

线性规划讲义



线性规划讲义

(初稿)

中国科学院数学研究所

第三室编

江苏工业学院图书馆
藏书章

线性规划讲义 (初稿)

前言

本讲义是作为大学学校线性规划课程的教学用书或教学参考用书而编写的。内容包括图上作业法，表上作业法及单纯形法的方法和理论。只要有中等学校教学水平就可以学会这里所讲的方法。至于学习理论部份，只要求有关于行列式，线性方程组和矩阵的初步知识就可以了。

线性规划的知识广泛地应用在祖国生产建设的各个方
面，譬如，物资调拨，交通运输，厂矿布局，公社规划等
问题。如果运用线性规划的方法加以合理安排，将会节约
大量资金，^{正确}更好地发挥人力物力的作用。因此，这门知识应
广泛地为我国人民所掌握和运用。

由于时间关系，本讲义一定有很多缺点，尤其在顺序
编排上是先讲方法后讲证明（像图上作业法和表上作业法
那样）好呢？还是先讲理论后讲方法（像第六章单纯形那
样）好呢？另外，关于单纯形法是像第八章那样不引入几
何解释好呢？还是像第六章引入几何解释好呢？请读者多
提宝贵意见。（寄北京，中关村，中国科学院数学研究所第
三室）。以便整理修改，作为本讲义的定稿。

数学研究所第三室

目 錄

前言

- 第一章：物资調运工作中的图上作业法。
- 第二章：物资調运工作中的图上作业法的理論証明。
- 第三章：物资調运工作中的表上作业法。
- 第四章：表上作业法的理論証明。
- 第五章：近似方法与产销不平衡問題的解法。
- 第六章：单纯形法（証明中引入几何解釋）。
- 第七章：单纯形法（証明中未引入几何解釋）。
- 第八章：对偶性规划。

第一章

物资调运工作中的图上作业法

我国从事物资调运工作的一些同志，由于在实际工作中积累了丰富的经验；发挥了群众的集体智慧，创造出一种先进的物资调运方法，他们把它称之为图上作业法。采用这种方法进行调运工作，可以使物资运行的总公里数达到最小值。并且方法简单，易于掌握，计算迅速，应用广泛。这一章的目的就是要介绍这种方法。

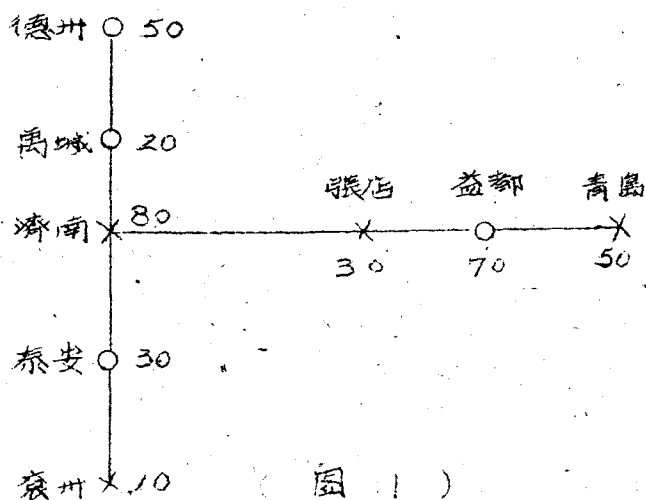
当我们制定某种物资的调运方案时，首先有一个平衡表，这个表上标明这种物资的发点（即需要调出物资的地点）和收点（即需要调入物资的地点），以及各发点所需要调出的物资数量和各收点所需要调入的物资数量，并且各发点所需要调出物资数量的总和应等于各收点调入物资数量的总和。根据这样一个表绘出一个交通图，即绘出标有这些收发点以及联结这些收发点之间的交通线（如铁路公路、海河航线等）的地图来，下我们就根据交通图的不同形状分别举例介绍图上作业法的方法。

例1. 已知一个小麦的平衡表

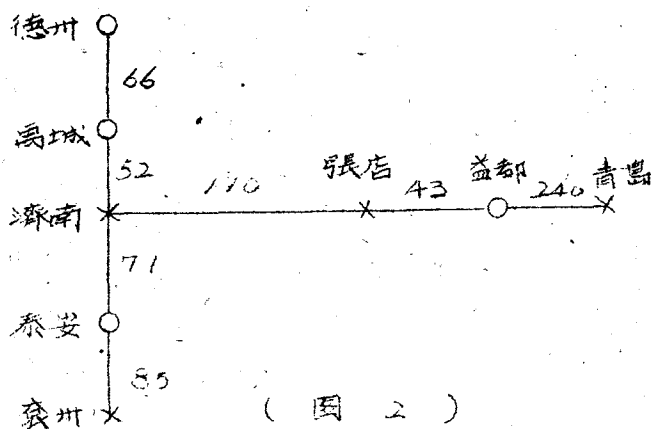
发点 \ 收点	济南	泉州	张店	青岛	发量(吨)
德州					50
禹城					20
泰安					30
益都					70
收量(吨)	80	70	30	50	170

我们的问题是要编造一个小麦的调运方案，使得小麦运行的吨公里数达到最小值。

解：所谓图上作业就是在交通图上进行作业，即在交通图上进行小麦调运方案的编造工作，并绘出小麦流向图表，所以在编造调运方案前，先要绘出它的交通图，发点我们用“○”来表示，而收点我们用“×”来表示，也把收、发点所要调进、调出的小麦吨数注在旁边，即



为了清楚和方便起见，我们还给一张里程图，即把两点间距离的公里数标出来：



显然有对流（在一段路线上同时有两个相反方向的调运）的调运方案一定不是最好的（即运行的吨公里数不是达到最小值）因此在编造调运方案时首先就要避免对流现象。

看出交通图（图1）里没有形成圈状路线，只有以济南作一个枢纽点，从它分出三根交通支线。为了避免对流现象，可以在编造方案前，我们可以先计算一下这三根交通支线上（济南除外）以及济南本身究竟需要调出，还是调入多少小麦？计算的结果是：

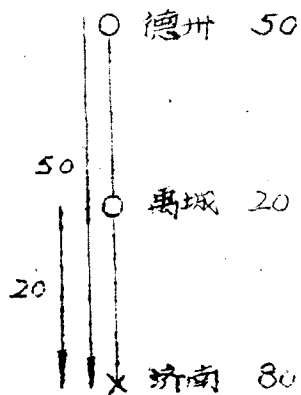
德州线上需要调出 70 吨

禹城线上需要调出 20 吨

青岛线上需要调出 10 吨

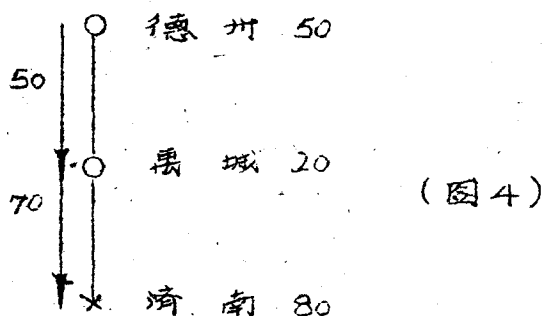
济南本身需要调入 80 吨

即首先在各线本身上的收、发点进行调正平衡，然后各线间进行调正平衡。先看德州线上：因为他没有收点，所以德州和禹城的小麦都需要运出，显然在运出时必然经过济南而济南又需要调入80吨，所以可将德州的50吨和禹城的20吨都调给济南这时我们就沿着从德州到济南的前进方向，在铁路的右侧绘上一个流向（用箭头表示流向）并将50吨标在流向上，同理绘出禹城的20吨调给济南的流向即



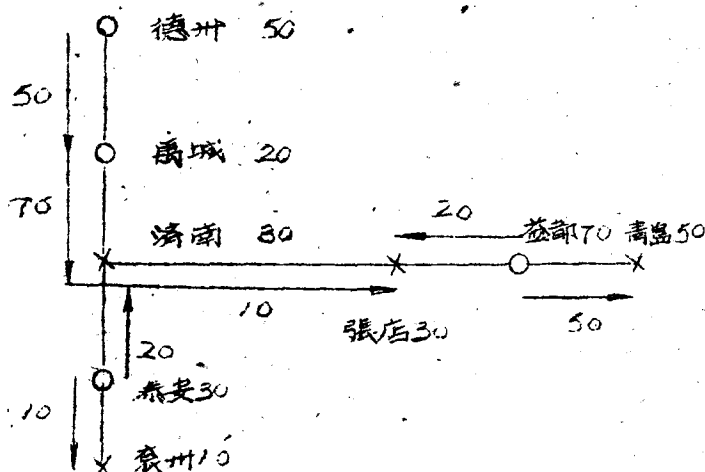
（图3）

这里有一段路上有同方向的流向相同(如禹城到济南)我们将重复的流向合并成一条(以后凡遇到这种情形,都这样作)即得:



其次再看德州线:泰安需调出30吨所以德州需要调入的10吨由泰安供应,这时德州线还余20吨需要调出在运出时也要经过济南而济南还缺10吨,同时青岛线还需要调入10吨,因此这20吨就由泰安来供应。

最后看青岛线:为了避免对流现象,我们将青岛所需调入的50吨由益都供应,而益都余下来的20吨及由泰安调入的10吨来供应张店,即得下面的流向图:



(图 5)

相应于这个流向图的调运方案是:

发点 \ 收点	济 南	袁 州	張 店	青 島	发量(吨)
德 州	50				50
禹 城	20				20
泰 安	10	10	10		30
益 都			20	50	70
收量(吨)	80	10	30	50	170

而小麦按照此调运方案所运行的吨公里是： $50 \times 118 + 20 \times 52 + 10 \times 71 + 10 \times 85 + 10 \times 181 + 20 \times 43 + 50 \times 240 = 23170$

显然相应于这倒流向图的调运方案不是唯一的，事实上如：

发点 \ 收点	济 南	袁 州	張 店	青 島	发量(吨)
德 州	45		5		50
禹 城	15		5		20
泰 安	20	10			30
益 都			20	50	70
收量(吨)	80	10	30	50	170

小麦按照此调运方案所运行的吨公里是： $45 \times 118 + 15 \times 52 + 20 \times 71 + 10 \times 85 + 5 \times 228 + 5 \times 162 + 20 \times 43 + 50 \times 240 = 23170$

从此可以看出不同的调运方案，可以有相同的流向图。（包括流向的长短方向及流过的数量）并且他们的调运方案的吨公里数相等（因为运行的吨公里数等于各段流向上所标的数字乘以各该段流向的长度之积之和）。

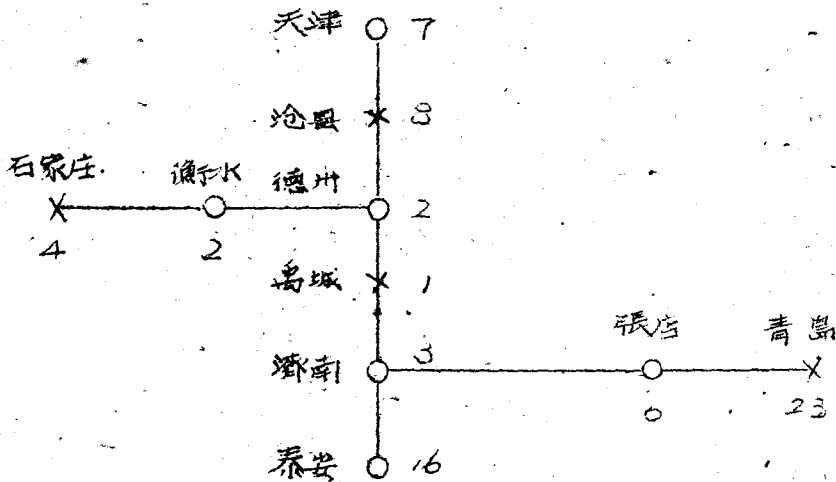
由这个流向图所确定调运方案的吨公里数是否是最小值呢？根据物资调运工作同志的经验：像这种没有圈的交通图里，只要流向图中没有对流现象，那么由此流向图所确定的调运方案一定是最好的（即运行的吨公里数是最小的）这一点是很明显的。因此上面所得的小麦调运方案即为所求。

例2，假定有下面一个小麦的平衡表

发点 \ 收点	沧县	石家庄	青 岛	禹 城	发量(吨)
天 津					7
德 州					2
张 店					6
衡 水					2
济 南					3
泰 安					16
收量(吨)	8	4	23	1	36

问怎样编造一个小麦的调运方案，使得小麦运行的吨公里数达到最小值？

解：先绘出它的交通图：



(图 6)

从前例看出，我们在编造调运方案时并没有用上里程图故可略去，不画。

在这张交通图上也是没有圈的，但是有两个枢纽点，即济

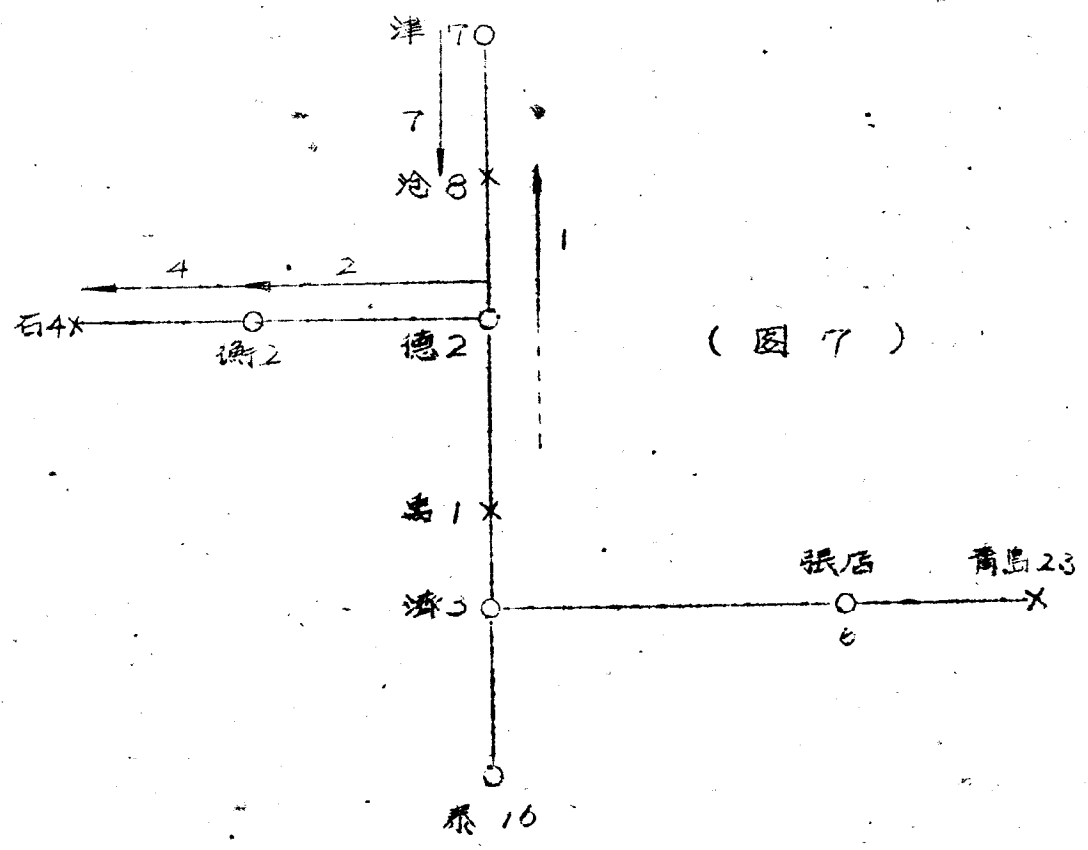
南和德州，先选一个枢纽点德州来讨论，我们有

津德线（不包括德州）：需要调入1吨

石德线（不包括德州）：需要调入2吨

德州本身需要调出：2吨

这样我们可以将德州调给石家庄2吨，而津德线需要调入的1吨由德州以南调来，故是有



(图 7)

再考虑枢纽点济南，我们有，

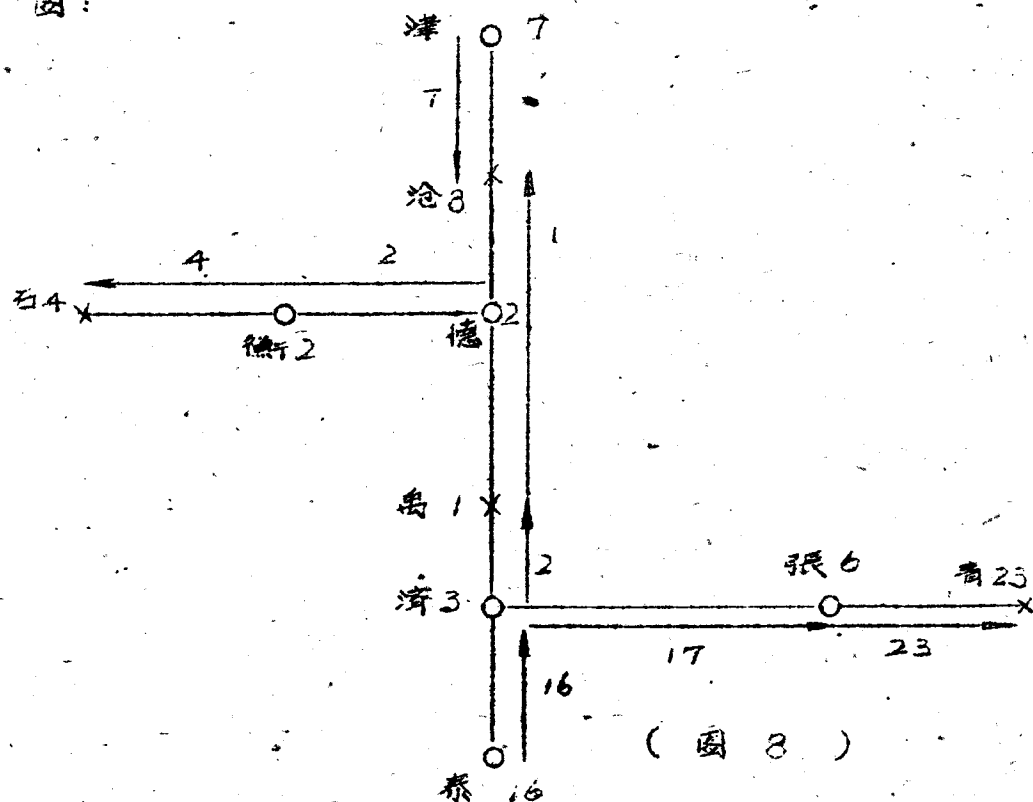
济原线（不包括济南）需要调出：16吨

济青线（不包括济南）需要调入：17

济南本身需要调出：3

济南以北（不包括济南）需要调入：2

这样我们可以将济泰线的16吨调给济青线，将济南的3吨调1吨给济青线，调2吨给济南以上。于是我们有下面的流向图：



这个流向图的调运方案是

发点 \ 收点	沧 县	石 家 庄	青 岛	禹 城	发量 (吨)
天 津	7				7
德 州		2			2
张 店			6		6
衡 水		2			2
济 南	1		1	1	3
泰 安			16		16
收量 (吨)	8	4	23	1	36

由于流向图中没有对流故此调运方案是最好的。

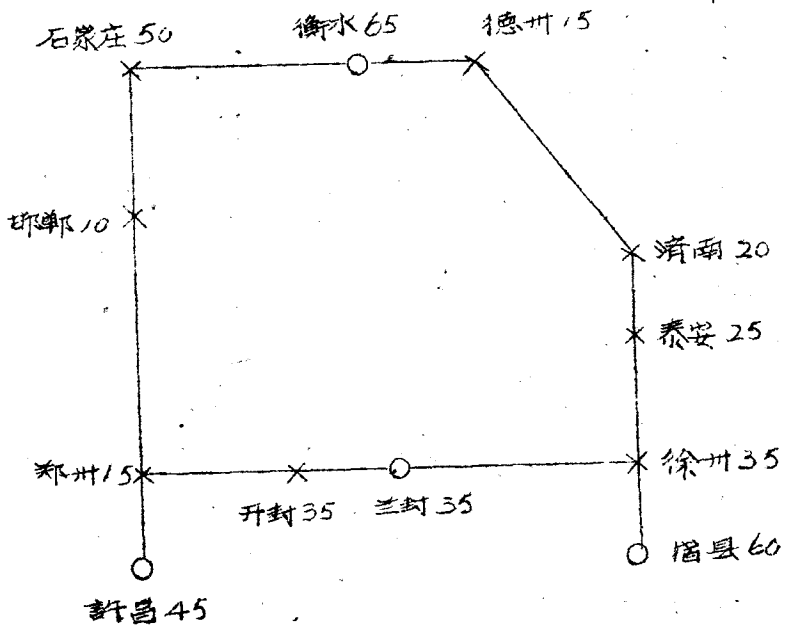
第二节 一个圈的情形

例：假定有下面一个稻米的平衡表

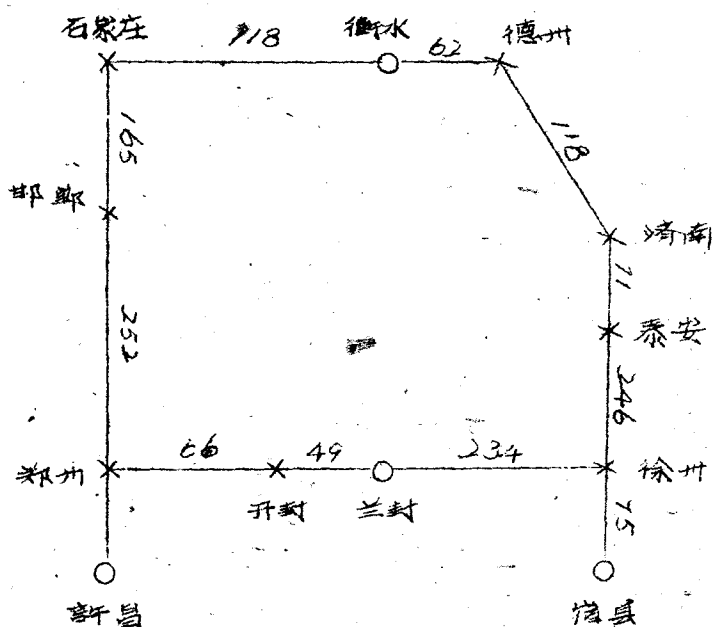
发点 \ 收点	石家庄	邯郸	郑州	德州	济南	泰安	徐州	开封	发量(吨)
新乡									45
临县									60
衡水									65
兰封									35
收量(吨)	50	10	15	15	20	25	35	35	205

我们的问题仍然是怎样编造一个稻米的调运方案，使得稻米运行的吨公里数达到最小值。

解：先绘出它的交通图和里程图。



(图 9)



(图 10)

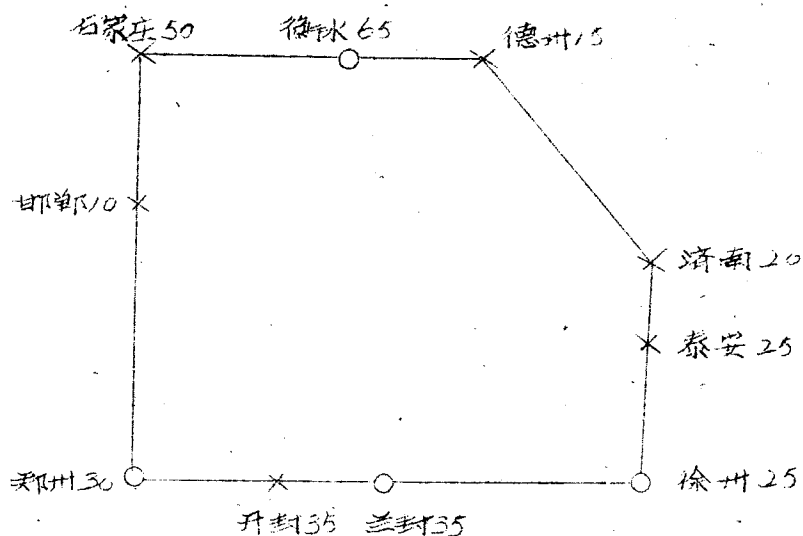
在这张交通图上形成一个圈 (即石德济徐郑石线), 而且从郑州和徐州又各分出两条支线, 现在我们先计算一下各支线路本究竟需要调出, 还是调入多少粮食? 结果是:

郑许支线 (不包括郑州) 需要调出: 45 吨

徐宿支线 (不包括徐州) 需要调出: 60 吨

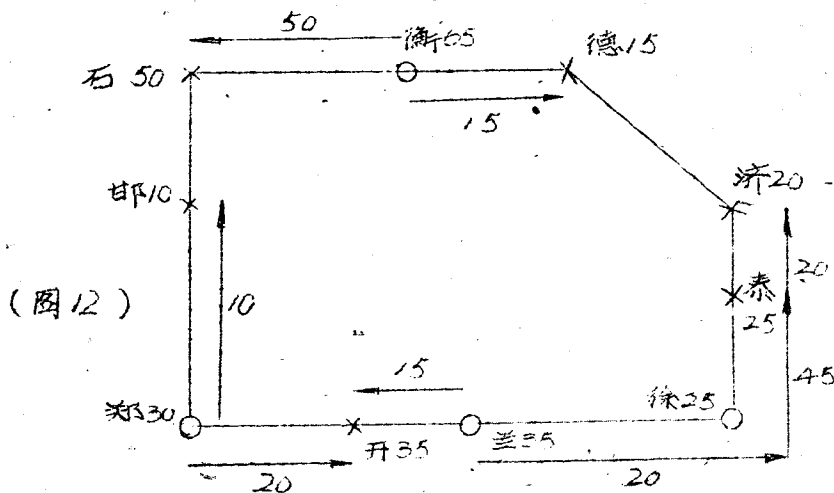
因为郑许支线和徐宿支线的粮食必然分别通过郑州和徐州, 所以我们可以把郑州支线调出的 45 吨与郑州本身所需要 15 吨进行平衡后, 而把郑州看成是一个发点, 他的发量是 30 吨, 同理可以把徐州看成是一个发点, 他的发量是 25 吨。这样我们就有了一个新的平衡表和交通图:

发点 \ 收点	石家庄	邯郸	德州	济南	泰安	开封	发量 (吨)
郑州							30
徐州							25
衡水							65
兰封							35
收量 (吨)	50	10	15	20	25	35	155



(图 11)

这样，稻米的收发点全落在一个圈上了。现在先对此进行编造工作，我们先给出一个没有对流的调运方案的流向图可任从一点出发，如从衡水出发，我们先让衡水调给石家庄 50 吨，其次让衡水的其余 15 吨全部供给德州，然后，再考虑济南是一个收点，假设济南所需要的 20 吨全由徐州供应，那么徐州剩余的 5 吨供给泰安，但泰安还缺 20 吨，这可由兰封供应，而兰封余下来的 15 吨全部供给开封，开封还需要 20 吨由郑州供给，郑州剩余的 10 吨则供给邯郸，我们便得到下面的流向图：



(图 12)

相应于这个流向图的调运方案是

发点 \ 收点	石家庄	邯郸	德州	济南	泰安	开封	发量 (吨)
郑州		10				20	30
徐州				20	5		25
衡水	50		15				65
兰封					20	15	35
收量 (吨)	50	10	15	20	25	35	155

而糙米按照此调运方案运行的吨公里数是

$$50 \times 113 + 15 \times 62 + 20 \times 71 + 25 \times 246 + 20 \times 234 + 5 \times 49 + 20 \times 66 + 10 \times 252 = 58575$$

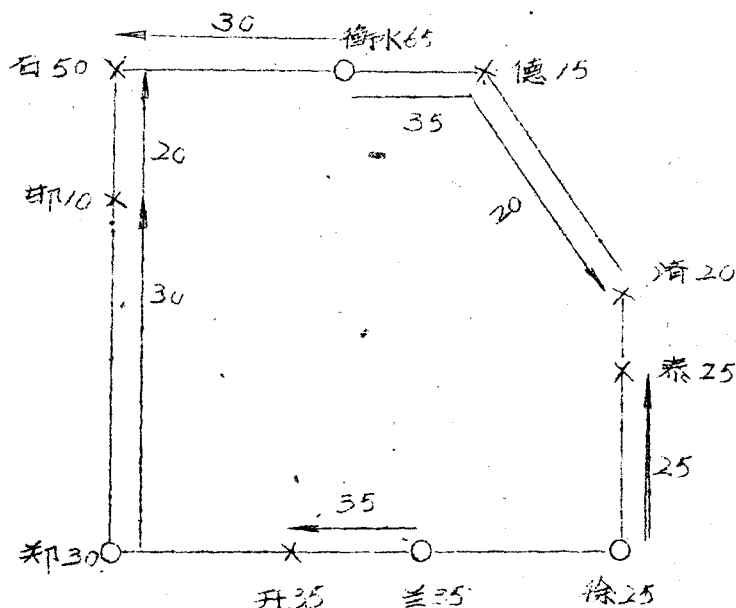
这个吨公里数是否是最小值？在回答这个问题以前我们再看一下流向图，在流向图中，有些流向是在圈的外面，也有些流向是在圈的里面，在圈外面的流向称为外圈流向，而在圈里面的流向称为内圈流向，诸外圈流向之和称为外圈的长，而诸内圈流向之和称为内圈的长，没有流向的诸距之长叫空圈长。

根据物资调运工作同志的经验：在这种一个圈的交通图里，他的流向图所确定的调运方案是最好的充分必要条件是：它的流向图上没有对流而且内圈的长和外圈的长都小于或等于正个圈长的一半，关于这一点的严格证明将在下一章给出。

研究一下我们现在这个方案，根据里程图计算内、外圈的长，分别为363公里和135公里，正个圈的长是1381公里，我们发现外圈的长大于正个圈的一半，所以我们的调运方案不是最好的。既然如此，我们就需要将这个调运方案进行修正，怎样修正呢？修正的方法就是将外圈缩短。（如果原流向图内圈的长大于正个圈长的一半，则应将内圈缩短）

我们检查一下外圈最细的（即流过糙米最少的）流向是20吨（郑开向，兰徐向，泰济南向），我们就先将外圈流过20吨的

郑开同流向望去（即缩短为另）将郑州的20吨向北供给石家庄，而只由衡水供给石家庄30吨，接着再将衡水多余下来的20吨供给济南，而将兰封供给济南的20吨供给开封，于是我们又得到下面的流向图：



(图 13)

相应于这个流向图的调运方案是。

发点 \ 收点	石家庄	邯郸	德州	济南	泰安	开封	发量(吨)
郑州	20	10					30
徐州					25		25
衡水	30		15	20			65
兰封						35	35
收量(吨)	50	10	15	20	25	35	155

按照这个调运方案运行的吨公里数是

$$30 \times 118 + 35 \times 62 + 20 \times 118 + 25 \times 246 + 35 \times 41 + 30 \times 252 + 20 \times 165 = 26775 \text{ (这个数字较调正前的流向图的数字为小)}$$