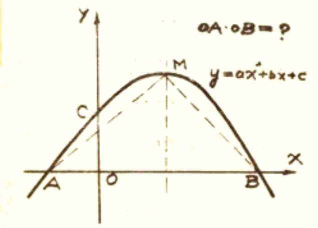
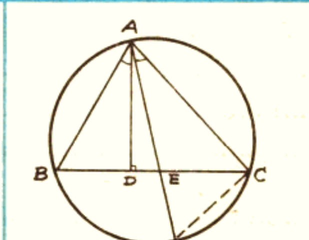
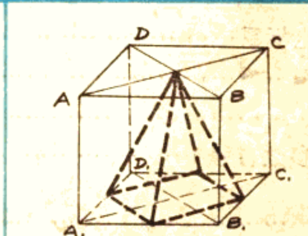
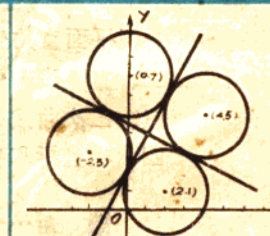
中学数学课外读物

丹东市教师进修学院
（资料编写组）









1978.3

目　　录

代　　数

平面几何

立体几何

三　　角

解析几何

代　　数

一、数的概念的发展

一、内容提要

1、数的概念的扩张

- 复数
  - 实数
    - 有理数
      - 整数
        - 正整数……有限小数
        - 零……有限小数
        - 负整数……有限小数
      - 分数
        - 正分数
        - 负分数
        - ……
          - 可以化成十进分数的……有限小数
          - 不能化成十进分数的……无限循环小数（无限小数）
    - 无理数
      - 正无理数
      - 负无理数
      - ……无限不循环小数（无限小数）
  - 虚数

2、数轴：三要素——方向、原点、长度单位。任何实数都可以用数轴上的点来表示；反之，数轴上任何一点都表示一个实数（这个性质叫实数的连续性）。

3、相反数：只差一个符号的数，是互为相反的数。零的相反数是零。若一个数和它的相反数相等，则这个数一定是零。

4、绝对值：设a为实数，则其绝对值为：

$$|a|=\sqrt{a^2}=\begin{cases} a & (a>0) \\ 0 & (a=0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$$

5、实数的运算：

实数的四则运算律：

加法：$\begin{cases} \text{交换律：} a+b=b+a \\ \text{结合律：} a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c) \end{cases}$

乘法：$\begin{cases} \text{交换律：} ab=ba \\ \text{结合律：} abc=(ab)c=a(bc) \\ \text{对加法分配律：} (a+b)c=ac+bc \end{cases}$

6、实数的乘方：实数a的n次方，就是求n个a的乘积，且满足：

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$，　　$a^m \div a^n = a^{m-n}$，　$(m>n)$

$(a^m)^n = a^{mn}$，　　$(ab)^n = a^n b^n$，

$\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$ $(a\neq 0)$ 。　　$(m, n$为正整数$)$

7、实数的开方：实数a开n次方，就是求一个数x，使$x^n = a$。我们用符号$\sqrt[n]{a}$来表示，就是$(\sqrt[n]{a})^n = a$。

因为任何实数的偶次方都不是负数，所以在实数范围内，负数不能开偶次方。正数正的方根叫算术根。

二、范　例

1、x为何值时，$\frac{|x|}{x}$的值是1？是-1？无意义？　　（广西77年高考试题）

解：当$x>0$时，　$\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$

当$x<0$时，　$\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$

当$x=0$时，　$\frac{|x|}{x}$没有意义。

2、在什么条件下$\frac{y}{2x}$（1）是正数；（2）是负数；（3）是零；（4）无意义？　　（天津77年高考试题）

解：（1）当x与y同号时为正数；

（2）当x与y异号为负数；

（3）当$y=0$，　$x\neq 0$时为零；

（4）当$x=0$时　无意义。

3、计算$(-3)^2 - \left(-1\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{2}{9} - 6 + \left|-\frac{2}{3}\right|$　　（广东77年高考试题）

解：原式$=9-\left(-\frac{27}{8}\right)\times\frac{2}{9}-6\times\frac{3}{2}=9-\left(-\frac{3}{4}\right)-9=\frac{3}{4}$ 。

4、当$x\geq 2$时，化简$\sqrt{x^2}-\sqrt{(2-x)^2}$

解：原式$=x-(x-2)=x-x+2=2$ 。

5、化简：$\sqrt{4-12a+9a^2}$　　（内蒙77年高考试题）

$$解：原式=\sqrt{(2-3a)^2}=\begin{cases} 2-3a & (2-3a>0 \quad 即a<\frac{2}{3}) \\ 0 & (2-3a=0 \quad 即a=\frac{2}{3}) \\ 3a-2 & (2-3a<0 \quad 即\ a>\frac{2}{3}) \end{cases}$$

6、化简：$|6-a|-|2a+1|+\sqrt{a^2+10a+25}$ $(a<-5)$　（陕西77年高考试题）

解：$\because a<-5$　　$\therefore a+5<0$，$6-a>0$，$(2a+1)<0$。

$\therefore$原式$=(6-a)-[-(2a+1)]+\sqrt{(a+5)^2}$

$=(6-a)+2a+1-(a+5)=6-a+2a+1-a-5=2$ 。

7、若 $(x-y)^2+(2y+1)^2=0$。试求x、y的值。

解：$\because$ $(x-y)^2\geq 0$　$(2y+1)^2\geq 0$　即两个非负数之和为零。则它们都为零。

$$\therefore\begin{cases}x-y=0\cdots\cdots\cdots\cdots & (1)\\ 2y+1=0\cdots\cdots\cdots\cdots & (2)\end{cases}\qquad \text{解之：}x=-\frac{1}{2},\ y=-\frac{1}{2}.$$

注意：这里提供了数学论证中经常运用的一种方法，即几个非负数之和为零，则每个都是零。

三、习　题

1、下列各式在a是什么数时成立？为什么？

（1）$|a|=a$；（2）$|a|=-a$；（3）$|a|=|-a|$；（4）$a=-a$。

2、$\sqrt{(3-x)^2}=?$　　（山东77年高考试题）

3、计算$\sqrt{a^2-2ab+b^2}$　$(b>a)$　　（辽宁77年高考试题）

4、当$x<0$时，化简：$\sqrt{x^2}+\sqrt{(2-x)^2}$

5、当$x<1$时　化简：$\sqrt{(x-3)^2}-\sqrt{x^2}$

6、计算：$\sqrt{(-3)^2}$；$\sqrt[3]{(-27)^3}$；　　（湖北77年高考试题）

当$m\leqslant 1$时　$\sqrt{(m-1)^2}$

7、若$a<0$，则$\sqrt{a^2}+a=$（　　）　　（江西77年高考试题）

8、若$\left|\dfrac{a+2b+3}{b+1}\right|+3(a+3b)^2=0$　求a、b=？

9、计算：$\left(\sqrt{\dfrac{x+2}{x+1}}\right)^2$与$\sqrt{\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^2}$　　（江苏77年高考试题付题）

10、计算：（1）$1\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+0.3\times1.4+0.6$　　（黑龙江高考予选试题）

（2）$-\frac{1}{3}+2\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2-3^2+\left(-1\frac{1}{2}\right)$

11、计算：（1）$\frac{2}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+(-1)^{26}$；　（2）$-(a^3)^2$；

（3）$-3\sqrt{2}-5\sqrt{2}$；　（4）$\sqrt{(-5)^2}$；

（5）$(x-2y)^2$。　　（天津中专试题）

12、计算：$\left(-2\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{10}\times\left(-3\frac{1}{3}\right)-(-4)^4+[43+(-3)^3]$

13、化简：$(m-1)\cdot\sqrt{\dfrac{m+1}{(m-1)^2}}$　　（12、13是湖南中专试题）

*14、若 $4x^2-4x-15\leq 0$　试化简$\sqrt{4x^2+12x+9}+\sqrt{4x^2-20x+25}$

*15、若$|x-2|<3$　解方程：$|x+1|+|x-5|+|x-3|=8$

*16、假设x、y、z都是实数，又知道它们满足$x+y+z=a$，　$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2}{2}$　$(a>0)$

求证：　$0\leqslant x\leqslant \frac{2}{3}a$，　$0\leqslant y\leqslant \frac{2}{3}a$，　$0\leqslant z\leqslant \frac{2}{3}a$

（57年北京数学竞赛试题）

*17、若$x>0$，$y>0$，且$\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})=\sqrt{y}(3\sqrt{x}+10\sqrt{y})$

试求：$\dfrac{5x+2\sqrt{xy}+2y}{x+\sqrt{xy}+3y}$的值

18、求　$\dfrac{1}{100\times 101}+\dfrac{1}{101\times 102}+\dfrac{1}{102\times 103}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{149\times 150}$

（提示：$\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$）　　（浙江77年高考试题）

二、代　数　式

一、内容提要

（一）多项式的四则运算

1、有关的一些概念：代数式、整式、分式、有理式、无理式的意义（见教材），就多项式而言，有单项式、二项式、多项式等。

2、整式的四则运算（见教材）

3、乘法公式：

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

（二）多项式的因式分解：

1、因式分解的意义：就是把一个多项式化成几个既约因式相乘的形式。

2、多项式分解因式的方法：

提取公因式法

注：凡难度较大，要求较高的习题或补充内容均带有*号。

分组分解法（包括集项分解、添项或破项分解）。

应用公式分解法

应用解方程分解法（包括十字相乘法）

（三）分　式

（1）分式的基本性质，$\frac{a}{b}$表示分式，m表示代数式，且（$m\neq0$），

则：$\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}$　（通分）　　$\frac{a}{b}=\frac{a+m}{b+m}$　（约分）

（2）分式的四则运算（见教材）

（3）繁分式的化简：利用分式的基本性质和运算法则逐步化简。

（四）根式的运算

1、根式的基本概念与根式的基本性质，正实数的偶次方根在实数范围内具有双值性，为研究方便取其算术根，因之要注意根式文字所代表的数的数值范围。如$\sqrt{y-1}$内$y\geq1$，又如$\sqrt{(x-y)^2}$，当$x\geq y$时取$x-y$，当$x<y$时取$y-x$。

根式的基本性质：$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$（p为正整数，$a>0$　$\sqrt[n]{a^m}$必为算术根），在算术根的基础上，$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$；$\sqrt[n]{a^{mn}}=a^m$；$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$。其中a、b、c为非负数，且最后一式中$b\neq0$。

2、根式的化简：在单项式中若开方不可能，即移因式于根号外，有时为了某种需要而移因式于根号内。将分母有理化或化简根指数与根底数的乘方指数。

3、明确同类根式与同次根式的区别，并注意前者在加减运算中的作用，后者在乘除运算中的作用。

4、*二项式　$A\pm\sqrt{B}$的平方根公式：

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

$$(A>0、B>0、A^2>B)$$

例：$\sqrt{6+4\sqrt{2}}=\sqrt{6+\sqrt{32}}=\sqrt{\frac{6+\sqrt{36-32}}{2}}+\sqrt{\frac{6-\sqrt{36-32}}{2}}=2+\sqrt{2}$

二、范　　例

1、化简：$\frac{a^{2n+1}-6a^{2n}+9a^{2n-1}}{a^{n+1}-4a^n+3a^{n-1}}$　　（福建77年高考试题）

解：原式$=\frac{a^{2n-1}(a^2-6a+9)}{a^{n-1}(a^2-4a+3)}=\frac{a^{2n-1}(a-3)^2}{a^{n-1}(a-1)(a-3)}=\frac{a^n(a-3)}{a-1}$

2、化简：$\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a^2}{a^2+2ab+b^2}\right)+\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a^2}{a^2-b^2}\right)$（上海77年高考试题）

解：　原式 $=\dfrac{a(a+b)-a^2}{(a+b)^2}+\dfrac{a(a-b)-a^2}{(a+b)(a-b)}=\dfrac{ab}{(a+b)^2}\cdot\dfrac{(a+b)(a-b)}{-ab}$

$=\dfrac{b-a}{a+b}$.

3、把 $2x^5-32xy^4$ 分解因式

解：原式 $=2x(x^4-16y^4)=2x(x^2+4y^2)(x+2y)(x-2y)$

注意：① 多项式各项有公因式的首先提取公因式。

② 分解到每一个因式不能再分解（一般与数的范围有关）为止。

4、在实数范围内把 $x^4+y^4+(x+y)^4$ 分解因式

解：原式 $=[(x^2+y^2)^2-2x^2y^2]+(x+y)^4$

$=\{[(x+y)^2-2xy]^2-2x^2y^2\}+(x+y)^4$

$=(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2+(x+y)^4$

$=2[(x+y)^4-2xy(x+y)^2+x^2y^2]$

$=2[(x+y)^2-xy]^2$

$=2(x^2+xy+y^2)^2$。

5、分解因式：$x^4-2x^2y-3y^2+8y-4$　　（江苏77年高考试题）

解：原式 $=(x^4-2x^2y+y^2)-(4y^2-8y+4)$

$=(x^2-y)^2-(2y-2)^2$

$=(x^2-y+2y-2)(x^2-y-2y+2)$

$=(x^2+y-2)(x^2-3y+2)$。

6、* 若 $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$

求 $\dfrac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ 的值（$a>0$，$b>0$）

解：因 $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2-4\right)}=\sqrt{\dfrac{(a-b)^2}{4ab}}=\dfrac{|a-b|}{2\sqrt{ab}}$

∴ 原式 $=2b\sqrt{x^2-1}\cdot(x+\sqrt{x^2-1})$

$=2b(x\sqrt{x^2-1}+x^2-1)$

$=2b\left[\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a+b}{\sqrt{ab}}\cdot\dfrac{|a-b|}{2\sqrt{ab}}+\dfrac{(a-b)^2}{4ab}\right]$

$=\dfrac{1}{2a}(a-b)[\pm(a+b)+(a-b)]$

$=\begin{cases}a-b & (a\geq b\text{时})\\ \dfrac{b}{a}(b-a) & (a<b\text{时})\end{cases}$.

7、化简：$\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}}}$　　并求 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时的值

解：原式 $=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1\cdot(1-x)}{(1-\frac{1}{1-x})(1-x)}}}=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1-x}{-x}}}$

$=\dfrac{1}{1-\dfrac{1\cdot x}{(1+\frac{1-x}{x})\cdot x}}=\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x+1-x}}=\dfrac{1}{1-x}$

当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时， 原式 $=\dfrac{1}{1-(-\frac{1}{2})}=\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}$。

8、计算： $\dfrac{2a}{a-3b}-\dfrac{6ab-24b^2}{a^2-7ab+12b^2}$ （甘肃77年高考试题）

解：原式 $=\dfrac{2a}{a-3b}-\dfrac{6b(a-4b)}{(a-3b)(a-4b)}=\dfrac{2a-6b}{a-3b}=\dfrac{2(a-3b)}{a-3b}=2$。

9、计算： $\dfrac{\sqrt{20}}{8}-\sqrt{\dfrac{9}{5}}+\dfrac{5}{\sqrt{45}}$ （广东77年高考试题）

解：原式 $=\dfrac{2\sqrt{5}}{8}-\dfrac{3}{\sqrt{5}}+\dfrac{5}{3\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{4}-\dfrac{3\sqrt{5}}{5}+\dfrac{5\sqrt{5}}{15}$

$=\dfrac{15\sqrt{5}}{60}-\dfrac{36\sqrt{5}}{60}+\dfrac{20\sqrt{5}}{60}=\dfrac{-\sqrt{5}}{60}$ 。

10、化简： $\sqrt{12}-\sqrt{48}-3\sqrt{3}$ （宁夏77年高考试题）

解：原式 $=2\sqrt{3}-4\sqrt{3}-3\sqrt{3}=-5\sqrt{3}$。

11、已知： $m+\dfrac{1}{m}=2$

求： $m^2+\dfrac{1}{m^2}=?$ $m^3+\dfrac{1}{m^3}=?$ （贵州77年高考试题）

解：$\because m^2+\dfrac{1}{m^2}=\left(m+\dfrac{1}{m}\right)^2-2m\cdot\dfrac{1}{m}=2^2-2=4-2=2$

又 $\because m^3+\dfrac{1}{m^3}=\left(m+\dfrac{1}{m}\right)^3-\left(3m^2\cdot\dfrac{1}{m}+3m\cdot\dfrac{1}{m^2}\right)$

$=2^3-\left(3m+3\dfrac{1}{m}\right)=8-3\left(m+\dfrac{1}{m}\right)=8-3\times2=2$。

12、设 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ 及 $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=0$，

求证： $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}\right)^2+\left(\dfrac{z}{c}\right)^2=1$

〔证〕$\because\left(\dfrac{x}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b}\right)^2+\left(\dfrac{z}{c}\right)^2=\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)^2$

$$-2\left(\frac{xy}{ab}+\frac{yz}{bc}+\frac{xz}{ac}\right)$$

又 $\because \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ 两边乘以$\frac{xyz}{abc}$

$$\therefore \frac{yz}{bc}+\frac{xz}{ac}+\frac{xy}{ab}=0$$

$$\therefore \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1-2\times 0=1.$$

13、设x、y、z为三个互不相等的实数，且 $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$

求证：$x^2y^2z^2=1$ （浙江77年高考试题）

证：因 $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}$ 故$x-y=\frac{y-z}{yz}$

又因$x\neq y$ 即$x-y\neq 0$ 所以$yz=\frac{y-z}{x-y}$………（1）

同理：从 $y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$ 可推出 $zx=\frac{z-x}{y-z}$………（2）

又可从 $z+\frac{1}{x}=x+\frac{1}{y}$ 可推出 $xy=\frac{x-y}{z-x}$………（3）

(1)×(2)×(3)：$x^2y^2z^2=\frac{y-z}{x-y}\cdot\frac{z-x}{y-z}\cdot\frac{x-y}{z-x}=1.$

14、若n为正整数，试证：$(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)+1$ 必为平方数

证：$(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)=(n+1)(n+4)(n+2)(n+3)$

$=(n^2+5n+4)(n^2+5n+6)=[(n^2+5n+5)-1][(n^2+5n+5)+1]$

$=(n^2+5n+5)^2-1$

所以 原式$=(n^2+5n+5)^2$.

三、习 题

1、试指出下式错误：

（1）$5a+2b=7ab$; （2）$3y^2-y^2=3$;

（3）$4a\cdot 5a=20a$; （4）$2x^2\cdot 8x^3=16x^6$;

（5）$-(-xy)^2=x^2y^2$ （6）$(6xy)^2=12x^2y^2$

（7）$a^8+a^4=a^2$; （8）$(a^4)^2=a^6$;

（9）$(-a-b)(a+b)=-a^2-b^2$;

（10）$(x+y)(x^2+xy+y^2)=x^3+y^3$.

2、下列各对式子在$a=b$时是否相等？为什么？在$a\neq b$时是否相等？为什么？

（1）$(a-b)^2$和$(b-a)^2$；　（2）$(-a-b)^2$和$(a+b)^2$；

（3）$(a+b)(a-b)$和$(b+a)(b-a)$；

（4）$(b+a)(b-a)$和$(-a+b)(-a-b)$。

3、计算下式：

（1）$(1-x)(1+x+x^2)$；　（2）$(1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4)$；

（3）$(-x+\sqrt{3}y^3)^2-(-x-\sqrt{3}y^3)^2$；

（4）$\left(\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{3}b^3\right)^3$。

4、把下列各式分解因式

（1）$-4x^3y+6x^2y^2-8xy^3$；　（2）$5(x-y)^3-10(y-x)^2$；

（3）x^4-2x^2+1；　（4）$9(m+n)^2-(m-n)^2$；

（5）$x^3z-6x^2yz+5xy^2z$；　（6）x^3+2x^2-x-2；

（7）$a^2+2ab+b^2-1$；　（8）$x^2+y^2+z^2+2yz+2zx+2xy$；

（9）$x^3y-5x^2y+3xy+9y$　（丹东78年二年级竞赛试题）

*（10）x^4-11x^2+1；　*（11）a^3+3a^2+3a-7；

*（12）x^3-7x+6；　*（13）$x^4+x^2-2ax-a^2+1$；

*（14）$4x^2-4xy-3y^2-4x+10y-3$；　*（15）$a^{12}-b^{12}$；

*（16）$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$。

5、计算下列各式

（1）$x-\frac{1}{1-x}-\frac{x^3-3x+1}{x^2-1}$，

（2）$\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\frac{c+a}{(a-b)(b-c)}$；

（3）$\frac{(a^2-b^2)^2}{a^3+b^3}\div\frac{(b+a)^2}{a^2-ab+b^2}\times\frac{1}{(b-a)^2}$，

（4）$\left[\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)\div(x+y)+x\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)\right]\div\frac{1+x}{y}$。

6、化　简

（1）$\dfrac{\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}}$；　（2）$2+\dfrac{2}{2+\dfrac{2}{2+\dfrac{2}{x-1}}}$。

7、计算并化简下列各式

（1）$\sqrt{12}-\left(\sqrt{27}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$；

（2）$\frac{2}{3}a\sqrt{9a}+6a\sqrt{\frac{a}{4}}-a^2\sqrt{\frac{1}{a}}$，　（3）$\frac{\sqrt{27}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{12}}$，

(4) $\dfrac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}}+\dfrac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}}$；

(5) $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；

(6) $\left(\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$；

*(7) $\left(\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}\right)\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-1}-\dfrac{1}{x}\right)$。

$(0<x<1)$（北京57年竞赛试题）

8、如果 $x=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，　　$y=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，

求多项式$3x^2-5xy+3y^2$的值。

*9、应用配方法化简下列根式

(1) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$；　(2) $\sqrt{9+4\sqrt{2}}$；　(3) $\sqrt{\sqrt{30}+\sqrt{32}}$；

(4) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$。

提示：后两个根号先计算。

10、计算：　$\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}+\dfrac{2ab}{a^2-b^2}$。　$(a\neq\pm b)$（青海77年高考试题）

11、分解因式：x^2y-2y^3　（河北77年高考试题）

12、分解因式：$x^4+x^2y^2+y^4$　（湖北77年高考试题）

13、计算：　$\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^3\cdot\sqrt[3]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-\frac{5}{6}}$。（湖北77年高考试题）

14、计算：　$\left(\dfrac{1}{m-1}-\dfrac{3}{m^2+m-2}\right)\div\dfrac{m-1}{m+2}$。　（天津77年中专试题）

15、计算：　$\sqrt{75}-2\sqrt{0.02}+3\sqrt{\dfrac{4}{27}}-\sqrt{32}$。　（湖南中专试题）

*16、化简：　$\left(\dfrac{m+\sqrt{m^2-n^2}}{m-\sqrt{m^2-n^2}}-\dfrac{m-\sqrt{m^2-n^2}}{m+\sqrt{m^2-n^2}}\right)\div\dfrac{4m\sqrt{m^2-n^2}}{m^2}$。

*17、化简：　$\left(\sqrt{ab}-\dfrac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right)\left(\dfrac{-a+b}{\sqrt{4ab}-2b}\right)+\dfrac{a+2a+3a+\cdots+na}{n^2-2n-3}$

*18、设 $\dfrac{x-y}{x+y}=a$　$\dfrac{y-z}{y+z}=b$　$\dfrac{z-x}{z+x}=c$

求证：$(1-a)(1-b)(1-c)=(1+a)(1+b)(1+c)$。

提示：$\because\dfrac{x-y}{x+y}=a$，　得$\dfrac{1+a}{1-a}=\dfrac{x}{y}$

19、求$\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{4}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{6}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2n-2}+\sqrt{2n}}$。($n$为大于1的整数)

（丹东78年二年级竞赛试题）

三、方　　程

一、内容提要

1、恒等式与方程：

若在两个代数式里不论用任何数值（不使组成等式的代数式失去意义）代替其中的字母，它们都是相等的，如$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$等叫恒等式。

含有未知数的等式叫方程。如$x^5+x+2=0$

*2、方程变形的四个基本定理：

①方程的两边都加上（或都减去）同一个数或者同一个整式所得的方程与原方程同解。

②方程的两边都乘以（或都除以）不等于零的同一个数，所得的方程和原方程同解。

③方程的两边都乘以同一个整式，所得的方程对原方程来说可能产生增根，其增根是使所乘整式为零的值。

④方程的两边都乘方同一次数，所得的方程对原方程来说可能产生增根，其增根是使原方程左右两边不等的值。

3、方程的增根与遗根

①由方程两边消去相同的项，所得新方程的根如使消去的项无意义，则这根是增根。

如方程$(x-1)(x^2+1)+\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x-1}$变为$(x-1)(x^2+1)=0$

②由方程两边消去相同的因式，所得新方程的根如使消去的因式无意义，则这根是增根。如消去的因式对于未知数取某数值为零，而此数值又适合原方程，则此数值为原方程失去的根（遗根）。

③方程两边自乘可能增根，两边开方，可能失根。

④方程两边取对数，可能失根，两边消去对数符号可能增根，增根可由验算而去掉，失根要绝对避免，为了避免失根，最好不要以式子除方程两边，或把两边开方，宁可移项后分解因式；方程两边取对数时，要考虑到是否有未知数的某允许值使原方程成为相等的负数或零。

4、一次方程：

①一元一次方程：$ax=b$． 解之　$x=\frac{b}{a}$。

讨论：当$a\neq0$时，a、b同号时有一正解。

a、b异号时有一负解。

$b=0$时有一解为零。

当$a=0$时，$b\neq0$时无解。

$b=0$时无穷多解。

②二元一次方程组：

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \cdots\cdots(1) \\ a_2x+b_2y=c_2 \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

令：*$\triangle=a_1b_2-a_2b_1$　解之：$x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{\triangle}$

$$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{\triangle}$$

讨论：当$\triangle\neq0$时　方程有唯一解

当$\triangle=0$时$\begin{cases} a_1c_2-a_2c_1\neq0\text{时}\quad\text{无解} \\ a_1c_2-a_2c_1=0\text{时}\quad\text{无穷多组解} \end{cases}$

如果从系数比来看：

	几何解释
当$\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$时，有一组解	二直线相交于一点
当$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$时，无解	二直线平行
当$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$时，无穷多组解。	二直线重合

5、一元二次方程：

$ax^2+bx+c=0$　　　$(a\neq0)$

不妨设$a>0$

解之，$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

讨论：①若$\triangle=b^2-4ac>0$，有相异二实根。

其中$b<0$，$c>0$时有二正根。

$b>0$，$c>0$时有二负根。

$c<0$时有一正根一负根。

②若$\triangle=0$，有相等二实根，其正负可由b来决定。

③若$\triangle<0$时，有二虚根($c<0$不可能)。

④若$b\neq0$，$c=0$，有一根为零；$b=0$，$c=0$时，二根为零。

分式方程和无理方程：在解分式方程时，一般先化成整式方程求解，并注意增根。在解无理方程时，有些情况引入辅助未知数，将原方程加以变形。

⑤根与系数的关系（韦达定理），设上述二次方程二根为x_1、x_2，

则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$， $x_1x_2=\frac{c}{a}$。

6、用方程解应用题，解法步骤如下进行：

①适当选取未知数；

②题给的已知条件都是组成方程所必需的，所以在列好方程后必须检查其中是否包括所有已知条件；

③同种类的量单位要相同；

④布列方程时应以时间、速度、路程、工作、长度、面积、体积等它们之间的等量关系来建立；

⑤所求的根应代入原题（不是代入所布列的方程）看看是否合于题意；

⑥舍去不合理的根（如人口为负数或分数……等）；

⑦如根中含有文字应加以讨论，何时定解、不定解，无解。

7、不等式：

①定义：二数或二代数式用不等号连结起来的式子叫不等式。

②同解不等式：

不等式$A>B$与$A+m>B+m$为同解不等式（m为实数或一个整式）

不等式$A>B$与$Am>Bm$ 或$\frac{A}{m}>\frac{B}{m}$为同解不等式（$m>0$）

不等式$A>B$与$Am<Bm$ 或$\frac{A}{m}<\frac{B}{m}$为同解不等式（$m<0$）

③一次不等式

如$ax+b>0$与联立不等式组 $\begin{cases}ax+b>0\\cx+d>0\end{cases}$ 的解法

注：用数轴说明不等式的解

④二次不等式

如$ax^2+bx+c>0$与联立不等式组$\begin{cases}ax^2+bx+c>0\\a_1x^2+b_1x+c_1>0\end{cases}$ 的解法

注：有时利用抛物线的性质求不等式的解，如解$-x^2+2x+3<0$

∵抛物线$-x^2+2x+3$开口向下，必在两根之外$-x^2+2x+3<0$

其根$x_1=3$ $x_2=-1$ 故当$x>3$ $x<-1$时不等式成立。

二、范 例

1、用“>”“<”“=”号分别把下列各组数连接起来：

（1） $0.25+3\frac{1}{8}$与$|-3.375|$ （2） $(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}})^3$与$(-3)^3$

（3）$-\lg 0.01$ 与 $\log_4\frac{1}{16}$　（4）$tg44°$与$ctg44°$　（甘肃77年高考试题）

解：（1）$\because 0.25+3\frac{1}{8}=3.375$　　$\therefore\ 0.25+3\frac{1}{8}=|-3.375|$.

（2）$\because(-3)^0=1$　　$(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}})^3=(\frac{3}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}})^3=0$

$\therefore(-3)^0>(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}})^3$.

（3）$\because -\lg 0.01=-\lg\frac{1}{100}=-\lg 10^{-2}=2$；$\log_4\frac{1}{16}=\log_4 4^{-2}=-2$

$\therefore -\lg 0.01>\log_4\frac{1}{16}$.

（4）$ctg44°=tg(90°-44°)=tg46°$　　$\because tg\ \alpha$是增函数

$\therefore tg46°>tg44°$.　　即$ctg44°>tg44°$.

2、解方程：$\frac{4x}{x^2-4}-\frac{2}{x-2}=1-\frac{1}{x+2}$　　（天津77年高考试题）

解：将原方程两端乘以$(x+2)(x-2)$

原方程化为：$4x-2(x+2)=(x^2-4)-(x-2)$

整理：　$x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

$x_1=1$　　$x_2=2$.

验算得知：$x_2=2$是增根，舍之.

3、解：$\sqrt{4x+1}-2x+1=0$　　（福建77年高考试题）

解：移项：$\sqrt{4x+1}=2x-1$

平方：$4x+1=(2x-1)^2$

整理：$x^2-2x=0$　　$x(x-2)=0$

$$\therefore\begin{cases}x_1=0\\x_2=2\end{cases}$$

验算可知：$x_1=0$是增根，原方程只有$x_2=2$一个根.

4、解　$9(3x+2)^2-4=0$　　（四川77年高考试题）

解：移项　$9(3x+2)^2=4$

$(3x+2)^2=\frac{4}{9}$

$3x+2=\pm\frac{2}{3}$　　解之可得

$x_1=-\frac{4}{9}$，　　$x_2=-\frac{8}{9}$.

5、解方程：$|x-1|+|x+2|=3$

解：先定出使$x-1$、$x+2$为零的点，即$x=-2$或$x=1$　　并讨论：

①当$x \leq -2$时，原方程化为：

$$-(x-1)-(x+2)=3$$
$$-x+1-x-2=3$$
$$-2x=4$$

$\therefore x=-2$　（符合题意）

（2）当$-2<x<1$时，原方程化为：

$$-(x-1)+(x+2)=3$$

解得：　$3=3$　恒等式

$\therefore$　满足$-2<x<1$的 x都是解

（3）当$1 \leq x$时　原方程化为：

$$(x-1)+(x+2)=3$$
$$2x+1=3$$
$$2x=2$$

$\therefore$　$x=1$（符合题意）

综合上述，原方程的解为$-2 \leq x \leq 1$。

6、①已知方程$ax^2-(2a+1)x+(a+1)=0$

（1）有一根为零　　　（2）两个根的和为零

（3）两个根的积为2，分别求a。　　　**（湖南77年高考试题）**

解：（1）原方程化成：

$$x^2-\frac{2a+1}{a}x+\frac{a+1}{a}=0$$

欲使一根为零，必有　$\frac{a+1}{a}=0$

即$a+1=0$　　$a=-1$　　此时　$\frac{2a+1}{a} \neq 0$。

（2）设二根为x_1、x_2，由韦达定理：　$x_1+x_2=-\left(-\frac{2a+1}{a}\right)$

欲：$x_1+x_2=0$，即　$-\left(-\frac{2a+1}{a}\right)=0$

$$\frac{2a+1}{a}=0$$
$$2a+1=0$$
$$a=-\frac{1}{2}.$$

（3）由韦达定理知：　$x_1x_2=\frac{a+1}{a}=2$

即$a+1=2a$。　$a=1$。　所以当$a=1$时两根之积为2。

②如果$bx^2-4bx+2(a+c)=0$.$(b \neq 0)$

有两个相等的实根，求证a、b、c成等差数列　　**（天津77年高考试题）**