrightarrow C)$.

对于表示A蕴含B或B由A推出的写法 $A\Rightarrow B$，我们常常赋予它另一种文字解释：B是A的必要特征或必要条件，同样有，A是B的充分条件或充分特征．于是关系

$$A\Longleftrightarrow B$$

可用下面任一种方法去解释：

对于B，A既是必要的又是充分的；

B成立当且仅当A成立；

若且仅若B成立，有A成立；

---

① Galileo(1564—1642)是意大利学者，伟大的自然科学家．他的工作成为后来关于空间和时间的全部物理概念的基础．他是现代物理学之父.

A 与 B 等价.

因此，写法 $A \Longleftrightarrow B$ 表示 A 蕴含 B，同时 B 蕴含 A.

对式子 $A \wedge B$ 中连接词“并且”的用法不需作解释了.

然而应注意，在式子 $A \vee B$ 中的连接词“或”，不是区分连接词，也就是说只要命题 A，B 中有一个为真，$A \vee B$ 就正确. 例如，设 x 是使 $x^2-3x+2=0$ 的实数. 这时可以说下列关系成立：

$$(x^2-3x+2=0) \Longleftrightarrow (x=1) \vee (x=2).$$

2. 关于证明的注记 典型的数学论断具有 $A \Rightarrow B$ 这种形式，这里 A 是前提，B 是结论，这论断的证明是建立一小串蕴含关系

$$A \Rightarrow C_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow C_n \Rightarrow B,$$

其中每个蕴含关系或为公理，或为已证明了的断语①.

在证明中，我们将使用古典的推证法则：若 A 真且 $A \Rightarrow B$，那么 B 也真.

在用反证法证明时，我们还将使用排中律，根据它，不论命题 A 的内容是什么，$A \vee \neg A$（A 或非 A）总是正确的. 因此，我们同时还采用 $\neg(\neg A) \Longleftrightarrow A$，即一个命题两次否定等价于原命题.

3. 某些专门记号 为方便读者及简化文字叙述，约定分别用记号◀及▶来表示证明的开始和结束.

还约定，当方便时，用专门的记号 $:=$（据定义等于）引进定义，其中两点放在被定义的对象一边.

例如 $$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f, P, \xi)$$

是用右端定义左端. 而右端的含义认为是已知的.

类似地，对已有定义的式子，也用这个记号引进简缩记法. 例如，

---

① $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ 是 $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ 的缩写.

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i =: \sigma(f, P, \xi)$$

是用记号 $\sigma(f, P, \xi)$ 表示左端的专门的和式.

4. 最后的注记 注意，在这里我们实际上只谈到了记法，并没有分析逻辑推导的形式，也没涉及那些构成数理逻辑研究对象的真实性、可证明性、可推导性等深刻问题.

如果我们没有形式逻辑，怎么建立数学分析呢？这里使人得到一些安慰的是，我们知道的，或说得更恰当些，我们能掌握的，总比完成形式化所需要的多些. 这可以用一句格言来说明：当你要求一只蜈蚣解释它是怎样控制那么多条腿的时候，它早已学会走路了.

整个科学的经验使我们断定，昨天认为明显、简单且不能分的东西，今天就将受到重新审查或把它精确化. 数学分析的许多概念，例如在十七、十八世纪就已发现的许多重要定理和工具就是这样的（无疑，它们还将受到审查和精确化）. 然而，只是在创立了极限理论，以及为使它的逻辑完整所必需的实数理论（在十九世纪）之后，数学分析才获得了现代形式化的、含义确切的、从而为人们理解的形式.

在第二章中，我们正是按实数理论的这种水平开始建造数学分析的整个大厦.

练　　习

✓用 1 表示命题正确，用 0 表示命题不正确. 这时，对命题 $\neg A$, $A\wedge B$, $A\vee B$, $A\Rightarrow B$ 中的每一个，可建立所谓真假表，它依据命题 A, B 的真实性，指出了上述命题的真实性. 这些表是逻辑运算 $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ 的形式定义. 这就是

$\boxed{\neg A}$

A	0	1
$\neg A$	1	0

;

$\boxed{A\wedge B}$

$A \backslash B$	0	1
0	0	0
1	0	1

;

$\boxed{A \vee B}$

$A \backslash B$	0	1
0	0	1
1	1	1

;

$\boxed{A \Rightarrow B}$

$A \backslash B$	0	1
0	1	1
1	0	1

a. 验证这些表中所指示的一切是否都与你关于相应的逻辑运算的通常观念相符合.

注意,若A不真, 则$A \Rightarrow B$总是真的. 数学中所采用的这种蕴含定义与生活中的含义有些差别.

试证下面的简单关系成立; 它们在数学的论证中极为重要且有广泛的应用.

b. $\neg(A \wedge B) \Longleftrightarrow \neg A \vee \neg B$.

c. $\neg(A \vee B) \Longleftrightarrow \neg A \wedge \neg B$.

d. $(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.

e. $(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow \neg A \vee B$.

f. $\neg(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow A \wedge \neg B$.

§2. 集与集的初等运算

1. 集合的概念 从上世纪末到本世纪初,集合论语言成为最通用的数学语言. 这甚至有人在对数学所下的一种定义中说, 数学就是研究集合上各种结构(关系)的科学①.

“所谓集合,是我们直观感到或意识到的,由确定的、彼此不同的对象结合在一起的联合体”; 集合论的奠基人乔治·康托尔②就是这样描述集合概念的.

康托尔的描述,当然不能叫做定义, 因为他是向(以前未定义过的)比集合概念更复杂的概念求援. 这种描述的目的是把这个

① Bourbaki 在其一本书的补充文献表中列出的一本书, 名为“数学的结构”.

② G. Cantor(1845—1918)——德国数学家,无穷集理论的创始人, 在数学中使用集合论语言的鼻祖.

概念与其它概念联系起来进行阐明.

康托尔的(或叫做“朴素的”)集合论的基本前提可归结为:

1° 集合可由任意不同的事物组成;

2° 集合由构成它的事物集聚而唯一确定;

3° 任何性质确定具有该性质的事物的集合.

若 x 是一事物, P 是一性质, $P(x)$ 表示 x 有性质 P. 用 $\{x|P(x)\}$ 表示具有性质 P 的一切事物的类.

组成类或集合的事物,叫做类或集合的元素.

“类”,“族”,“集体”,“组”等字,在朴素集合论中作“集合”的同义词来使用.

下面的例子说明这些术语的应用:

从“a”到“я”的字母的集合;

阿达玛的妻子的集合;

十个数码所成的组;

豆科植物族;

地球上沙粒的集合;

平面上与其上二已知点等距离的点的全体;

集合的族;

所有集合的集合.

集合课题的确定性在程度上可能具有的差别,向我们提示,集合这个概念,可不是那么简单和不出麻烦的概念.

事实上,例如一切集合的集合这个概念,就会产生矛盾.

◀ 设 M 为一集合,用 $P(M)$ 表示 M 不以自己作为元素的集的一种性质.

考查具有性质 P 的集合的类 $K=\{M|P(M)\}$.

如果 K 是集合,那么,或者 $P(K)$ 为真,或者 $\neg P(K)$ 为真. 然而,二者择一对于 K 是不可能的. 实际上, $P(K)$ 不成立,因为由