80306

优选法及其实例

上海交通大学

毛 主 席 语 录

思想上政治上的路线正确与否是决定一切的。

鼓足干劲，力争上游，多快好省地建设社会主义。

实践、认识、再实践、再认识，这种形式，循环往复以至无穷，而实践和认识之每一循环的内容，都比较地进到了高一级的程度。

自然科学是人们争取自由的一种武装。

前　言

在伟大领袖毛主席**“抓革命，促生产，促工作，促战备”**的方针指引下，随着社会主义革命和社会主义建设事业的蓬勃发展，新产品、新工艺不断涌现，质量要求日益提高。一个推广应用“优选法”的群众运动，正在蓬勃展开，为技术革新、技术革命创造了有利条件。

“优选法”是以较少的试验次数，迅速地找到生产上合适的工艺条件、合适的配方，在生产斗争和科学实验中达到多快好省的目的。

“优选法”在生产和科学实验中是一种用途比较广泛的数学方法。工人师傅听得懂，用得上，受到了工厂同志的欢迎。为了贯彻执行党的**“鼓足干劲，力争上游，多快好省地建设社会主义”**总路线，更好地适应生产和科学实验的需要，由于目前这方面的书又比较缺乏，根据我校群众的要求，我们参照了华罗庚同志编写的有关材料，并吸取了各省市的有关资料，编写成“优选法及其实例”一书，主要作为我校有关单位生产、科学实验以及下厂时推广“优选法”参考之用。

由于我们推广“优选法”工作的实践很少，还缺乏经验，加上我们水平有限，材料之中一定有不妥之处，请同志们批评指正。

上海交通大学数学教研组

一九七三年一月

目　　录

一、基 本 方 法

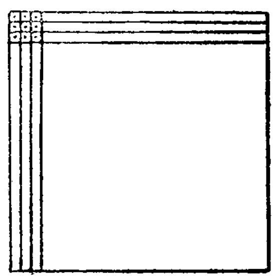
(一)什么是优选法

优选方法的问题处处有，常常见。但问题简单，易于解决，故不为人们所注意。自从工艺过程日益繁复，质量要求精益求精，优选的问题也就提到日程上来了。简单的例子，如：一枝粉笔多长最好？每枝粉笔都要丢掉一段一定长的粉笔头，单就这一点来说，愈长愈好。但太长了，使用起来既不方便，而且容易折断，每断一次，必然多浪费一个粉笔头，反而不合算。因而就出现了“粉笔多长最合适”的问题，这就是一个优选问题。

事实上，我们在生产斗争和科学实验中所碰到的优选问题比这复杂，同时象“粉笔多长最合适”的问题，老师傅早已从实践中摸清规律，解决了这一问题。这里，不过用来通俗地说明什么是优选方法而已。

优选方法所适用的范围是：怎样选取合适的配方，合适的操作条件和制作过程，使产品的质量最好，数量最多。在质量指标定好后，怎样使生产周期最短，成本最低。已有的仪器怎样调试，使其性能最好。等等。

也许有人会想，我们可以做大量试验，把所有可能性都做完了，还能找不到最好的方案和过程吗？然而，大量的试验要花去大量的时间、精力和器材，而且有时还不一定是可能的。举个简单的例子，一个一平方公里的池塘，我们要找其最深点。比方说每隔一公尺测量一次，我们必须测量1000×1000，总共一百万个点。这个问题并不复杂，只有横竖两个因素，但要把这一百万个点都测量完，可不是一件容易的事，就算你干劲很大，一天能做三十次，一年大约做一万次，也要一百年才能做完这些试验。**“多少事，从来急；天地转，光阴迫。一万年太久，只争朝夕。”**因此，这种方法显然不符合多快好省的精神。而实际工作者往往根据自己的经验和参考有关资料，再想一些“窍门”，使试验次数尽可能减少，以便尽快地找出最优方案。优选法就是人们从实践中总结和提炼出来的一种科学方法。其目的是使我们尽量减少试验次数，达到迅速选择工业生产和科学试验的最优方案。



上面的池塘问题，用优选法做130次试验，就可以代替一百万次试验(当然，我们假定了池塘底不是忽高忽低的，即单峰的情况)。

(二)单因素

我们知道钢要用某种化学元素来加强其强度，太少不好，太多也不好。例如，碳太多了成为生铁，碳太少了成为熟铁，都不成钢材，每吨要加多少碳才能达到强度最高

呢？假定已经估计出(或从理论上计算出)每吨在1000克到2000克之间，现在来确定最好的加入量是多少克。普通的方法是加1001克，1002克，……，做下去，等做了一千次以后，才能发现最好的选择——常称最好点，这种方法称为“均分法”。这样作，虽然可以把试验作得很细，但既浪费精力、时间，又浪费原材料，而且有时还达不到目的。所以工人师傅称它为“笨办法”。当然，在实际工作中，一般也不是完全按照“均分法”来安排试验的，但是往往需要经过多次摸索，带有较大的盲目性。而“优选法”则可指导我们尽量减少试验次数，迅速找到最优方案。现在我们就介绍用折纸法来解决上面的问题。

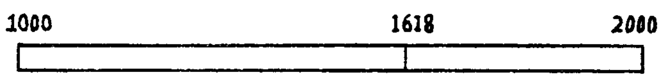
1、折纸法(0.618法)

首先，要求牢记一个数——0.618，暂且不要管它是怎么来的。用一个有刻度的纸条来表达试验范围1000克—2000克(图1)，在这纸条长度的0.618倍的地方划一条线，在这条线所指示的刻度处做一次试验，即按

1000+(2000−1000)×0.618=1618(克)

做第一次试验(图2)

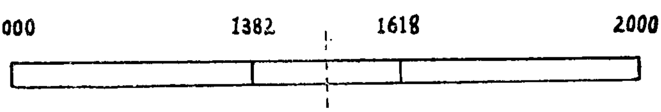
(图1)



(图2)

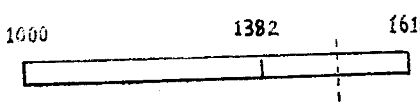
然后把纸条对折，在前一条线所对的地方，再划一条线，这条线在1382克处(图3)，由于对称性，也可以从下面的公式算出：

新试验点＝左端点＋右端点－内点＝1000+2000−1618=1382(克)

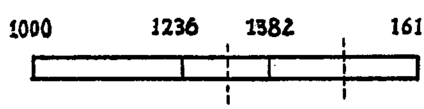


(图3)

再按1382克处做一次试验。毛主席教导我们：**“有比较才能鉴别。有鉴别，有斗争，才能发展。”**将两次试验结果进行比较，看那一次好。如果1382克处的试验结果较好，我们就在1618克处把纸条的右边一段剪去(图4)，也就是说，比1382克更好的点一般情况下在1000—1618克范围内，不会在1618—2000克范围之内。(如果1618克处的试验较好，则在1382克处剪去左边的一段)，再把留下的1000—1618一段纸条对折，又可划出一条线在1236克处(图5)。



(图4)

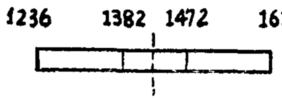


(图5)

也可用前面的公式得到：

左端点＋右端点－内点＝1000＋1618－1382＝1236(克)。

在1236克处做试验，再和1382克处的试验结果比较，如果仍然是1382克处较好，则在1236克处剪去左边一段(图6)。道理同前面一样，再将留下的纸条对折，又可找到新的试验点1472克（1236＋1618－1382＝1472），在1472克处做试验后，再与1382克的结果比较，又剪去一段，等等。



（图6）

这样一直做下去，不要多少次，纸条便剪得差不多了，最好的点也就找到。这个方法就叫做“折纸法”（或叫0.618法）。

这个方法的要点，可以归结为两点：

1.第一次试验点在何处做？

——在全长的0.618倍处做。

第一个试验点＝左端点＋(右端点－左端点)×0.618。

2.第二、三，……次试验点在何处做？

——可按下面公式计算。

新试验点＝左端点＋右端点－内点。

然后比较，剪去一段，循环往复地进行。就这样通过实验、分析、再实验、再分析，矛盾的解决和又出现的过程中，一次比一次地更加接近所需要的加入量，直到所能达到的精度或质量指标满足给定的要求为止。

2.分数法

前面我们介绍了单因素优选问题的折纸法，现在来介绍解决单因素优选问题的另一个方法——分数法。

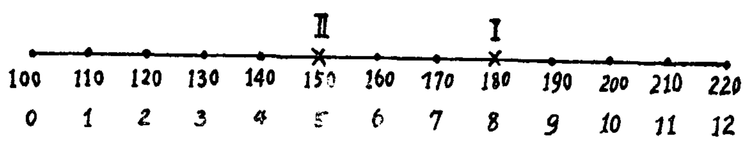
先引进一个数列：

1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，……

产生的方法是这样的：第一项是1，第二项是2，以后每个数是由它前面两个数相加得到的。例如，3＝2＋1，5＝3＋2，8＝5＋3，13＝8＋5，……

现以下面的例子来说明分数法的用法：

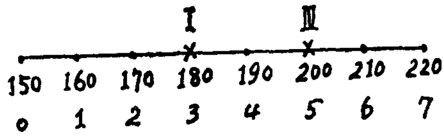
为了配制一种不锈钢管的酸洗液500毫升，固定了其它条件，要确定硝酸的最佳用量。根据经验优选范围是100—220毫升。现以10毫升为一档，将100—220分为12等分。



（图7）

有了上面引进的数列后，就可不用0.618而直接从数列中找出试验点。首先找出数列中在12前面最大的两个数，即8和5，这样最初两个点就在8(180毫升)和5(150毫升)处进行试验(图7)。比较试验结果，如果180毫升处好，则象折纸法一样，将100－150一段丢掉，留下150－220一段继续试验，再象上面一样重新编号（图8），留下有7等分，数列中在7前面最大的两个数是5和3，在3(180毫升)处，已作过试验，就在5(200毫升)处再作一

次试验，进行比较并缩小试验范围，这样一直进行到找出硝酸加入量的好点160毫升为止。我们可把这个过程列表如下：



（图8）

试验编号	试点位置	比较对象	优　胜	保留范围	应 试 点
Ⅰ	180				180，150
Ⅱ	150	Ⅰ，Ⅱ	Ⅰ	150～220	180，200
Ⅲ	200	Ⅰ，Ⅲ	Ⅰ	150～200	170，200
Ⅳ	170	Ⅰ，Ⅳ	Ⅳ	150～180	170，160
Ⅴ	160	Ⅳ，Ⅴ	Ⅴ		

在分数法中，利用了我们引进的数列来确定试验点的位置，若把试验范围等分，而等分数正好是数列中的某一项的数，比如将试验范围13等分，而13正好是数列中第六项的数，按照上面讲的方法，第一个试验点应在8处，这实际上是用8/13作为0.618的近似值，第二个试验点在5处，正好是第一个试验点的对称点。

事实上，我们引进的数列，任何相邻两个数之比都可以作为0.618的近似值，而且越到后面就越接近$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618033989\cdots\cdots$。比如：

$\frac{1}{2}=0.5$，　$\frac{2}{3}=0.667$，　$\frac{3}{5}=0.600$，

$\frac{5}{8}=0.625$，　$\frac{8}{13}=0.615$，　$\frac{13}{21}=0.619$，

$\frac{21}{34}=0.6176$，　$\frac{34}{55}=0.6182$，　……

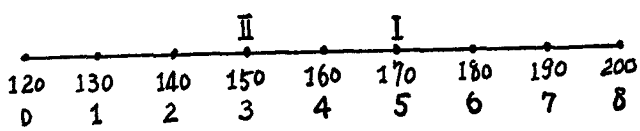
所以，当试验范围的等分数正好是数列中的某一项的数时，则第一个试验点的选取同0.618法差不多，只不过是取0.618的近似值，并且可直接从我们引进的数列中得到。若试验范围的等分数不是数列中的某一项的数时，比如上面例子中是12等分（或者9等分，10等分，11等分都一样），这时，我们就可把试验范围扩大成13等分（扩大后对我们的问题并无影响，而绝对不会在扩大部分去作试验），这样就可从数列中找到试验点了。

一般的，若把试验范围分成若干等分后，而只允许在预定的分点上试验时，利用分数法不仅可以减少试验次数，提高试验的精度，而且也很方便。

下面再举一个例子：

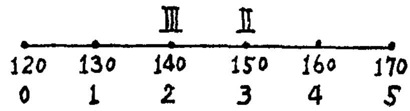
要找一个化学反应的较好温度，已知120℃不起反应，200℃碳化，按具体情况，希望做4次试验得出结论。

将试验范围120℃—200℃，按10℃一档，分为8等分（图9），按上面的方法，第一、二个试验点应在5（即

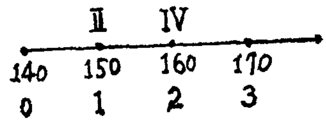


（图9）

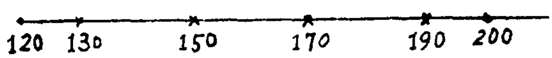
170℃）和 3（即150℃）处做，比较两处试验的结果，150℃处比170℃处好，则去掉170℃—200℃，保留120℃—170℃（图10），然后再在 2（即140℃）处做试验，同150℃处结果比较，还是150℃处好，则去掉120℃—140℃，保留下 140 ℃—170℃（图11），再在 160℃ 处做一次试验，同 150℃ 处的结果比较，仍然是150℃最好，则150℃就是我们找到的较好温度。我们利用分数法做了四次试验，找到了较好的温度，精度达到±10℃。如果我们象下面这样安排试验，同样作四次试验，则精度只有±20℃（图12）。



（图10）



（图11）



（图12）

上面引进的数列，不仅给我们指出了试验进行的位置，还告诉了我们下列试验范围的等分数与试验次数的关系。

数列	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377
试验范围的等分数		2	3	4～5	6～8	9～13	14～21	22～34	35～55	56～89	90～144	145～233	
最多试验次数		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	

如我们将试验范围10等分，最多只要进行 5 次试验；20等分，最多只要进行 6 次试验；100等分，最多只要进行10次试验。我们有了这样明确的关系，就可根据精度要求定出试验次数或者在一定的试验次数下，把试验做得尽量精确些。

（三）双因素

前面我们已经对单因素进行优选的方法作了介绍。但世界上的事物是复杂的，是由各方面的因素决定的，因此，还必须考虑多因素的问题。

“优选法”比普通的方法更适合于处理多因素的问题，但随着因素的增多，试验次数也随之迅速地增加（尽管比普通方法增加率慢得多）。因此，为了加快速度，节约人力、物力，减少试验次数，抓主要矛盾是特别重要的，至少应当尽可能把那些影响不大的因素，暂且撇开，而集中精力于少数几个必不可少的，起决定作用的因素来进行研究。

就以前面提到的配酸洗液的问题为例：现在用硝酸、氢氟酸和水配制500毫升酸洗液，问怎样配法，使酸洗效果最好？

首先看看有几个因素：硝酸加多少？氢氟酸加多少？水加多少？什么温度？多长时间？要不要搅拌、搅拌的速度和时间？这样一来，就有七个因素，每个因素就算它分为10个等级，把各种可能的试验作完就要作10^7个试验，即一千万次，就算优选法有本领，只要万分之一的工作量，那也要做一千次。

毛主席教导我们：**“任何过程如果有多数矛盾存在的话，其中必定有一种是主要的，起着领导的、决定的作用，其他则处于次要和服从的地位。”**我们必须按照主席的教导，对上面的问题，抓住主要矛盾来进行分析。

总共是500毫升酸洗液，两种酸的用量确定后，水的量也定了，所以水不是独立因素。

其次，配好了就用，温度的变化不大，温度也可不考虑。

再其次，时间如果指的是配好后到进行酸洗的时间，我们也不考虑，因为配好就洗；如果指的酸洗所需要的时间，那不是因素而是指标。

至于搅拌不搅拌就暂不考虑了。

经过这样的分析研究后，就只有两个因素了，硝酸多少？氢氟酸多少？因此，这样一个问题，最后只做了14次试验，就找到了较好的酸洗液。

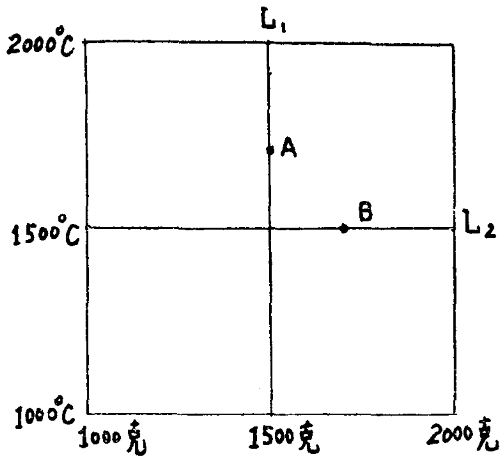
实践中的问题，因素常常是很多的，三个、五个甚至更多。怎么办？首先应遵循毛主席的教导：**“研究任何过程，如果是存在着两个以上矛盾的复杂过程的话，就要用全力找出它的主要矛盾。”**当我们抓住了主要矛盾后，就可首先对发生主要影响的因素优选其最好点，然后再逐个地解决其它矛盾。这样就可以大大地缩短时间，节约人力和物力。

对多因素问题需要说明两点：一是我们抓主要矛盾时，并不是说其它因素任其随便，还必须根据经验把它们控制在适当的水平上。

其次是在分析矛盾时，要将“自变量”和“因变量”分清楚。有些因素，完全由别的因素决定，则这个因素就可以不必考虑优选了。如配酸洗液的问题，水的用量完全由硝酸和氢氟酸的用量来决定，保证总量为500毫升。因此优选时，只考虑两种酸的用量而水的用量就不必再进行优选了。

下面我们就来介绍对双因素进行优选的方法。

仍以炼钢问题为例，一个是某元素的含量1000克到2000克，另一个是熔炼温度1000℃到2000℃。问，温度一千几百几十度，某元素含量一千几百几十克为最优？这便是一个双因素的优选问题。



（图13）

1. 对 折 法

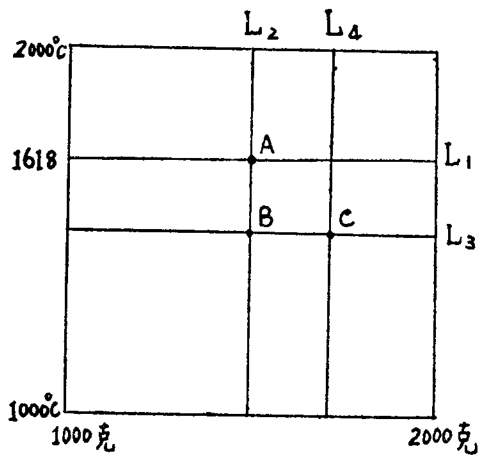
我们把两个因素的试验范围表示在图13的长方形纸片里，横的表示某元素的含量，纵的表示熔炼温度。然后把纸片纵横对折，在纸片的纵横两条中线上找出好点。即先把某元素的含量固定在1500克处，然后在纵的中线L_1上找出最佳的熔炼温度。这是单因素问题，可用前面讲的折纸法或分数法来找出好点，比如说好点在A。其次把熔炼温度固定在

1500℃处，再在横的中线 L_2 上找出某元素的最佳含量，比如在点B。对两个好点A和B进行比较，如果A比B好，就沿横的中线对折裁开，丢掉下边一半，把包含好点A的一半留下，再继续试验。如果B比A好，就沿纵的中线裁开，把含有B点的半片留下。以后就在剩下的纸片上，继续在纵横两条中线上象上面一样进行试验，比较，一次又一次地缩小试验范围，直到找出所要求的最优点。这个方法就叫做对折法。

2.从“好”点出发

这种做法的第一步是把一个因素固定，并用单因素方法找出第二个因素的好点。然后不断地从一个因素的好点出发，继续寻找另一个因素的好点，直到达要到求为止。

还是以炼钢为例，先把温度固定在试验范围的0.618处，即1618℃处，再用单因素的优选法在直线L_1上选出最优点A(图14)。再在通过A点的竖线L_2上对熔炼温度进行优选，找出最优点B，再在通过B点的横线L_3上，对某元素的含量进行优选，找出最优含量的点C，等等，这样试验范围一次比一次缩小。最后根据实际情况，当试验达到一定精度要求或者质量指标已满足给定要求时，试验可暂告一段落。



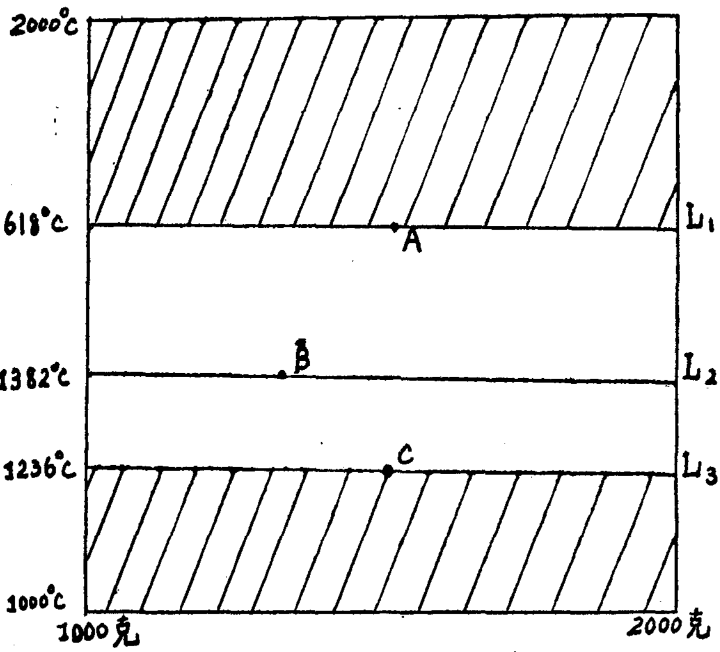
（图14）

如果是单峰的情况，在直线L_2上B点比A点好，则直线 L_1 上面部分可以丢掉，同理，若C点比B点好，则直线L_2的左面部分可以丢掉。但开始做试验时往往不知是单峰，还是多峰，因此最好不这样做，而在整个区域内转圈，这样可能找到更好的峰。不过在生产实践中碰到大量的问题都是单峰问题。

3.平行线法

在实际工作中还会遇到象下面这样的两个因素的问题，即有一个因素不易调整，例如温度这个因素常属这种情况，这时就采用平行线法。仍以炼钢的问题为例子来说明。假定温度是作为不易调整的因素，那么先把它固定起来。就固定在折纸法的最初两个试验点1618℃［1000＋（2000－1000）×0.618］和1382℃［1000＋2000－1618］。再分别用单因素优选法在横线L_1，L_2上找出某元素含量的最佳点A和B（图15）。假定B比A好，就沿L_1裁开纸片，保留含有B点的那一部分，即对温度1618℃——2000℃的范围不再考虑（若A点比B点好，则去掉直线L_2下面的部分）。这样在留下的长方形纸片上再用折纸法确定温度为1236℃，固定温度，对某元素含量再进行优选，找到最佳点为C，将C点与B点比较，如果B点比C点好，则去掉直线L_3下面部分，这样继续按上面的方法进行，一步步缩小试验范围，直至找到最好点为止。

因为这个方法都是在平行的直线上做试验，故称为平行线法。



（图15）

上面所讲的双因素的三种方法，基本原则是一样的：先在两条直线上用单因素优选法找出“好”点（不同仅在于这两条直线的取法），然后比较这两点的好、坏。沿着“坏”点所在那条直线裁开纸片，留下包含“好”点的那个长方形，继续进行试验、比较。循环往复，一次比一次缩小试验范围，更接近好点。

这三种方法也有区别，“从好点出发”较为直观，当“起点”较好时，可以较快地接近最好点，所以把初步的经验作为起点，往往可以较快地达到好点，目前应用中这个方法也用得很多。一般讲，用对折法可以保证试验范围缩小比较快，而平行线法更适用于有一个因素不易调整的情况。

在具体运用优选法进行试验时，要做好下面三步：

1.正确地选择主要因素并确定其变化范围。

2.根据问题的具体条件，正确地确定试验方案。

3.严格地按方案试验。

这三步中最重要的是第一步。能否正确地选择主要因素，只有依靠学习和运用毛主席的哲学思想，认真分析试验的全过程，抓住主要矛盾。在这里估计试验的范围也应注意，这要求根据经验和有关资料仔细估算。但当我们经验不足时，可以先初步定出一个范围进行试验。这时，若好点在估计的范围之外，运用优选法后找出的好点必定在估计范围的左端或右端边界上，所以当我们运用优选法找出好点在边界附近时，就需要超出估计的范围再做几次试验，以便在更大的范围内寻找好点，避免估计的范围漏掉好点。

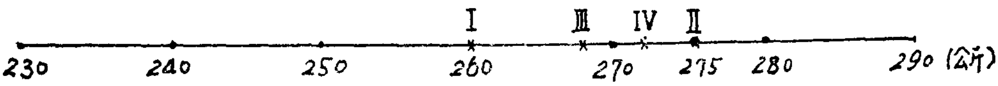
主要矛盾抓错了怎么办？当你挑了二个因素认为是主要矛盾，但优选了三、四次后，好坏区别不大时，就应当考虑矛盾是否抓对，重新分析主要矛盾。

二、特殊性問題

列宁教导我们：**“马克思主义的最本质的东西，马克思主义的活的灵魂，就在于具体地分析具体的情况。”**前面我们介绍了“优选法”一般性的最基本的方法，但实际问题往往更为复杂，所以对具体的问题应做具体的分析，根据不同情况可以采用下面的方法。

（一）平分法

往往有这类问题：为了降低产品成本，要求在保证质量前提下，减少某些贵重原料的用量。例如，合成樟脑的原料之一——冰醋酸，原来一锅（2000立升）加290公斤，为减少耗用量，在230—290公斤范围内进行优选。我们采用平分法安排试验，第一次在中点（260公斤）试（图16），结果质量达不到要求，就丢掉230—260一段。再把剩下范围平分，在分点（275公斤）处做第二次试验，结果质量达到要求，于是就丢掉275—290一段，继续在剩下的范围进行了两次试验都达不到要求，故把冰醋酸用量定为275公斤。



（图16）

在这类问题中，只需要做一次试验就可以进行判断，决定试验范围的取舍。这时我们总是把试验点定在范围当中，质量合格，就丢掉右面半段；质量不合格，就丢掉左边半段，剩下的总是一半。所以在这种情况下用平分法安排试验是最合理的，而不必用折纸法去定试验点了。

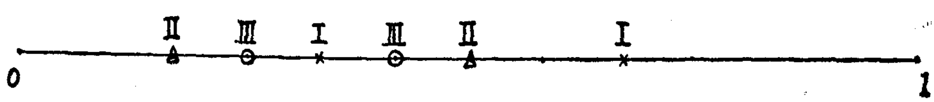
（二）一次可以做几个试验

生产中往往有这种情况：做一次试验要比较长的时间，而试验设备有好几套，可以一次同时做几个试验，以加快试验进度。问题是我们应该怎样合理地安排试验呢？

下面我们分别介绍单因素问题一次做二个、四个、六个试验的方法—“插入法”。

1.一次做两个试验

我们先把试验范围三等分，第一次试验就在两个分点上做，然后作比较，留下好点的左右两段，这样可以去掉整个试验范围的$\frac{1}{3}$（图17）。再把剩下的范围四等分。第

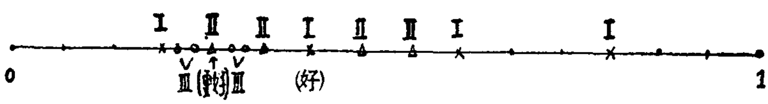


（图17）

二次试验在两个新的分点上做，经比较，留下好点左右两段，可以去掉原来试验范围的一半。同上次一样，我们又把剩下的范围四等分，在两个新的分点上做第三次试验。……，这种方法我们形象地称之为“插入法”，因为每次试验之后，我们总是在留下的好点两旁对称地插入两个新的试验点。

2.一次做四个试验

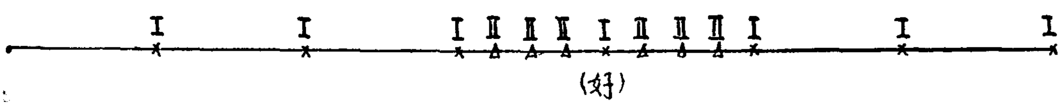
我们仍用“插入法”来做。先把试验范围五等分，在四个分点上做第一次试验（图18），然后比较，保留与最好点邻近两点所挟的部分，这样可以去掉整个试验范围的3/5。再把剩下的范围六等分，在四个新的分点上做第二次试验，经比较，又可丢掉原来试验范围的2/3。然后又把剩下的范围六等分，在四个新的分点上做第三次试验。……



（图18）

3.一次做六个试验

把试验范围七等分，在六个分点上做第一次试验，然后作比较，可丢掉整个试验范围的5/7（图19）。再把剩下的范围八等分，在六个新的分点上做第二次试验，经比较，可丢掉原来试验范围的3/4。然后再把留下的范围八等分，在六个新的分点上做第三次试验。……

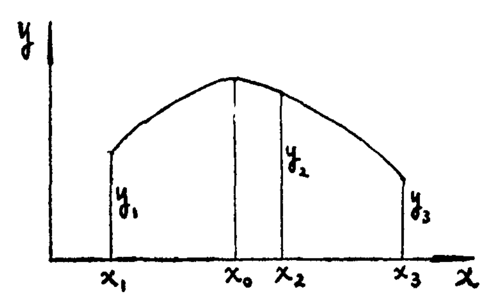


（图19）

以上介绍的是每次做偶数个试验的情况。至于每次做奇数个试验，比如三个、五个、七个等等，问题较为复杂，不过，我们建议是否可以化为每次做偶数个试验的问题加以解决。

（三）抛物线法

前面讲过的方法，仅比较试验结果的好坏，而不管好坏的程度，也就是说，没有充分利用试验结果的数据。如果我们把这些数据加以利用，有可能得到更好的结果。例如在试得三个数据后，过这三点作一抛物线，以这个抛物线的顶点做下次试验的根据。例如在三点 x_1，x_2，x_3 各试得数据为 y_1，y_2，y_3（图20），我们可写出过三点（x_1，y_1）



（图20）

(x_2, y_2)，(x_3, y_3) 的抛物线

$$y=y_1\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+y_2\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

$$+y_3\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$ 它在点

$$x_0=\frac{1}{2}\frac{y_1(x_2^2-x_3^2)+y_2(x_3^2-x_1^2)+y_3(x_1^2-x_2^2)}{y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2)}$$ 处取最大值。

因此，我们下次试验就在 x_0 点处做。（但最好是 y_2 比y_1和y_3 大时，这样做比较合适）当$x_0=x_2$ 时，我们的方法还要稍加修改，例如可取$x_0=½(x_1+x_2)$。

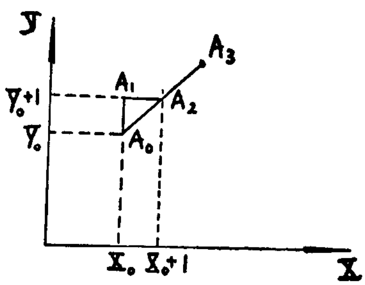
这个方法常常使用在用折纸法或分数法做过一些点的试验后，还不能达到要求，希望继续深化，可采用抛物线法。当然也不局限于单因素，对于双因素也行，只是这时，已做过的三点应在同一直线上。

（四） 陡 度 法

在被优选的因素不能大幅度调整的情况下，建议用陡度法。

先打一个比喻：瞎子在山上某点，想爬到山顶，怎么办？可先从立足处用拐杖向前一试，觉得高些就向前一步，如果前面不高，就向左试一下，高就向左走一步，不高，再向右试一下，如果高就向右走一步。四面都不高就保持现状。总之，高了就走一步，这样一步一步地就走上了山顶。

我们可以用瞎子爬山的办法进行试验。从已有的试验点$A_0(X_0, Y_0)$（用Z_0表示在A_0点处试验结果的指标）出发，向上移动一步，即在$A_1(X_0, Y_0+1)$处试验，得A_1点处的指标为Z_1。然后再向右移动一步，即在$A_2(X_0+1, Y_0+1)$处试验，得A_2点处的指标为Z_2（图21）。



（图21）

我们把Z_1-Z_0，$\frac{Z_2-Z_0}{\sqrt{2}}$，Z_2-Z_1分别称为$A_0\to A_1$，$A_0\to A_2$，$A_1\to A_2$的“陡度”，反过来，我们也把 Z_0-Z_1，$\frac{Z_0-Z_2}{\sqrt{2}}$，Z_1-Z_2分别称为$A_1\to A_0$，$A_2\to A_0$，$A_2\to A_1$ 的“陡度”。“陡度”越大，说明指标沿这个方向上升越快。所以，在我们将几个“陡度”作比较之后，就应沿“陡度”最大的方向试下去，这样就可能更快地找到顶峰。比如，$A_0\to A_2$的“陡度” $\frac{Z_2-Z_0}{\sqrt{2}}$ 比其它几个都大，就应沿$A_0\to A_2$的方向移动一步，下次就在A_3处试验。

一般地，在所有已试验过的点中以$A_0(X_0, Y_0)$的指标Z_0最大，而试验点 A_1

(X_1, Y_1) 的指标为Z_1，则

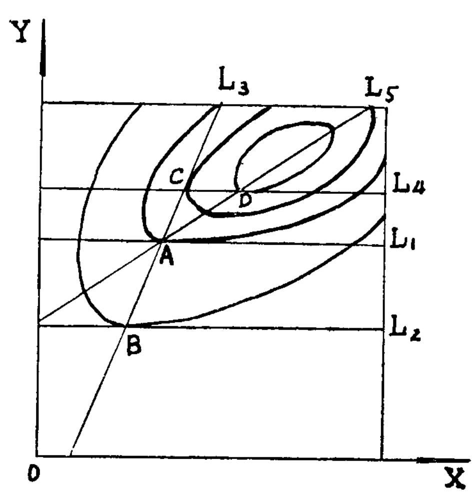
$$\frac{Z_0-Z_1}{\sqrt{(X_0-X_1)^2+(Y_0-Y_1)^2}}$$

就称为A_1到A_0的“陡度”，沿“陡度”最大的方向做试验就有可能更快地找到顶峰。

(五)平行切线法

对双因素的优选，我们已介绍了“对折法”、“从好点出发”、“平行线法”等方法，在解决实际问题中，还可以把几种方法结合起来运用。

假定试验范围是 $0\leqslant X\leqslant 1$， $0\leqslant Y\leqslant 1$我们先用“平行线法”做试验，分别在L_1,L_2上找到好点A和B (图22)。这时我们不再按“平行线法”做下去，而是在A和B的连线上进行优选，找到好点C。为什么这样做呢？因为一圈套一圈的等高线 (参看补充说明中五) 我们可以近似看作中心相似的一组椭圆，而中心相似的椭圆的平行切线的切点连线通过中心(即通过最好点)，所以我们这样做就能更迅速地找到最好点。找到L_3上的好点C后，在通过C的横线L_4上进行优选，又找到好点D，然后又在A和D的连线L_5上进行优选。……



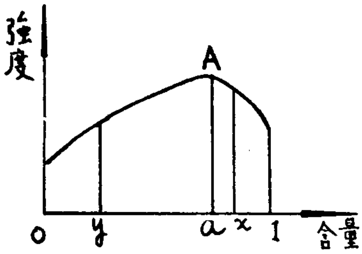
(图22)

三、几点补充説明

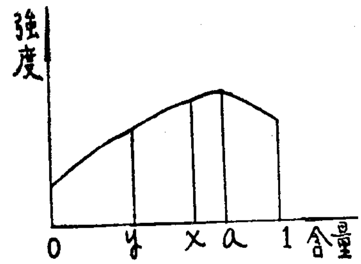
（一）在单因素的优选过程中“好”点会不会丢掉？

在我们使用“折纸法”或“分数法”进行优选时，每比较一次，对试验范围都要丢掉一段，这样做，好点会不会丢掉呢？一般说是不会的。我们仍以炼钢作例子来说明。

假设试验范围是0到1〔以下记为(0,1)〕。通常加进某元素后，随着含量的增加，强度会慢慢好起来，到一定程度后，又慢慢坏下去，它可以用曲线表示(图23)。我们的任务是找最高点A所对应的含量a—(0,1)中的最好点。显然，在a的左边，随着含量的增加，强度也增加；在a的右边，随着含量的增加，强度却减少，这样的现象，我们叫做“单峰”。在生产实际中呈现的规律常常是这样的。



（图23）



（图24）

我们的方法是在x点试验后，再依中对折，找下一点y作试验，假设y在x的左边，a在x与y之间（图23），这时，随便丢掉（O，y）或是(x，1)，a都在留下的线段内。若x和y都在a的左边（图24），则试验结果必然是x比y好，因此丢掉的是（O，y），a也不会丢掉。类似的，x和y都在a的右边，a也不会丢掉。总之好点a不会被丢掉。

（二）非单峰的情况怎么办？

上面我们讲了“单峰”的情况，但是不要认为，以前讲的方法只适用于“单峰”的情况。对于“多峰”(即有几个点，其附近都比它差)的情形，可按“单峰”的方法去做，至少可找到一个“高峰”，然后让实践来检验，如已满足生产要求，那就好了，否则就另选试验范围，找出另外的“高峰”。也可以先粗粗做几点，看看是否“多峰”，若是“多峰”，则分区寻找。但这几个点的位置最好按下面比例划定：

$$\alpha : \beta = 0.618 : 0.382$$