SHULIHUASHENG
YUANDI

数理化生園地

13

1984/11

上海科学技术出版社

数理化生园地

13

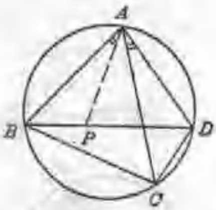
(1984/11)

上海科学技术出版社出版
新华书店上海发行所发行
(上海市福金二路四五〇号)
上海商务印刷厂印刷

统一书号：13119-1226
定　　价：0.20元

导

变量代换的方法不仅在代数中有广泛的应用，而且在平面几何的证明题中也有它的妙用．例如，对于证明线段乘积(或平方)的和、差问题，如采用变量代换的手段，往往很容易找到出路．



〔例 1〕 在圆内接四边形 $ABCD$ 中，求证：$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$．

分析 课本上对这一题有一提示：在 BD 上取一点 P，使 $\angle BAP=\angle CAD$．至于这是怎样想到的呢？不少同学可能要这样发问．实际上，从 $AB\cdot CD$ 及 $BC\cdot AD$ 移于 $AC\cdot BD$ 上着想，令

$$AB\cdot CD=AC\cdot x, \tag{1}$$

$$BC\cdot AD=AC\cdot y. \tag{2}$$

由(1)+(2)，得

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC(x+y).$$

与 $AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$ 比较，得 $x+y=BD$．即适合于(1)、(2)的 x、y 必在 BD 上截取．令这一点为 P，由(1)式得 $AB\cdot CD=AC\cdot BP$，欲使这等式成立，只须 $\triangle ACD\backsim\triangle ABP$．因 $\angle ACD=\angle ABP$，故只须在 BD 上取一点 P，作 $\angle BAP=\angle CAD$ 即可证出．

证明 在 BD 上取一点 P，使 $\angle BAP=\angle CAP$．则

$$\left.\begin{array}{l}\angle BAC=\angle DAP\\ \angle ACB=\angle ADP\end{array}\right\}\Rightarrow\triangle ABC\backsim\triangle APD$$

$$\Rightarrow BC:PD=AC:AD$$

$$\Rightarrow BC\cdot AD=AC\cdot PD$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle BAP=\angle CAP\\ \angle ABP=\angle ACD\end{array}\right\}\Rightarrow\triangle ABP\backsim\triangle ACD$$

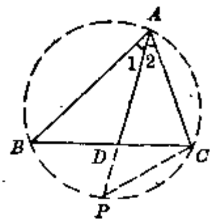
$$\Rightarrow AB:AC=BP:CD$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow AB\cdot CD=AC\cdot BP\\ \quad BC\cdot AD=AC\cdot PD\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BP+AC\cdot PD$$

$$\Rightarrow AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD.$$

〔例 2〕 已知 AD 为 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 的平分线(如图), 求证: $AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot DC$.



分析 类似上题, 令

$$AB\cdot AC=AD\cdot x, \qquad (1)$$

$$BD\cdot DC=AD\cdot y. \qquad (2)$$

由(1)－(2), 得

$$AB\cdot AC-BD\cdot DC=AD(x-y).$$

与 $AB\cdot AC-BD\cdot DC=AD^2$ 比较, 得 $x-y=AD$. 即适合于(1)、(2)式中的 y 最好在 AD 的延长线上.

设延长 AD 到 P, 由(2)得 $BD\cdot DC=AD\cdot DP$. 欲使这等式成立, 只须 A、B、P、C 四点共圆. 故 P 必是 AD 的延长线与 $\triangle ABC$ 外接圆的交点.

证明 作 $\triangle ABC$ 的外接圆, 并延长 AD, 交圆于 P, 连结 PC, 则 $BD\cdot DC=AD\cdot DP$.

$$AD\text{ 是 }\triangle ABC\text{ 中 }\angle A\text{ 的平分线}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\angle 1=\angle 2\\ \angle B=\angle P\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \triangle ABD \backsim \triangle APC \Rightarrow AB:AP = AD:AC$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow AB\cdot AC = AD\cdot AP \\ BD\cdot DC = AD\cdot DP\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow AB\cdot AC - BD\cdot DC = AD(AP-DP)$$

$$\Rightarrow AB\cdot AC - BD\cdot DC = AD^2.$$

通过这两个例题，可以看到，熟练地掌握用变量代换法，对寻找证明线段乘积(或平方)的和、差问题的证法确可带来方便.至于如何确定 x、y，则须根据题设做出. 作为练习，请同学们试用此法寻找下面各题的出路，并证明之.

1. P 为正 $\triangle ABC$ 外接圆上一点，且 P 与 A 在 BC 两侧. 求证：$PA^2 = PB\cdot PC + BC^2$.

2. 自半圆直径 AB 的两个端点，作两弦 AC、BD 相交于 P，求证：$AP\cdot AC + BP\cdot BD = AB^2$.

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A = 90°$，AD 是斜边上的高，$\angle B$ 的平分线和 AD、AC 分别交于 M、N，求证：$AB^2 - AN^2 = BM\cdot BN$.

4. 过 $\square ABCD$ 的顶点 B 作圆，交 AB、BC、BD 于 E、F、G. 求证：$AB\cdot BE + BC\cdot BF = BD\cdot BG$.

求极限的几种常用方法(续)

王岳庭 (浙江师范学院)

汤德祥 (宁波师范专科学校)

(七) 利用无穷小量的性质

根据有界函数与无穷小量乘积为无穷小这一性质，求极限.

〔例 9〕 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}[\sin\ln(1+x)-\sin\ln x]$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\cdot2\cdot\sin\frac{\ln(1+x)-\ln x}{2}\cos\frac{\ln(1+x)+\ln x}{2}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{\ln\frac{1+x}{x}}{2}\right)\cos\left(\frac{\ln[(1+x)x]}{2}\right).$$

这里，当 $x\to+\infty$ 时，$\cos\frac{\ln[(1+x)\cdot x]}{2}$ 是有界函数，而 $\sin\frac{\ln\frac{1+x}{x}}{2}$ 是无穷小量，

$$\therefore\quad 原式=0.$$

(八)求和法

对于用和式表示的数列，可用自然数求和、拆项直接求和等方法，先求出前 n 项之和，再求极限.

〔例 10〕 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{2}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{n}{(n+1)^2}\right]$.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{(n+1)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{2}.$$

〔例 11〕 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}\right]$.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right.$

$$\left.+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

(九)利用乘积中的化商约简

在一些特殊的求乘积极限中，可先写成商式，使分子、分母能交错约简，再求极限.

〔例 12〕 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

解 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

〔例 13〕 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-a+a^2)(1-a^3+a^6)\cdots(1-a^{3^{n-1}}+a^{2\cdot 3^{n-1}})$，其中 $0<a<1$.

解 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+a^3}{1+a}\cdot\frac{1+a^9}{1+a^3}\cdots\frac{1+a^{3^{n-1}}}{1+a^{3^{n-2}}}\cdot\frac{1+a^{3^n}}{1+a^{3^{n-1}}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+a^{3^n}}{1+a},$$

因为当 $n\to\infty$ 且 $0<a<1$ 时，有 $a^{3^n}\to 0$，所以

$$原式=\frac{1}{1+a}.$$

(十)夹逼法

由已知定理，当 $x_n\leqslant z_n\leqslant y_n(n=1,2\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$. 我们称这种求极限的方法为夹逼法.

〔例 14〕 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$(其中 n 为自然数).

解 令 $z_n=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$. 由于 n 为自然数，显然 $z_n>0$. 又因为

$$z_n=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2}{n+1}\cdot\frac{3}{n+1}\cdots\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+1}$$

$$\leqslant\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+1}\cdots\frac{n+1}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+1}=\frac{1}{n+1},$$

$$\therefore\quad 0<z_n\leqslant\frac{1}{n+1}.$$

令 $x_n=0,y_n=\frac{1}{n+1}$. 有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，所以

$$原式=\lim_{n\to\infty}z_n=0.$$

〔例 15〕 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}\right)$.

解　直接放大与缩小，得：

$$\frac{n}{\sqrt[3]{n^3+n}}<\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}}+\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}<\frac{n}{\sqrt[3]{n^3+1}}.$$

$$\because\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n^3+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n^3+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}}=1,$$

$$\therefore\quad 原式=1.$$

（十一）利用均值过渡

已知数列 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a;$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=a.$$

当给定的数列，可化为某数列的算术均值，或几何均值（直接或间接的都可以）时，就可用上述极限性质，来求极限。

〔例 16〕　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\lg\sqrt[n]{n}$.

解　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lg n}{n}$，而

$$\begin{aligned}\lg n&=\lg n-\lg(n-1)+\lg(n-1)+\cdots+\lg 2-\lg 1+\lg 1\\&=\lg\frac{n}{n-1}+\lg\frac{n-1}{n-2}+\cdots+\lg\frac{2}{1}+\lg 1.\end{aligned}$$

令 $x_1=\lg 1, x_2=\lg\dfrac{2}{1}, \cdots, x_{n-1}=\lg\dfrac{n-1}{n-2}, x_n=\lg\dfrac{n}{n-1}$,

$$\therefore\quad \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{\lg n}{n}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad 原式&=\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\lg\frac{n}{n-1}=\lim_{n\to\infty}\lg\frac{1}{1-\frac{1}{n}}=\lg 1=0.\end{aligned}$$

〔例 17〕 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

解 令 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. 所以

$$x_1=\left(1+\frac{1}{1}\right)^1,\ x_2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$x_3=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3,\ \cdots,\ x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad x_1\cdot x_2\cdots x_n&=\left(1+\frac{1}{1}\right)^1\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\left(1+\frac{1}{3}\right)^3\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\&=\left(\frac{2}{1}\right)^1\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\\&=\frac{(n+1)^n}{1\cdot2\cdot3\cdots n}=\frac{(n+1)^n}{n!},\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad 原式&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\frac{n}{n+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot1\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.\end{aligned}$$

(十二)列方程法

应用这种方法，必须先用极限准则验证极限存在，然后再列出方程，用解方程的方法，求出极限.

〔例 18〕 设 $x_1=a,\ x_2=a+\frac{x_1}{a+x_1},\ \cdots,\ x_n=a+\frac{x_{n-1}}{a+x_{n-1}}$, 其中 $a>0$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 $\because a>0$, $\therefore x_n>0$(其中 $n=1,\ 2\cdots$). 由于

$$x_2-x_1=\frac{x_1}{a+x_1}=\frac{1}{2}>0,$$

$$\therefore\quad x_2>x_1.$$

今假设 $x_n>x_{n-1}$, 可推得

$$x_{n+1}-x_n=\left(a+\frac{x_n}{a+x_n}\right)-\left(a+\frac{x_{n-1}}{a+x_{n-1}}\right)$$

$$=\frac{x_n}{a+x_n}-\frac{x_{n-1}}{a+x_{n-1}}=\frac{a(x_n-x_{n-1})}{(a+x_n)(a+x_{n-1})}>0,$$

$$\therefore\quad x_{n+1}>x_n.$$

这就用数学归纳法证得数列$\{x_n\}$是单调增加的。

$$\because\quad x_n=a+\frac{x_{n-1}}{a+x_{n-1}}=a+1-\frac{a}{a+x_{n-1}}<a+1,$$

所以，数列$\{x_n\}$有上界$a+1$。

于是，由极限存在准则得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，不妨设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\alpha$。在已知$x_n=a+\dfrac{x_{n-1}}{a+x_{n-1}}$两边取极限$(n\to\infty)$，且由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n-1}=\alpha$，可得

$$\alpha=a+\frac{\alpha}{a+\alpha}.$$

整理，得 $$\alpha^2-\alpha-a^2=0.$$

解得$\alpha=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4a^2}}{2}$。因$x_n>0$，所以$\alpha>0$，故应舍去负值，

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{1+4a^2}}{2}.$$

在具体解题过程中，有了这些方法，同时还须注意运用的灵活性与技巧性，以及代数式的恒等变形等基本功。

物体作简谐振动的判断

刘承耀　（广东省陆丰县龙山中学）

简谐振动是一种最简单、最基本的振动。许多复杂的振动在振幅小的情况下可以近似地看作简谐振动来处理。

要判断一个物体的振动是不是简谐振动，就要抓住简谐振

动的特点．简谐振动的动力学特点是：$F=-kx$，式中回复力F是振动物体所受的合外力在位移方向上的分力；k是比例常数，取决于作振动的体系的具体结构（对于弹簧振子来说，k是弹簧的倔强系数，而在其他系统中，k另由其他因素决定）；位移x的起点在平衡位置；负号表示回复力跟位移方向相反．所以，判断物体是否是做简谐振动，关键在于其位移方向上所受的合力是否与位移方向相反，即是否满足$F=-kx$的关系式．

例题 有一个粗细均匀的圆柱体，竖直地飘浮在水面上，如图1(a)．如果忽略水的粘滞因素，把它向下按一点再放开，圆柱体是否做简谐振动？如果是，请求出振动周期．

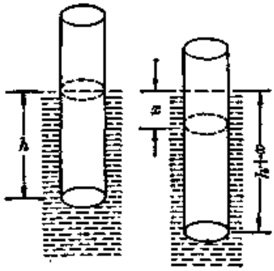


图 1

解 选圆柱体飘浮在水面静止时的水面为平衡位置，如图1(a)．设圆柱体的截面积为S，平衡时圆柱体在水下部分的长为h，对应排开水的体积$V_1=Sh$；当运动到平衡位置以下位移x时，圆柱体在水下部分的长为$h+x$，对应排开水的体积$V_2=S(h+x)$．

圆柱体受竖直向下的重力G和竖直向上的水的浮力$F_{浮}=\rho gV$（其中ρ为水的密度，V是排开水的体积）的作用，取向下的方向为正方向．则在平衡位置时，圆柱体受到的合力

$$F_{合}=G-F_{浮_a}=G-\rho gSh=0$$

当运动到平衡位置以下位移x时，所受的合力

$$\begin{aligned}F_{合}&=G-F_{浮_b}=G-\rho gS(h+x)\\&=-\rho gSx+(G-\rho gSh)=-\rho gSx\end{aligned}$$

令$\rho gS=k$即得

$$F_{合}=-kx$$

可见圆柱体的振动是简谐振动．其振动周期，可根据简谐振动的周期公式$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$，并将 $k=\rho gS$ 代入，即

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho gS}}$$（式中 m 是圆柱体的质量）

同样我们可以判定，下列几种振动都可以看作是简谐振动．

1．在一个轻的弹簧下面悬挂一物体，用一外力把物体往下拉一点，外力取消后物体所作的振动．

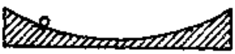


图 2

2．如图 2 小球在光滑圆槽内作振幅很小的振动．

3．单摆在摆角小于5° 时的振动．

而拍皮球时皮球的运动(设皮球与地面碰撞是弹性碰撞)就不是简谐振动．

以上是从动力学的观点来判断物体是否做简谐振动．如果题目给出振动方程或振动图象，我们还可以根据此方程或图象是否与简谐振动的方程 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$和简谐振动的图象(正弦或余弦曲线)相同来判断．这种情形比较简单，这里就不再举例说明了．

感生电动势问答

林凤生 (上海市七一中学)

学生：老师，课本第四章介绍了线框在磁场中运动时，线框

中会有感生电动势产生。后来又说线框和磁场不发生相对运动，而穿过线框的磁场发生变化时，线框中也会有感生电动势产生。这两种感生电动势有什么不同之处？

老师：所谓电动势，通俗地讲是外力推动单位电荷环绕电路一周所做的功.线框在磁场中运动时，线框中的电荷随导线一起运动，受到洛仑兹力的作用，所以推动电荷移动的力是洛仑兹力(磁场力). 而当线框与磁场保持相对静止，穿过线框的磁场发生变化时，推动电荷移动的力是电场力，因为变化的磁场在周围空间产生了电场. 而线框恰好放在这个电场中，所以电荷受到了电场力的推动. 可见这两种电动势产生的原因是不同的.

学生：我懂了，所以课本上讲了两个公式：$\mathscr{E}=Blv\sin\theta$ 是计算洛仑兹力产生的感生电动势；$\mathscr{E}=\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$ 是计算电场力产生的感生电动势.这样理解对吗？

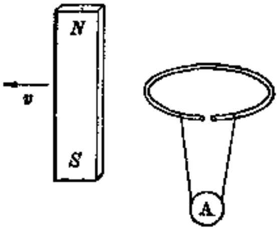
老师：不能这样理解. $\mathscr{E}=\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$ 也叫做通量法则，是电磁学的基本公式之一. 请注意磁通量变化不等于磁场变化. 因为 $\phi=B\cdot\cos\theta\cdot S$，$\phi$ 的变化可以由三个因子引起. 如果 B 发生变化，其余两个因子保持不变，可以认为感生电动势是电场力的贡献. 如果 $\cos\theta$、S 这两个因子变化时，就是我们熟悉的线框在匀强磁场中旋转的情况，这时线框与磁场发生了相对运动，因此感生电动势是洛仑兹力的贡献. 所以 $\mathscr{E}=\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$ 是一个普适的计算公式. 它把两种起源不同的电动势都考虑进去了.

学生：那么 $\mathscr{E}=Blv\sin\theta$ 呢？

老师：它是 $\mathscr{E}=\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$ 的一种特殊情况. 这是线框的一部分与磁场发生相对运动，在导线中产生感生电动势的计算公式.

因为含有 v 的因子，可以认为这个电动势是洛仑兹力的贡献.

学生：一个公式可以计算两种不同的电动势，真是不常见的情况.



老师：还不止这一点哩！请大家来看一个实验．如图，在磁铁旁边放一闭合线框，当磁铁向左移动时，灵敏电流发生偏转，说明线框内有感生电流通过．这个电流究竟是洛仑兹力的贡献，还是电场力的贡献呢？

学生：这当然是洛仑兹力的贡献，因为磁铁向左运动，就等于线框向右运动，这是一会事情．唔……等一等……我还有一个想法不知对不对．如果我没有注意磁铁在运动，只看到线框静止着，线框中静止的电荷是不受洛仑兹力的．我所看见的只是框内的磁场在逐渐变弱．而变化的磁场产生了电场，所以是电场力在推动电荷移动.

老师：你的回答都很好，那么哪一个对呢？在力学的学习中，我们知道，对运动的描述是与观察者所用的参照物有关系的．例如坐在行驶着的车上的人，看到车顶上落下来的钉子是作自由落体运动，而路旁的人则认为此钉子作平抛运动.

学生：电磁学难道与运动也有关系？

老师：当然有关系，认真读读课本，就会有体会．事实上，若以线框作参照物，认为线框不运动，当然电荷不受洛仑兹力作用，只能是电场力在驱使电荷移动．而以磁铁作为参照物，就认为线框在向右移动，是洛仑兹力在驱使电荷移动了.

学生：如果我所在的参照系与线框和磁铁都有相对运动呢？

老师：那么你看到推动电荷的力，既不单纯是电场力，也不

单纯是磁场力，而是两者都有一点。

最后我们小结一下：当线框和磁场相对静止时，由穿过线框的磁场变化而产生的感生电动势是电场力的贡献．由线框与磁场发生相对运动而产生的感生电动势，按不同的观察者对磁场力的贡献和电场力的贡献可以有不同的估价．所有的感生电动势计算全部包含在 $\mathscr{E}=\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$ 的公式里．

“卤素”中的氧化-还原反应

陈基福　（上海市第十二中学）

氧化-还原反应是化学的一部分重要内容．由于这一类反应的原理和规律比较复杂，而且牵涉的面非常广泛（如物质燃烧、金属生锈、电镀、电解、电池、化学分析、物质制备等等），因此中学化学把它分作几个阶段讨论，由现象到本质，由简单到复杂，逐步加深．例如，初中化学中，先从物质得氧、失氧的角度提出了氧化和还原的概念，后又从元素化合价升降的角度提出氧化-还原这一反应类型；高一“卤素”这章则指出了氧化-还原反应的实质是电子的转移（包括电子的得失和偏移）；此后还将介绍如何配平氧化还原反应的化学方程式，介绍这类反应的若干应用等．不难发现，“卤素”中的氧化-还原反应知识在这一过程中具有承上启下的重要地位．那么，我们应当怎样来学好这部分内容呢？

首先，要从化合价升降与电子得失的关系理出氧化-还原反应中的一系列联系，即：

化合价降低——得到电子——被还原——氧化剂；

化合价升高——失去电子——被氧化——还原剂．

其次，要学会用“短式”表示氧化-还原反应中电子转移的方向和总

数．其方法是先分析化合价的变化，在反应物中化合价升高的元素上面标上“↑”，在化合价降低的元素上面标上“↓”，再将它们连结起来，即表示电子转移的方向．例如：

$$2F_2+2H_2O=4HF+O_2\uparrow$$

然后分析化合价升高的数目，如 $O^{-2}\longrightarrow O^0$，每一个 O 原子化合价升高二价，则失去 $2e$，那么，现有两个 O 原子，失去电子的总数为 $2\times 2e$，标在转移方向的横线上即可：

$$\overset{2\times 2e}{\overline{2F_2+2H_2O}}=4HF+O_2\uparrow$$

但是，仅仅学会这两点并不够，因为本节内容指出了氧化-还原反应的实质是电子发生了转移，因此，我们还必须联系原子结构的知识来掌握氧化-还原反应的一般规律．这可以抓住以下三点来认识．

一、同一元素在不同价态时将表现出不同的性质

以氯元素为例．Cl^{-1} 是氯的最低价态，负一价的氯只能失去电子，不能得到电子，因此在氧化-还原反应中只具有还原性．如 HCl 跟 MnO_2 反应时，Cl^{-1} 只能失去电子被氧化为 Cl^0：

$$4H\overset{-1}{Cl}(浓)+MnO_2\overset{\triangle}{=\!=}MnCl_2+\overset{0}{Cl_2}\uparrow+2H_2O$$

Cl^0 是氯的中间价态，既可以得电子成为 Cl^{-1}，又可以失电子成为 Cl^{+1}，因此零价的氯（即氯气）既有氧化性，又有还原性．如氯气跟氢氧化钠溶液反应，生成的氯化钠中，氯为 -1 价，生成的次氯酸钠中，氯为 $+1$ 价：

$$\overset{0}{Cl_2}+2NaOH=Na\overset{-1}{Cl}+Na\overset{+1}{Cl}O+H_2O$$

Cl^{+1} 也是中间价态，也是既有氧化性，又有还原性，但主要表现出氧化性．至于氯的最高价态 Cl^{+7}，应该只能得电子，不能失电子，只有氧化性，这里就不作讨论了．

二、不同元素间氧化性、还原性强弱的比较

微粒得、失电子能力的强弱，反映了微粒氧化性、还原性的强弱．一种微粒愈容易获得电子，其氧化性就愈强，反之亦然．对于 F、Cl、Br、I 四种原子来说，由于电子层数依次增加，原子半径依次变大，所以原子核对外层

电子的吸引力依次变小，得电子的能力依次减弱，表现出氧化性也依次变弱。同样，对于 F^-、Cl^-、Br^-、I^- 四种卤素离子来说，它们的离子半径也是依次递增的，失电子的能力依次变大，所以还原性依次增强。这两条规律可以由以下实验来佐证。卤素的单质与氢气反应时是作氧化剂的。其中，氟气与氢气混和反应在冷暗时即发生爆炸；氯气和氢气混和时在光照条件下反应也发生爆炸；溴和氢气反应在 500°C 时才能慢慢地进行；碘与氢气反应则须不断加热才缓慢地进行，而且碘化氢在生成的同时发生分解。由此可见，氟的氧化性最强，碘的氧化性最弱。我们在制取氟化氢和氯化氢时，可以分别用氟化钙和氯化钠跟浓硫酸发生复分解反应而制得；但用溴化钠或碘化钠跟浓硫酸反应就不能制得纯净的 HBr 或 HI。这是因为 -1 价的溴或碘较易失去电子，具有较强的还原性，容易被浓硫酸氧化生成单质的溴或碘。

三、部分氧化-还原反应和自身氧化-还原反应

这两类氧化-还原反应我们在初中化学学习中没有接触过。不妨把以前学过的完全氧化-还原反应和这两类氧化-还原反应作一个比较：

$$2\mathrm{Na}\overbrace{\mathrm{I}+\mathrm{Cl}}^{2\times e}{}_2=2\mathrm{NaCl}+\mathrm{I_2}\quad\text{（完全氧化还原）}$$

$$\overbrace{\mathrm{MnO_2}+4\mathrm{HCl}}^{2\times e}=\mathrm{MnCl_2}+\mathrm{Cl_2}\uparrow+2\mathrm{H_2O}\quad\text{（部分氧化还原）}$$

$$\overbrace{\mathrm{Cl_2}}^{e}+\mathrm{H_2O}=\mathrm{HCl}+\mathrm{HClO}\quad\text{（自身氧化还原）}$$

比较完全氧化-还原反应与部分氧化-还原反应，不难发现前者反应物中参加反应的 2 个 NaI 完全被氧化，而 Cl_2 则完全被还原为 Cl^-；而部分氧化-还原反应中参加反应的 4 个 HCl 只有 2 个 HCl 被氧化，即 4 个 Cl^- 中只有一半被氧化为 Cl^0，因此电子转移总数不是 $4\times e$，而是 $2\times e$。

再看自身氧化-还原反应。在 Cl_2 跟 H_2O 的反应中，Cl_2 中 1 个 Cl^0 被氧化成 Cl^{+1}(HClO)，另一个 Cl^0 被还原成 Cl^{-1}(HCl)。电子转移发生在 Cl_2 分子内（$\overbrace{\mathrm{Cl_2}}^{e}$），氯气既作氧化剂，又作还原剂，故称作自身氧化-还原反应，也