北大燕园

2012年 李永乐·李正元

考研数学 1

数学

数学一

【理工类】

复习全书习题全解

主编 北京大学 李正元
清华大学 李永乐
中国人民大学 袁荫棠

ISBN 978-7-80140-712-2

9 787801 407122

定价：58.00元

特殊防伪
盗版书将丢失重要信息

赠

国家行政学院出版社

2012年李永乐·李正元考研数学①

赠

数学复习全书习题全解

【数学一】 理工类

主编 北京大学 李正元
清华大学 李永乐
中国人民大学 袁荫棠

编者 （按姓氏笔画）
北京大学 李正元
清华大学 李永乐
北京大学 刘西垣
中国人民大学 严颖
北京大学 范培华
中国人民大学 袁荫棠

国家行政学院出版社
·北京·

目　录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

第一篇　高等数学

▶ 第一章　极限、连续与求极限的方法

一、选择题

1.【分析一】　连续与不连续的复合可能连续，也可能间断，故(A)，(B) 不对．不连续函数的相乘可能连续，故(C) 也不对，因此，选(D)．

【分析二】　$f(x)$ 在 $x=a$ 连续，$\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处间断，又 $f(a)\neq 0$，$\Rightarrow \dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 在 $x=a$ 处间断．(若不然，$\Rightarrow \varphi(x)=\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}\cdot f(x)$ 在 $x=a$ 连续，与已知矛盾)．选(D)．

> **评注**　$\varphi(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant a,\\ -1, & x<a\end{cases}$ 在 $x=a$ 处间断，但 $\varphi^2(x)=1$ 连续．$f(x)=x^2+a$ 在 $x=a$ 处连续，$f[\varphi(x)]=1+a$，$\varphi[f(x)]=1$ 在 $x=a$ 处连续．

2.【分析】　$f(x)$ 在 $x=a$ 连续，$\Rightarrow |f(x)|$ 在 $x=a$ 连续 $\left(\big||f(x)|-|f(a)|\big|\leqslant|f(x)-f(a)|\right)$．

$|f(x)|$ 在 $x=a$ 连续 $\nRightarrow f(x)$ 在 $x=a$ 连续．

如 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant a,\\ -1, & x<a,\end{cases}$　$|f(x)|=1$，$|f(x)|$ 在 $x=a$ 连续，但 $f(x)$ 在 $x=a$ 间断．

因此，选(B)．

3.【分析一】　直接考察．若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小，则

$$y_n=\frac{1}{x_n}\cdot x_ny_n\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}y_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x_n}\cdot\lim_{n\to+\infty}(x_ny_n)=0.$$

因此(D) 成立．

【分析二】　举例说明(A)，(B)，(C) 不正确．

x_n:0,1,0,2,0,3,…… 发散，y_n:0,0,0,0,0,0,…… 收敛，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_ny_n=0$．(A) 不正确．

x_n:0,1,0,2,0,3,…… 无界，y_n:1,0,2,0,3,0,…… 无界，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_ny_n=0$．(B) 不正确．

x_n:0,1,0,1,0,1,…… 有界，y_n:1,0,1,0,1,0,…… 不是无穷小，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_ny_n=0$．(C) 不正确．

因此，选(D)．

4.【分析】　取 $x_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\in(-\infty,+\infty)\ (n=1,2,3,\cdots)$，则

$$f(x_n)=\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=2n\pi+\frac{\pi}{2}\to+\infty\quad(n\to+\infty).$$

因此 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 无界．选(C)．

> **评注**　取 $y_n=2n\pi\ (n=1,2,3,\cdots)$，则 $f(y_n)=0$．因此，$x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 不是无穷大．

5.【分析】 如：$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}0, & x\geqslant 0,\\ 1, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 均不连续，但 $f(x)+g(x)=1$，$f(x)\cdot g(x)=0$ 在 $x=0$ 均连续．又如：$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 均不连续，而 $f(x)+g(x)=\begin{cases}3, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ $f(x)\cdot g(x)=\begin{cases}2, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 均不连续．因此选(D)．

6.【分析】 该题就是要计算极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}\frac{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\mathrm{e}}-1}{\frac{1}{n}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}\frac{\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\Big/\mathrm{e}\right]}{\frac{1}{n}}$$ （等价无穷小因子替换：$t\to 0$ 时 $\ln(1+t)\sim t$）

$$=\mathrm{e}\lim_{n\to+\infty}\frac{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}{\frac{1}{n}}=\mathrm{e}\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}$$

$$=\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\mathrm{e}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\frac{\mathrm{e}}{2},$$ （转化为求相应的 $\frac{0}{0}$ 型函数极限，然后用洛必达法则）

因此选(D)．

二、填空题

1.【分析】 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}3\cdot\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\sin x}{x}=3+0=3$．

2.【分析】 由题设及 $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{e}^{2x}-1)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+f(x)\tan x}-1=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x)\tan x=0$．现利用等价无穷小因子替换

$$\sqrt{1+f(x)\tan x}-1\sim\frac{1}{2}f(x)\tan x\ (x\to 0),\quad \mathrm{e}^{2x}-1\sim 2x\quad (x\to 0),$$

$\Rightarrow$ 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}f(x)\tan x}{2x}=3\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x)=12$．

3.【分析】 是 1^∞ 型极限．

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}\ln[\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}]}$．而

$$\lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{x}\ln\left(\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}\right)\right]\xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}}\lim_{x\to 0}\frac{-[-\delta K^{-x}\ln K-(1-\delta)L^{-x}\ln L]}{\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}}$$

$$= \ln K^{\delta} + \ln L^{1-\delta},$$

因此,原式 $= e^{\ln K^{\delta} + \ln L^{1-\delta}} = K^{\delta}L^{1-\delta}$.

4.【分析】 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} f(x) = f(0)$. 由于

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{1-e^{\tan x}}{\arcsin \frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\tan x}{\frac{x}{2}} = -2, \quad \lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} (ae^{2x}) = a = f(0),$$

因此 $a=-2$.

5.【分析】 由于

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x^2-e^{x^2}}{x^{2k}} \xlongequal{t=x^2} \lim_{t\to 0+} \frac{1+t-e^t}{t^k} \xlongequal[\text{洛必达}]{(k\geqslant 1)\frac{0}{0}} \lim_{t\to 0+} \frac{1-e^t}{kt^{k-1}} \xlongequal[\text{取 } k=2]{\frac{0}{0}} \lim_{t\to 0+} \frac{-e^t}{2} = -\frac{1}{2},$$

因此 $x\to 0$ 时 $1+x^2-e^{x^2}$ 是 x 的 4 阶无穷小.

> **评注** 若用泰勒公式
>
> $$1+x^2-e^{x^2} = 1+x^2-\left[1+x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^4)\right] = -\frac{1}{2}x^4+o(x^4),$$
>
> 更易得结论.

6.【分析】 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}\cdot\frac{2a}{x-a}x} = e^{2a} = 9.\quad \Rightarrow \quad a = \ln 3.$

三、求下列极限

1.【解法一】

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+1}\cdot\frac{x\sin x}{e^{x^2}-1}\right) = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{e^{x^2}-1} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + x\cos x}{2xe^{x^2}} = \frac{1}{4}(1+1) = \frac{1}{2}.$$

【解法二】 用等价无穷小因子替换.

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x\sin x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

2.【解】 记 $p_n = \frac{t}{n}+\frac{t^2}{2n^2}$,则原式 $= \lim\limits_{n\to+\infty}(1+p_n)^{\frac{1}{p_n}\cdot p_n(-n)}$.

又 $\lim\limits_{n\to+\infty}(-np_n) = -t$,因此,原式 $= e^{-t}$.

3.【解法一】 属 $\infty-\infty$ 型未定式. 先通分,有

$$\text{原式} = \lim_{x\to+\infty}\frac{ex^{1+x}-x(1+x)^x}{(1+x)^x e} = \lim_{x\to+\infty}\frac{ex-x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x e}$$

$$= \frac{1}{e^2}\lim_{x\to+\infty}\frac{e-e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{\frac{1}{x}} \xlongequal{\left(t=\frac{1}{x}\right)} \frac{1}{e^2}\lim_{t\to 0+}\frac{e-e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)}}{t}$$

$$= \frac{1}{e^2}\lim_{t\to 0^+}\left(-(1+t)^{\frac{1}{t}}\frac{\frac{t}{1+t}-\ln(1+t)}{t^2}\right) = -\frac{1}{e}\lim_{t\to 0^+}\frac{t-(1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)}$$

$$= -\frac{1}{e}\lim_{t\to 0}\frac{-\ln(1+t)}{2t} = \frac{1}{2e}.$$

【解法二】

$$\text{原式} = \frac{1}{e}\lim_{x\to\infty}x\left[e\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}-1\right] \xlongequal{\text{等价无穷小因子替换}} \frac{1}{e}\lim_{x\to+\infty}x\ln\left[e\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}\right]$$

$$= \frac{1}{e}\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \xlongequal{\left(t=\frac{1}{x}\right)} \frac{1}{e}\lim_{t\to 0^+}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2} = \frac{1}{e}\lim_{t\to 0^+}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t} = \frac{1}{2e}.$$

4.**【解】** 原式 $= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x^2\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} - \lim_{x\to 0}\cos x = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$.

5.**【解】** 0^0 型. 故原式 $= \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{\ln x}\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}$. 而

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\ln x} \xlongequal[\text{(洛必达法则)}]{\frac{\infty}{\infty}} \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{1+x^2}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)} \xlongequal{\text{(洛必达法则)}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{1+x^2}} = -1,$$

故原式 $= e^{-1}$.

6.**【解】** ∞^0 型. 原式 $= \lim_{x\to 0^+} e^{\tan x\ln\frac{1}{\sqrt{x}}}$. 而

$$\lim_{x\to 0^+}\tan x\ln\frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t^2} \xlongequal[\text{(洛必达法则)}]{\frac{\infty}{\infty}} \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2t^2} = 0,$$

故原式 $= e^0 = 1$.

7.**【解】** 原式 $= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} \xlongequal{\text{(等价无穷小因子替换)}} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2} \xlongequal[\text{洛必达法则}]{\frac{0}{0}} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x} = \frac{1}{2}$.

8.**【解法一】** 原式 $\xlongequal[(x<0)]{\sqrt{x^2}=-x} \lim_{x\to-\infty}x^2\left(1-\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}\right) = -\lim_{x\to-\infty}x^2\left(\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}-1\right)$

$$\xlongequal[\text{因子替换}]{\text{等价无穷小}} -\lim_{x\to-\infty}x^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{100}{x^2}\right) = -50.$$

【解法二】 同前,

$$\text{原式} = \lim_{x\to-\infty}x^2\left(1-\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1-\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}}{\frac{100}{x^2}}\cdot 100\right)$$

$$\xlongequal{t=\frac{100}{x^2}} 100\cdot\lim_{t\to0+}\frac{1-\sqrt{1+t}}{t}\ \underset{\text{洛必达法则}}{\overset{\frac{0}{0}}{=\!=\!=}}\ 100\cdot\lim_{t\to0+}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+t}}\right)=-50.$$

【解法三】 用相消法.

$$\text{原式}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot100}{\sqrt{x^2+100}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{100x}{-x\left(\sqrt{1+\frac{100}{x^2}}+1\right)}=-50.$$

9.【解】 注意 $\sin t\sim t,\ln(1+t)\sim t(t\to0)$，于是 $\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)\sim\frac{k}{x}$（$k$ 为常数），$\sin\left[\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)\right]\sim\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)\sim\frac{k}{x}(x\to\infty)$. 因此，先用求极限的四则运算法则，再利用等价无穷小因子替换可得

$$w=\lim_{x\to\infty}x\sin\left[\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right]-\lim_{x\to\infty}x\sin\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{3}{x}-\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{1}{x}=2.$$

10.【解】 属 $\frac{\infty}{\infty}$ 型.

$$w=\lim_{x\to\infty}\frac{2\int_0^{2x}e^{t^2}dt\left(\int_0^{2x}e^{t^2}dt\right)'}{-3e^{18x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4e^{4x^2}\int_0^{2x}e^{t^2}dt}{-3e^{18x^2}}=-\frac{4}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^{2x}e^{t^2}dt}{e^{14x^2}}=-\frac{4}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{4x^2}}{28xe^{14x^2}}=0.$$

11.【解】 （Ⅰ）注意立方和公式 $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$，则

$$\text{原式}=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4n^3}-\frac{n}{4}\right]=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4}\frac{(n+1)^2-n^2}{n}=\frac{1}{2}.$$

（Ⅱ）注意 $2\times\frac{x}{2^n}=\frac{x}{2^{n-1}}$，为利用倍角公式化简 x_n，两边同乘 $\sin\frac{x}{2^n}$，得

$$\begin{aligned}x_n\cdot\sin\frac{x}{2^n}&=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2^{n-1}}\\&=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin\frac{x}{2^{n-2}}=\cdots=\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin x.\end{aligned}$$

从而 $x\neq0$ 时，$x_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin x\Big/\sin\frac{x}{2^n}$，所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^nx}{\sin\frac{1}{2^n}x}\cdot\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin x}{x}$;

$x=0$ 时，$x_n=1$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=1$.

12.【解】 分别求左、右极限：

$$\lim_{x\to1+0}f(x)=\lim_{x\to1+0}\frac{x^x-1}{x\ln x}=\lim_{x\to1+0}\frac{\ln[(x^x-1)+1]}{x\ln x}\xlongequal{\text{等价无穷小因子替换}}\lim_{x\to1+0}\frac{x\ln x}{x\ln x}=1,$$

$$\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1-0}\frac{\sin(1-x)+\cos(1-x)-1}{1-x}=\lim_{x\to1-0}\frac{\sin(1-x)}{1-x}+\lim_{x\to1-0}\frac{-\frac{1}{2}(1-x)^2}{1-x}=1,$$

因此 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=1$.

四、证明题与计算题

1.【证明】 令 $f(x)=x(2-x)$，则 $x_{n+1}=f(x_n)$．易知

$$f'(x)=2(1-x)>0,\quad x\in(0,1).$$

因 $0<x_0<1 \Rightarrow x_1=x_0(2-x_0)=1-(x_0-1)^2\in(0,1)$．

若 $x_n\in(0,1) \Rightarrow x_{n+1}=x_n(2-x_n)\in(0,1)$．

又 $x_1-x_0=x_0(1-x_0)>0 \Rightarrow x_n$ 单调上升且有界 $\Rightarrow \exists$ 极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$．

由递归方程得 $a=a(2-a)$．显然 $a>0 \Rightarrow a=1$．因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=1$．

2.【解】 （Ⅰ）注意：$x>\ln(1+x)\quad(x>0)$，于是

$x_{n+1}-x_n=\ln(1+x_n)-x_n<0\quad(n=1,2,3,\cdots) \Rightarrow x_n\downarrow$ 有下界 $0\Rightarrow\exists$ 极限

$$\lim_{x\to+\infty}x_n\xlongequal{\text{记为}}a.\because\ (a\geqslant 0)$$

$\Rightarrow a=\ln(1+a)$．$(a>0$ 时 $a>\ln(1+a))\Rightarrow a=0$．

（Ⅱ）原式 $=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n\ln(1+x_n)}{x_n-\ln(1+x_n)}\xlongequal[\text{函数极限}]{\text{数列极限 转化为}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln(1+x)}{x-\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x-\ln(1+x)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x}{1-\dfrac{1}{1+x}}=2.$$

3.【解】 当 $0<a<1$ 时 $0<x_n<a^n$，$\lim\limits_{n\to+\infty}a^n=0$；当 $a=1$ 时 $x_n=\dfrac{1}{2^n}$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$；

当 $a>1$ 时 $0<x_n<\dfrac{a^n}{a^{n-1}a^n}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{n-1}$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{a}\right)^{n-1}=0$．

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$．

4.【证明】 令 $x_n=\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(n+n-1)}=\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n-1}{n}\right)}$

$$=\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n-1}{n}\right)},$$

取对数化乘积为和差

$$y_n=\ln x_n=\frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{积分和的极限}}\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x=\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}(x+1)$$

$$=(x+1)\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x+1}{1+x}\mathrm{d}x=2\ln2-1=\ln4-1,$$

故 $$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{y_n}=\mathrm{e}^{\ln4-1}=\frac{4}{\mathrm{e}}.$$

5.【解】 （Ⅰ）这是初等函数，它在定义域（$x^2\neq1$）上连续．因此，$x\neq\pm1$ 时均连续．$x=\pm1$ 时，

$$\lim_{x\to1+0}(1+x)\arctan\frac{1}{1-x^2}=2\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\pi,$$

$$\lim_{x\to1-0}(1+x)\arctan\frac{1}{1-x^2}=2\times\left(+\frac{\pi}{2}\right)=\pi,$$

故 $x=1$ 是第一类间断点(跳跃的). 又 $\lim\limits_{x\to-1+0} y=0$, $\lim\limits_{x\to-1-0} y=0$,

故 $x=-1$ 也是第一类间断点(可去).

(Ⅱ) 先求极限函数. 注意 $\lim\limits_{n\to+\infty} x^{2n}=0(|x|<1)$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{x^{2n}}=0(|x|>1)$,

$$\Rightarrow \quad y=\begin{cases}-1-x, & |x|<1,\\ -x, & |x|=1,\\ 1-x, & |x|>1.\end{cases}$$

$x\neq\pm1$ 时, $|x|<1$ 与 $|x|>1$ 分别与某初等函数相同,故连续.

$x=\pm1$ 时均是第一类间断点(跳跃间断点). 因左、右极限均 ∃,不相等.

(Ⅲ) 在区间 $(0,+\infty)$, $[-1,0)$ 上函数 y 分别与某初等函数相同,因而连续. 在 $x=0$ 处 y 无定义,

而
$$\lim_{x\to0+} y=\lim_{x\to0+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to0-} y=\lim_{x\to0-}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=1,$$

$\Rightarrow x=0$ 是第一类间断点(可去间断点).

(Ⅳ) 记 $g(x)=\int_0^{\sin x}\cos t^2\mathrm{d}t$,由变限积分的性质及复合函数的连续性,知 $g(x)$ 是连续函数,再由连续性的运算法则,知 $x\neq0$ 时 $f(x)=\dfrac{g(x)}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 连续. 由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\cos(\sin^2x)\cos x=1\neq0$,

而 $\lim\limits_{x\to0\pm}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在,所以 $\lim\limits_{x\to0\pm}\dfrac{g(x)}{x}\cdot\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在(见【定理 1.9】【注】①),即 $\lim\limits_{x\to0\pm} f(x)$ 不存在. $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(Ⅴ) $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\ln(1+x)}$ 是初等函数,在 $(0,2\pi)$ 内 $f(x)$ 有定义处均连续. 仅在 $\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 无定义处及 $\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ 处 $f(x)$ 不连续.

在 $(0,2\pi)$ 内, $\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 无定义的点是: $x=\dfrac{3}{4}\pi,\dfrac{7}{4}\pi$; $\tan\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ 的点是: $x=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5}{4}\pi$. 因此 $f(x)$ 的间断点是: $x=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3}{4}\pi,\dfrac{5}{4}\pi,\dfrac{7}{4}\pi$.

为判断间断点类型,考察间断点处的极限: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{5}{4}\pi+0} f(x)=+\infty$,则 $x=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5}{4}\pi$ 是第二类间断点(无穷型的). 又 $\lim\limits_{x\to\frac{3}{4}\pi} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to\frac{7}{4}\pi} f(x)=1$,则 $x=\dfrac{3}{4}\pi,\dfrac{7}{4}\pi$ 是第一类间断点(可去型的).

(Ⅵ) **方法 1°** 先求 $f(g(x))$ 表达式.

$$f[g(x)]=\begin{cases}g^2(x), & g(x)\leqslant1,\\ 2-g(x), & g(x)>1\end{cases}=\begin{cases}x^2, & x\leqslant1,\\ 2-(x+4), & x>1\end{cases}=\begin{cases}x^2, & x\leqslant1,\\ -2-x, & x>1.\end{cases}$$

$x>1$, $x<1$ 时, $f[g(x)]$ 分别与某初等函数相同,因而连续. $x=1$ 时,分别求左、右极限

$$\lim_{x\to1+0} f[g(x)]=\lim_{x\to1+0}(-2-x)=-3,\quad \lim_{x\to1-0} f[g(x)]=\lim_{x\to1-0} x^2=1,$$

故 $x=1$ 为第一类间断点(跳跃间断点).

方法 2° 不必求出 $f[g(x)]$ 的表达式,用连续性运算法则来讨论. $x\neq1$ 时 $g(x)$ 连续, $f(u)$ 处处连续. $\Bigg($因为 $f(u)=\begin{cases}u^2, & u\leqslant1,\\ 2-u, & u\geqslant1\end{cases}$ 在 $(-\infty,1]$ 与 $[1,+\infty)$ 分别与某初等函数相同,故连续,因而

$f(u)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续 $\Big)$. 因此, $x\neq 1$ 时由连续函数的复合函数的连续性 $\Rightarrow f[g(x)]$ 连续.

$x=1$ 处分别求左、右极限

$$\lim_{x\to 1+0} f[g(x)]=\lim_{x\to 1+0} f(x+4)=\lim_{x\to 1+0}[2-(x+4)]=-3,$$

$$\lim_{x\to 1-0} f[g(x)]=\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0} x^2=1,$$

故 $x=1$ 为第一类间断点(跳跃间断点).

6.【分析】 只须证明: $\dfrac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)$ 是 $f(x)$ 在 (a,b) 内某两个函数值的中间值.

【证明】 依题设 n 个函数值 $f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)$ 中一定有最小和最大的,不妨设

$$\min\{f(x_1),\cdots,f(x_n)\}=f(x_1),\quad \max\{f(x_1),\cdots,f(x_n)\}=f(x_n),$$

则

$$f(x_1)\leqslant\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)\leqslant f(x_n).$$

记 $\eta=\dfrac{1}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)$, 若 $\eta=f(x_1)$, 则 $\exists\xi=x_1\in(a,b)$, $f(\xi)=\eta$; 若 $\eta=f(x_n)$, 则 $\exists\xi=x_n\in(a,b)$, $f(\xi)=\eta$.

若 $f(x_1)<\eta<f(x_n)$, 由【定理 1.14】, $\exists\xi$ 在 x_1 与 x_n 之间, 即 $\xi\in(a,b)$, $f(\xi)=\eta$.

7.【分析与证明】 反证法. 若在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 处处不为零, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上或恒正或恒负. 不失一般性, 设 $f(x)>0$, $x\in[a,b]$, 则 $\exists x_0\in[a,b]$, $f(x_0)=\min\limits_{[a,b]}f(x)>0$. 由题设, 对此 x_0, $\exists y\in[a,b]$, 使得

$$f(y)=|f(y)|\leqslant\frac{1}{2}|f(x_0)|=\frac{1}{2}f(x_0)<f(x_0),$$

与 $f(x_0)$ 是最小值矛盾. 因此, $\exists\xi\in[a,b]$, 使 $f(\xi)=0$.

8.【证明】 因 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A>\dfrac{A}{2}$, 由极限的不等式性质可知, $\exists X$, 当 $x>X$ 时, $f(x)>\dfrac{A}{2}$, 则 $x>X$ 时, 有

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^X f(t)\,\mathrm{d}t+\int_X^x f(t)\,\mathrm{d}t\geqslant\int_0^X f(t)\,\mathrm{d}t+\frac{A}{2}(x-X),$$

因此 $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=+\infty$.

评注 若 $A>0$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=+\infty$. 类似可知, 若 $A<0$, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=-\infty$.

9.【证明】 先作变量替换:

$$\int_0^1 f(nx)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^1 f(nx)\,\mathrm{d}(nx)\xlongequal{nx=t}\frac{1}{n}\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

这是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型数列极限. 将它转化为 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型函数极限, 便可用洛必达法则求之, 即

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(nx)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A.$$

> **评注** 事实上,若 $A=0$,则题中的结论仍成立. 因为只要当 $x>X$ 时,$f(x)$,$g(x)$ 可导,$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$(或 $-\infty$,或 ∞),又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$,就有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$.

▶ 第二章　一元函数的导数与微分概念及其计算

一、选择题

1.【分析】 注意 $P(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续,又 $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)=+\infty \Rightarrow x>x_0$ 时 $P(x)>0 \Rightarrow$

$$P'(x_0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{P(x)-P(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0+0}\frac{P(x)}{x-x_0}\geqslant 0.$$

选(D).

2.【分析】 实质上就是讨论 $g(x)=x^2|x|=\begin{cases}x^3, & x\geqslant 0,\\ -x^3, & x\leqslant 0\end{cases}$ 时,$g^{(n)}(0)\exists$ 的最高阶数 n.

$$g'(x)=\begin{cases}3x^2, & x\geqslant 0,\\ -3x^2, & x\leqslant 0,\end{cases}\quad g''(x)=\begin{cases}6x, & x\geqslant 0,\\ -6x, & x\leqslant 0\end{cases}=6|x|,$$

由于 $|x|$ 在 $x=0$ 不可导,因此 $n=2$. 选(C).

3.【分析】 首先,$f(x)$ 在 $x=0$ 连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$,即 $0=b$.

然后,$f(x)$ 在 $x=0$ 可导 $\Leftrightarrow f'_+(0)=f'_-(0)$.

当 $b=0$ 时,$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ ax, & x\leqslant 0.\end{cases}$

按定义求出 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=0.$

由求导法则知 $f'_-(0)=(ax)'\big|_{x=0}=a$.

由 $f'_+(0)=f'_-(0)$ 得 $a=0$. 因此选(A).

4.【分析】 直接由定义出发 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$.

由极限的保序性 $\Rightarrow \exists\delta>0$,当 $x\in(a-\delta,a+\delta)$,$x\neq a$ 时 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$.

$\Rightarrow$ $f(x)>f(a)$ $(x\in(a,a+\delta))$,$f(x)<f(a)$ $(x\in(a-\delta,a))$. 因此选(C).

5.【分析】 显然 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$. 又

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{x}}{x}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{-x}}{x}=-\infty,$$

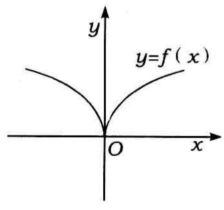

图 2.1

$y=f(x)$ 的图形见图 2.1.

因此,$f'(0)$ 不 $\exists$,$y=f(x)$ 在 $(0,0)$ $\exists$ 切线 $x=0$. 选(D).

二、填空题

1.【分析】 $y=f(u)$， $u=\dfrac{3x-2}{3x+2}=1-\dfrac{4}{3x+2}$， $u\big|_{x=0}=-1$．

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=0}=f'(-1)\cdot\left(1-\frac{4}{3x+2}\right)'\bigg|_{x=0}=f'(-1)\left[-\frac{-4\cdot 3}{(3x+2)^2}\right]\bigg|_{x=0}$$

$$=\frac{\pi}{4}\cdot 3=\frac{3}{4}\pi.$$

2.【分析】 $F'(x)=f(\mathrm{e}^{-x})(-\mathrm{e}^{-x})-f(x^2)\cdot 2x=-\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})-2xf(x^2)$．

3.【分析】 $f^{(2)}(x)=3f^2(x)f'(x)=3f^5(x),f^{(3)}(x)=3\cdot 5f^4(x)f'(x)=3\cdot 5f^7(x)$，可归纳证明

$$f^{(n)}(x)=(2n-1)!!f^{2n+1}(x).$$

4.【分析】 y 为偶函数 $\Rightarrow y^{(5)}(x)$ 为奇函数 $\Rightarrow y^{(5)}(0)=0$.

5.【分析】 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{-\sin t}{2t}$， $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\left(-\dfrac{\sin t}{2t}\right)'_t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{t\cos t-\sin t}{t^2}\cdot\dfrac{1}{2t}=\dfrac{\sin t-t\cos t}{4t^3}$.

6.【分析】 $t=2$ 时 $(x,y)=(5,8)$， $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{3t^2}{2t}=\dfrac{3}{2}t=3$．

切线方程为 $y-8=3(x-5)$，即 $y=3x-7$．

7.【分析】 参数方程 $\begin{cases}x=r\cos\theta=a\cos\theta+a\cos^2\theta,\\ y=r\sin\theta=a\sin\theta+a\cos\theta\sin\theta,\end{cases}$ 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'_\theta}{x'_\theta}=\frac{a\cos\theta+a\cos^2\theta-a\sin^2\theta}{-a\sin\theta-2a\cos\theta\sin\theta}=\frac{\cos\theta+\cos2\theta}{-\sin\theta-\sin2\theta}.$$

（Ⅰ）在点 $(r,\theta)=(2a,0)$ 处，$(x,y)=(2a,0)$，切线 $x=2a\left(\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\infty\right)$.

（Ⅱ）在点 $(r,\theta)=\left(a,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 处，$(x,y)=(0,a)$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1$，切线 $y-a=x$．

（Ⅲ）在点 $(r,\theta)=(0,\pi)$ 处，$(x,y)=(0,0)$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，切线 $y=0$．

$$\left(\lim_{\theta\to\pi}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{\theta\to\pi}\frac{-\sin\theta-2\sin2\theta}{-\cos\theta-2\cos2\theta}=0.\right)$$

8.【分析】 将方程对 x 求导 $\Rightarrow\dfrac{2x}{a^2}-\dfrac{2y}{b^2}y'=0$，即 $y'=\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x}{y}$.

在 M_0 处 $y'=\dfrac{b}{a}\dfrac{2}{\sqrt3}$，法线方程为 $y-\sqrt3b=-\dfrac{a}{b}\dfrac{\sqrt3}{2}(x-2a)$，即 $\dfrac{\sqrt3}{3a}y+\dfrac{1}{2b}x=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$.

9.【分析】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{\tan x^2}=f'(0)\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

10.【分析】 原式 $=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^k-1}{\dfrac{1}{n}}=(x^k)'\big|_{x=1}=k.$

或利用等价无穷小因子替换：$t\to 0$ 时，$(1+t)^k-1\sim kt$，有

$$原式=\lim_{n\to+\infty}n\cdot\left(k\cdot\frac{1}{n}\right)=k.$$

三、计算题

1.【解】 $\dfrac{dy}{dx}=e^{\sin^2 x}2\sin x\cos x+\dfrac{1}{2}\dfrac{-\sin x}{\sqrt{\cos x}}2^{\sqrt{\cos x}}+\sqrt{\cos x}\cdot 2^{\sqrt{\cos x}}\left(\dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}\right)\ln 2$

$$=e^{\sin^2 x}\sin 2x-\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}2^{\sqrt{\cos x}}(1+\sqrt{\cos x}\ln 2).$$

2.【解】 $\ln|y|=\dfrac{1}{5}\ln|x-5|-\dfrac{1}{25}\ln(x^2+2)$，求导得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-5}-\frac{1}{25}\frac{2x}{x^2+2},\quad y'=y\left[\frac{1}{5(x-5)}-\frac{2x}{25(x^2+2)}\right].$$

3.【解】 $dz=\left[e^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{1}{x}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\sin\dfrac{1}{x}+e^{\tan\frac{1}{x}}\cos\dfrac{1}{x}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\right]dx$

$$=-\frac{1}{x^2}e^{\tan\frac{1}{x}}\left(\tan\frac{1}{x}\sec\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)dx.$$

4.【解】 $y'=\dfrac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\dfrac{1}{1+\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\tan\dfrac{x}{2}\right)^2}\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}$

$$=\frac{1}{a+b}\frac{a+b}{(a+b)+(a-b)\tan^2\dfrac{x}{2}}\frac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{(a+b)\cos^2\dfrac{x}{2}+(a-b)\sin^2\dfrac{x}{2}}=\frac{1}{a+b\cos x}.$$

5.【解】 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y_t'}{x_t'}=\dfrac{[tf'(t)-f(t)]'}{f''(t)}=\dfrac{tf''(t)}{f''(t)}=t,$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}(t)=(t)'\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{1}{f''(t)},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{f''(t)}\right]\frac{dt}{dx}=-\frac{f^{(3)}(t)}{f''^2(t)}\cdot\frac{1}{f''(t)}=-\frac{f^{(3)}(t)}{[f''(t)]^3}.$$

6.【解】 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y_t'}{x_t'}=\dfrac{\cos t^2-2t^2\sin t^2-\dfrac{\cos t^2}{2t}\cdot 2t}{(-\sin t^2)\cdot 2t}=t(t>0)$，$\quad\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}(t)\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x_t'}=-\dfrac{1}{2t\sin t^2}$，

故 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$, $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=\dfrac{-1}{\sqrt{2\pi}}$.

7.【解法一】 两边取对数得 $y\ln x=x\ln y$.

两边对 y 求导,并注意 $x=x(y)$,得 $\ln x+\dfrac{y}{x}\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{dx}{dy}\ln y+\dfrac{x}{y}$.

两边乘 xy,并移项得 $(y^2-xy\ln y)\dfrac{dx}{dy}=x^2-xy\ln x$.

解出$\dfrac{dx}{dy}$得 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x^2-xy\ln x}{y^2-xy\ln y}$

【解法二】 利用多元函数微分学的方法:$x=x(y)$ 由方程 $F(x,y)=0$ 确定,其中 $F(x,y)=x^y-y^x$,直接代公式得 $\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{\partial F}{\partial y}\Big/\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{-(x^y\ln x-xy^{x-1})}{yx^{y-1}-y^x\ln y}$.

约去 $x^y=y^x$ 得 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{xy^{-1}-\ln x}{yx^{-1}-\ln y}=\dfrac{x^2-xy\ln x}{y^2-xy\ln y}$.

8.【解】 $e^y=y^x$,两边取对数得 $y=x\ln y$. 对 x 求导(注意 $y=y(x)$)$\Rightarrow$

$$\frac{dy}{dx}=\ln y+\frac{x}{y}\frac{dy}{dx},\quad y\frac{dy}{dx}=y\ln y+x\frac{dy}{dx}.\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y\ln y}{y-x}.$$

求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$有两种方法:

方法 1° 将$\dfrac{dy}{dx}$的方程 $y\dfrac{dy}{dx}=y\ln y+x\dfrac{dy}{dx}$ 两边对 x 求导得

$$y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{dy}{dx}\ln y+2\frac{dy}{dx}+x\frac{d^2y}{dx^2}.$$

解出$\dfrac{d^2y}{dx^2}$并代入$\dfrac{dy}{dx}$表达式得

$$(y-x)\frac{d^2y}{dx^2}=(\ln y+2)\cdot\frac{y\ln y}{y-x}-\frac{y^2\ln^2y}{(y-x)^2}=\frac{[(\ln y+2)(y-x)-y\ln y]y\ln y}{(y-x)^2}.$$

注意 $y=x\ln y$,于是 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(y-2x)y\ln y}{(y-x)^3}$.

方法 2° 将$\dfrac{dy}{dx}$的表达式再对 x 求导得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{y\ln y}{y-x}\right)=\frac{(\ln y+1)\frac{dy}{dx}(y-x)-y\ln y\left(\frac{dy}{dx}-1\right)}{(y-x)^2}.$$

注意 $y=x\ln y$,化简得 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{y\ln y-x\frac{dy}{dx}}{(y-x)^2}$.

代入$\dfrac{dy}{dx}$表达式得 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(y-2x)y\ln y}{(y-x)^3}$.

9.【解】 注意 $y=y(x)$,将方程两边对 x 求导,由复合函数求导法及变限积分求导法得

$$2-\frac{1}{\cos^2(x-y)}(1-y')=\sec^2(x-y)(1-y').$$

$\Rightarrow$ $\sec^2(x-y)(1-y')=1$,即 $1-y'=\cos^2(x-y)$. ①

再对 x 求导 $\Rightarrow\quad -y''=2\cos(x-y)[-\sin(x-y)](1-y')$.

代入①式 $\Rightarrow\quad y''=\sin 2(x-y)\cos^2(x-y)$.

10.【解】 把方程中的$\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\frac{d^3y}{dx^3}$用$\frac{dx}{dy},\frac{d^2x}{dy^2},\frac{d^3x}{dy^3}$来表示.

由反函数求导法得 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$. 再由复合函数求导法及反函数求导法 $\Rightarrow$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}\right]=\frac{d}{dy}\left[\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}\right]\frac{dy}{dx}=-\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-2}\cdot\frac{d^2x}{dy^2}\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}=-\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-3}\frac{d^2x}{dy^2},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{d}{dy}\left[\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-3}\frac{d^2x}{dy^2}\right]\frac{dy}{dx}=\left[3\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-4}\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2-\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-3}\frac{d^3x}{dy^3}\right]\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$$

$$=3\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-5}\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2-\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-4}\frac{d^3x}{dy^3}.$$

将它们代入原方程 $\Rightarrow$

$$3\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-6}\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2-\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-5}\frac{d^3x}{dy^3}-3\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-6}\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2=x,\text{即}\quad \frac{d^3x}{dy^3}+x\left(\frac{dx}{dy}\right)^5=0.$$

11.【分析与求解】 由条件可知,$x\in(0,a]$ 时 $f(x)$ 可导 $\Rightarrow\quad f^2(x)=\int_0^{x^2}f(\sqrt{t})\,dt$.

两边对 x 求导 $\Rightarrow\quad 2f(x)f'(x)=f(\sqrt{x^2})(x^2)'$,即 $2f(x)f'(x)=f(x)2x$. $\Rightarrow\quad f'(x)=x$.

又原式中令 $x=0\Rightarrow f(0)=0$. 因此 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$.

12.【分析与求解】 这是$\frac{0}{0}$型极限. 由 $f''(x)\exists\Rightarrow$ 在 x 点邻域 $f(x)$ 一阶可导,可用洛必达法则得

$$\text{原式}=\lim_{h\to0}\frac{2f'(x+2h)-2f'(x+h)}{2h}=\lim_{h\to0}\frac{f'(x+2h)-f'(x+h)}{h}.$$

这也是$\frac{0}{0}$型极限,但没有 $f(x)$ 在 x 邻域二阶可导的条件,不能对上式再用洛必达法则. 但由 $f''(x)$ 的定义可得

$$\text{原式}=\lim_{h\to0}\left[\frac{f'(x+2h)-f'(x)}{2h}\cdot2-\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}\right]=2f''(x)-f''(x)=f''(x).$$

13.【分析与求解】 $\varphi(x)$ 的表达式中,积分号内含参变量 x,通过变量替换转化成变限积分.

$x\neq0$ 时,$\varphi(x)=\frac{1}{x}\int_0^1 f(xt)\,d(xt)\xlongequal{\text{令 } s=xt}\frac{1}{x}\int_0^x f(s)\,ds$;$x=0$ 时,$\varphi(0)=\int_0^1 f(0)\,dt=f(0)$.

由 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续及 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$,则 $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{f(x)}{x}\cdot x\right]=2\times0=0$.

因此,
$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\int_0^x f(s)\,ds, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

求 $\varphi'(x)$ 即求这个分段函数的导数,$x\neq0$ 时与变限积分求导有关,$x=0$ 时可按定义求导.

$$\varphi'(0)=\lim_{x\to0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(s)\,ds\xlongequal{\frac{0}{0}\text{型}}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}\times 2 = 1,$$

因此，
$$\varphi'(x) = \begin{cases} \dfrac{x f(x) - \int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s}{x^2}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

最后考察 $\varphi'(x)$ 的连续性. 显然, $x \neq 0$ 时 $\varphi'(x)$ 连续, 又

$$\lim_{x\to 0}\varphi'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s = 2 - 1 = 1 = \varphi'(0),$$

即 $\varphi'(x)$ 在 $x = 0$ 也连续, 因此 $\varphi'(x)$ 处处连续.

▶ 第三章　微分中值定理及其应用

一、选择题

1.【分析】 由 $f(x)$ 在 $x = a$ 连续 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}f(x) = f(a)$. 又

$$\lim_{x\to a}f(x) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(x-a)^4}(x-a)^4 = 0 \Rightarrow f(a) = 0.$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^4} = 2 > 0.$$

根据极限的保号性 $\Rightarrow \exists\delta > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时 $\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^4} > 0$, 即 $f(x) - f(a) > 0$. 因此 $f(a)$ 为极小值. 故选(D).

评注　若取 $f(x) = 2(x-a)^4$, 它满足题中所给条件, 对此 $f(x)$, (A), (B), (C) 均不对, 而(D) 正确. 故应选(D).

2.【分析】 由 $f'(0) = 0$ 知 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的驻点. 为求 $f''(0)$, 把方程改写为

$$f''(x) + 3[f'(x)]^2 = \frac{1-\mathrm{e}^x}{x}.$$

令 $x \to 0$, 得　$f''(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\mathrm{e}^x}{x} = -1 < 0. \Rightarrow f(0)$ 为极大值. 故选(D).

3.【分析一】 (A), (B), (D) 涉及到一些基本事实.

若 $f(x)$ 在 (a,b) 可导且单调增加 $\Rightarrow f'(x) \geqslant 0\ (x \in (a,b))$.

若 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点, 则 $f''(x_0)$ 可能不存在.

若 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 则 $f'(x_0)$ 可能不存在.

因此(A), (B), (D) 均不正确(如图 3.1 所示). 选(C).

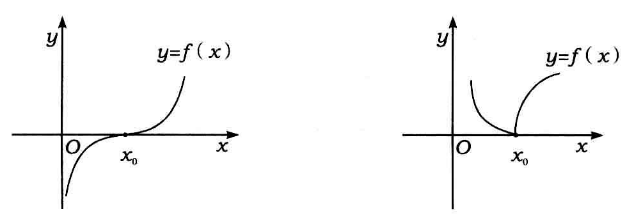

图 3.1