

平面几何 证明题学习指导

大连市教育学院

目 录

几何证明法	(1)
如何引辅助线	(22)
怎样玩味几何题	(43)
平面几何证明题	(50)

第一部分 直线形

一、有关角的证明	(50)
二、三角形全等	(55)
三、等腰三角形	(59)
四、直角三角形	(69)
五、线段和角的大小比较	(75)
六、平行四边形	(90)
七、矩形、正方形、菱形	(96)
八、梯 形	(110)
九、多边形	(114)
十、比例线段和相似形	(119)

第二部分 圆

一、弦、弧、圆周角	(135)
二、切线与割线	(146)
三、园内切四边形	(175)
四、四点共圆	(188)

五、园的外切四边形·····	(210)
六、与园有关的相似三角形·····	(212)
七、两园相切与相交·····	(229)

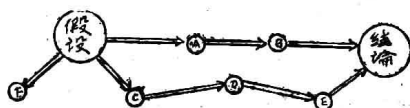
第三部分 面积

一、三角形的面积·····	(244)
二、勾股定理·····	(255)
三、有关平行四边形的面积·····	(269)

第四部分 综合性问题

几何证明法

几何问题的证明，就是从已知的条件出发，经过一步一步的推理论证最后达到所要得出的结论，其过程可用下图示意：



由假设出发，可能有好多条路可走，有的能通到结论，有的不能通到结论。能通到结论的，问题便得到解决，通不到结论的，问题便得不到解决。而能通到结论的，也可能有若干条道路，有的简近些，有的迂远些，如上图由假设出发，经过 A 、 B ，以达到结论，就最为简近，而从假设出发，经过 C 、 D 、 E 以达到终结，则较为迂远，但终比经过 F ，走头无路，胜强得多。

简单的问题，从假设出发，想出到达终结的通路，还是比较容易，对繁难的问题，从假设出发有时难以想出到达终结的通路，这时应从终结出发，以发见通达终结的途径。这也是解决几何问题的常用方法。

证明几何问题，头脑中须先具备一些有关几何上定义，公理和定理，这些是论证中的大前提，是抽象的理论，而待解决的问题，则是论证中的小前提，是具体的事例。例如：

(1) 大前提——凡是两边夹角对应相等的两个三角形

必全等。

(2) 小前提—— $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ ，根据条件能证出 $AB = A'B'$ ， $AC = A'C'$ ， $\angle A = \angle A'$ 。

(3) 结论 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ 。

所以说几何问题的证明，就是用演绎法把抽象理论应用到具体事例，论证的过程中，每一个推理步骤，都是形式逻辑三段论法的运用。

对于一个几何问题的证明，经常是从已知的条件出发，得出所要证明的结论，但有时须作出与结论相反的假定，经过论证得出与已知条件或已知公理定理相反的结论。因此几何证明法可分为直接证明法和间接证明法两大类，而直接证明法又可分为重合法，综合法和分析法三种，间接证明法又可分为归谬法，穷举法、同一法三种。由此可见，几何证明的方法是多种多样，对于同一个问题因采用的方法不同，常有很大繁简难易的差异，甚至对某一问题，若不用某种方法，往往陷于束手无策。因此掌握各种证明方法，对养成几何证明的实力，是很有必要。

为了说明这些证明方法的精神实质及如何灵活运用，分别举例阐述如下：

一、直接证明法

1、重合法

所谓重合法，就是把一个图形移置于另一个图形之上，看能否完全重合，或一个比另一个大还是小。

这种方法多用在证明较简单的基础定理，如证明两边夹角对应相等的两三角形全等，两角夹边对应相等两三角形全

等。再在证明多边形全等时，也常用这种方法。但要注意在证明较复杂的问题时也有利用重合的步骤。

例题 1. 由圆 O 外一点 P ，引圆 O 的切线 PA, PB 及割线 PEM, D 为弦 AB 的中点。求证： AB 平分 $\angle MDE$

证明：（1）延长 MD 交圆 O 于 N ，连结 PN, OA, OB, OM, ON ，因 PA, PB 为圆 O 的切线，所以 $\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$

可知 P, A, O, B 四点共圆

（2）根据圆内相交弦定理，得

$$PD \cdot DO = AD \cdot DB$$

$$= MD \cdot DN$$

（3）根据圆内相交弦定理的逆

定理，可知 $P, M, O,$

N 四点共圆

（4）在同一圆中等弦 OM, ON 所对圆周角相等，即 $\angle OPM = \angle OPN$ 。

（5）以 PO 为轴翻转图形

则 PE 与 PN 重合

DE 与 DN 重合

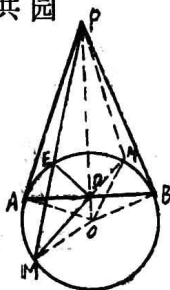
AD 与 DB 重合

因而 $\angle ADE = \angle BDN$

（6）又 $\angle ADM = \angle BDN$

$$\therefore \angle ADM = \angle ADE.$$

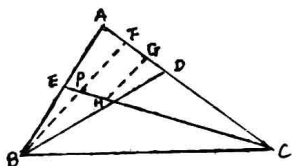
即 AB 平分 $\angle MDE$ 。



本题证明到第四步，往往宣告失败，可见第五步翻转重

合，起了关键性作用，所以在证明几何问题时，考虑到重合步骤也很重要。

例题 2. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B > \angle C$ ， BD 平分 $\angle B$ ， CE 平分 $\angle C$ 。求证： $BD < CE$ 。



证明：(1) $\because \angle B > \angle C, \frac{1}{2}\angle B > \frac{1}{2}\angle C,$

则可在 $\angle ABD$ 内作 $\angle FBD = \angle ACE$ 。

BF 交 CE 于 P

(2) 将 $\triangle BDF$ 移置于 $\triangle PCF$ 上，由于 $CF > BF$ (大角对大边) 则 BF 必落在 CF 之内而在 CG 的位置。

$\because \angle BFD = \angle CGH,$

$\therefore GH \parallel FP$

即 FD 落在 GH 的位置。

因而 BD 落在 CE 之内而在 CH 的位置。

$\therefore BD < CE$

本题在作出 $\angle FBD = \angle ACE$ 之后，若再利用 B, P, D, C 四点共圆，证明可能简单些。但若只利用直线形定理来证明，则一般都感觉很难，主要在于根本没想用重合法来比较线段的大小。

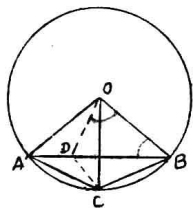
2. 综合法

所谓综合法就是从已知的条件出发，利用定义，公理和

定理综合考究进行推理，以达到最终结论的证明方法。这种方法是证明几何问题最常用的方法。

例题 1. 园内接正六边形、正十边形和正五边形的边能构成直角三角形

设：\$AB\$ 是园内接正五边形的一边，取 \$\widehat{AB}\$ 的中点 \$C\$，则 \$AC\$（或 \$CB\$）就是园内接正十边形的一边，半径 \$OB\$，则是园内接正六边形的一边。



求证：\$OB^2 + AC^2 = AB^2\$

证明：作 \$OD\$ 平分 \$\angle AOC\$，交 \$AB\$ 于 \$D\$，连结 \$DC\$

则 \$\angle BOD = 36^\circ + 18^\circ = 54^\circ\$。

但 \$\angle OBD = \angle OAD = \frac{1}{2}(180^\circ - 72^\circ) = 54^\circ\$

\$\therefore \angle BOD = \angle OBD = \angle OAD\$

\$\therefore \triangle AOB \sim \triangle BOD\$ \$\odot D \perp AB\$

\$\therefore AB : OB = OB : BD\$

即 \$OB^2 = AB \cdot BD\$

又 \$\because \triangle AOD \cong \triangle COD\$，

\$\therefore DA = DC\$，\$\angle DAC = \angle ACD\$

又 \$\angle DAC = \angle CBA = \frac{1}{2} \times 36^\circ = 18^\circ\$

\$\therefore \angle DAC = \angle CBA = \angle ACD\$

\$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ACD\$

\$\therefore AB : AC = AC : AD\$

即 \$AC^2 = AB \cdot AD\$

$$\text{因而 } OB^2 + AC^2 = AB \cdot BD + AB \cdot AD = AB(AD + BD) \\ = AB^2.$$

即圆内接正六边形，正十边形和正五边形的能构造成直角三角形。

(注) 本定理是希腊伯拉图同时代的学者尤多库斯 (Eudoxus) 所发现的一个著名定理叫做尤多库斯定理。它是五等分圆周作图的理论根据。

例题 2. 圆内接四边形对边乘积的和等于对角线的乘积，其逆命题也成立 [特勒密 (Ptolomy) 定理]

设四边形 $ABCD$ 内接于圆，
 AC , BD 为对角线。

求证: $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$

证明: 以 AB 为边作 $\angle BAE = \angle CAD$,
 AE 交 BD 于 E ,

又 $\angle ABE = \angle ACD$

$\therefore \triangle ABE \sim \triangle ACD$

$\therefore AB : AC = BE : CD$

即 $AB \cdot CD = AC \cdot BE \dots \dots (1)$

又 $\because \angle ACB = \angle ADE$

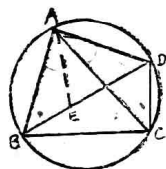
$\angle BAC = \angle EAD$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle AED$

$\therefore BC : ED = AC : AD$

即 $BC \cdot AD = AC \cdot ED \dots \dots (2)$

(1) + (2) 得:



$$\begin{aligned}
 AB \cdot CD + BC \cdot AD &= AC \cdot BE + AC \cdot ED \\
 &= AC(BE + ED) \\
 &= AC \cdot BD, \text{ 证毕}
 \end{aligned}$$

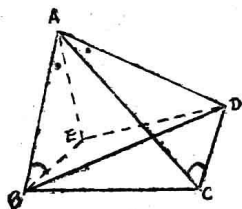
其逆命题为四边形对边乘积的和等于对角线的乘积则必内接于圆。

若直接证明这个逆定理是非常困难的，因此须把问题转换一下，不证明它而证明和它等效的逆否命题，即证原命题的否命题：

“不内接于圆的四边形它的对边乘积的和不等于对角线的乘积。”

设四边形 $ABCD$ 不能内接于圆， AC ， BD 是它的对角线。

求证： $AB \cdot CD + BC \cdot AD \neq AC \cdot BD$ 。



证：因 $ABCD$ 不能内接于圆。

则 $\angle ABD$ 和 $\angle ACD$ 必不相等。

不妨假定 $\angle ABD > \angle ACD$ ，

则在 $\angle ABD$ 内部，可作 $\angle ABE = \angle ACD$ 。

再作 $\angle BAE = \angle CAD$ 因而 $\triangle ABE \sim \triangle ACD$

$\therefore AB : AC = BE : CD$

即 $AB \cdot CD = AC \cdot BE \dots\dots (1)$

又在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AED$ 中

$AB : AC = AE : AD$ ($\because \triangle ABE \sim \triangle ACD$)

即 $AB : AE = AC : AD$ 又 $\angle BAC = \angle EAD$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle AED$

$$\therefore BC : ED = AC : AD$$

$$\text{即 } BC \cdot AD = AC \cdot ED \dots\dots (2)$$

(1) + (2) 得:

$$\begin{aligned} AB \cdot CD + BC \cdot AD &= AC \cdot BE + AC \cdot ED \\ &= AC(BE + ED) \end{aligned}$$

$$\text{但 } BE + ED > BD$$

$$\therefore AB \cdot CD + BC \cdot AD \neq AC \cdot BD.$$

由此推知若 $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$

则 四边形 $ABCD$ 必内接于圆

这样证明逆命题的逆否命题，是用了综合法，但对证明逆命题来说是用了反证法，也就是间接证明法。

3. 分析法

分析法证明的顺序，正和综合法相反。它是由结论追溯到假设，即从结论出发找出它成立所需的充分必要条件，进一步再找出这些充要条件的成立所需的充要条件。如此继续追溯充要条件，最后达到题设的已知条件，于是问题得到证明。

用分析法证明问题，若把步骤完全写出，是相当麻烦，所以一般都不愿用分析法。但遇较难的问题，利用分析法，往往收效。所以一般常用分析法来找出证明的端绪，而后用综合法进行论证。通常所谓学会分析问题，就是要学会用分析法找到解决问题的端绪。

要学懂分析法，首先要弄清楚什么叫做必要条件。什么叫做充分条件，什么叫做充要条件。

(1) 必要条件，

某一事项 A 的成立，所必须具备的条件 B (即缺它不

可)就是事项 A 成立的必要条件。

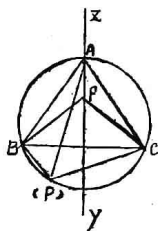
例如: (A) 四边形要成为正方形, 必须具备四个边相等这个条件, 则四个边相等, 就是正方形成立的必要条件。(但不是充分条件)。

(B) 三角形 ABC 要成为正三角形, 必须有 $AB = BC$ 这个条件, 则 $AB = BC$ 就是三角形 ABC 成为正三角形的必要条件。(但不是充分条件)。

(2) 充分条件、

某条件 B 满足后, 则某一事项 A 一定成立, 则这个条件 B 就是某事项 A 成立的充分条件。

例如: (A) 看下图, 由于点 P 在 XY 上, 得 $\angle APB = \angle APC$ 则点 P 在 XY 上是 $\angle APB = \angle APC$ 的充分条件。(但不是必要条件, 因点 P 在圆周上, $\angle APB$ 与 $\angle APC$ 仍然相等)。



(B) 三角形 ABC 中, $AB \neq BC$, 则三角形 ABC 就不是正三角形, 这里 $AB \neq BC$, 是 $\triangle ABC$ 不是正三角形的充分条件。(但不是必要条件)

(3) 充要条件、

某事项 A 要成立，必须具备某条件 B ，而具备某条件 B ，则某事项 A 就一定成立。则某条件 B 就是某事项 A 成立的充分必要条件。

例如：

(A) 对角互补，则四边形必内接于圆。而四边形内接于圆，则对角必互补，这样对角互补，就是四边形内接于圆的充要条件，

(B) 两圆相外切，则连心线等于两圆半径的和，这说明连心线等于两圆半径的和是两圆相外切的必要条件。反之连心线等于两圆半径的和，则两圆相外切，这说明连心线等于两圆半径的和是两圆相外切的充分条件。

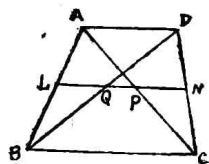
合起来连心线等于两圆半径的和就是两圆相外切的充要条件。

(C) 两圆相交则两圆圆心的距离小于两圆半径的和而大于其差。这里两圆圆心的距离小于两圆半径的和与两圆圆心距离大于两圆半径的差，都是两圆相交的必要条件。

反之只有两圆圆心距离小于两圆半径的和，或只有两圆圆心距离大于两圆半径的差，则这两个圆都不一定相交。所以两圆圆心距离小于两圆半径的和，两圆圆心距离大于两圆半径的差，两个条件合在一起，才是两圆相交的充要条件。

(D) 下图四边形 $ABCD$ 的边 AB ， CD 及对角线 AC ， BD 的中点分别为 L ， N ，及 P ， Q 。

若 $ABCD$ 为 $AD \parallel BC$ 的梯形, 则 $LP \parallel BC$, 从而 $LP \parallel AD$ 。由此可知直线 LP 必通过 BD 的中点 Q 和 CD 的中点 N 。而 L , N , P , Q 四点在同一直线上。



又若这四个中点 L , N , P , Q 在同一直线上时
 则 $AD \parallel LQ$, $BC \parallel LP$ 因而 $AD \parallel BC$
 $\therefore ABCD$ 为梯形

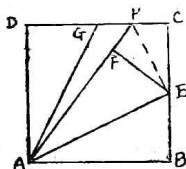
由此可知四个中点 L , N , P , Q 在同一直线上是 $ABCD$ 构成梯形的必要条件, 同时又是充分条件, 即 L , N , P , Q 四点共线是 $ABCD$ 构成梯形的充要条件。

再看如何应用分析法证明几何问题

例题 1. 在正方形 $ABCD$ 的 DC 边上有一点 P , $AP = CP + BC$
 又 G 为 DC 的中点, 求证 $\angle BAP = 2\angle GAD$ 。

证明:

- (1) 若 $\angle BAP = 2\angle GAD$
 引 AE 平分 $\angle BAP$
 则必 $\angle BAE = \angle GAD$ 。
 反之 $\angle BAE = \angle GAD$
 则 $\angle BAP = 2\angle GAD$ 。
- (2) 若 $\angle BAE = \angle GAD$
 又 $\angle ABC = \angle ADG$
 $AB = AD$



则 $\triangle BAE \cong \triangle GAD$, $BE = DG$.

故 E 必为 BC 的中点。

反之 E 为 BC 的中点,

则 $\triangle ABE \cong \triangle GAD$, $\angle BAE = \angle GAD$

(3) 若 E 为 BC 的中点, 引 $EF \perp AP$.

则 $\triangle AEF \cong \triangle ABE$, $BE = EF$

故必 $EC = EF$

反之若 $EC = EF$, $EF = BE$ 则 E 为 BC 的中点

(4) 若 $EF = EC$ 则 $\triangle EFP \cong \triangle ECP$

必有 $FP = CP$.

反之 $FP = CP$, 由 $\triangle EFP \cong \triangle ECP$

可得: $EF = EC$

(5) 若 $FP = CP$. 而 $AB = AF$

则必 $AP = CP + BC$.

反之 $AP = CP + BC$, $AB = AF$

则 $FP = CP$.

最后这个充要条件: $AP = CP + BC$ 是与题设相一致, 故本题的结论: $\angle BAP = 2\angle GAD$, 得到证明。

可见用分析法证明问题, 若将全过程都写出是相当繁琐笨拙, 所以通常皆以分析法作为分析过程来寻找解题的端绪, 而后用综合法进行论证,

本题若用综合法证明, 走的正是上面“反之”那个过程:

证明: (1) $\because AP = CP + BC$, 在 AP 上取 $AF = AB$

则 $FP = CP$

(2) 过 F 引 $FE \perp AP$.

则 $\triangle EPF \cong \triangle EPC \therefore EF = EC$

(3) 又 $\triangle ABE \cong \triangle AEF$ (一直角边, 一斜边)

$$\therefore EF = BE, \angle BAE = \angle EAF$$

因而点 E 是 BC 的中点,

(4) $\because$ G 为 DC 的中点, E 为 BC 的中点

$$\therefore DG = BE, \text{ 又 } AB = AD, \angle B = \angle D$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADG$$

$$\therefore \angle BAE = \angle GAD.$$

(5) 由于 $\angle EAF = \angle BAE$

$$\therefore \angle BAP = 2\angle BAE$$

$$= 2\angle GAD.$$

例题 2. 过正方形 $ABCD$ 的顶点 A 引直线交 BD 、 BC 、及 DC 的延长线于 E , F , G . 求证 CE 与 $\triangle CFG$ 的外接圆相切。

用分析法, 找出解题的端绪。

(1) CE 若与圆 CFG 相切,

$$\text{则必 } \angle BCE = \angle G.$$

(2) 由于 $AB \parallel DG$,

$$\text{则 } \angle G = \angle BAE,$$

$$\text{因而 } \angle BCE = \angle BAE$$

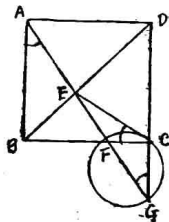
(3) 所以 能证 $\triangle ABE \cong \triangle BCE$ 即可。

证明: 用综合法

$\because$ $ABCD$ 为正方形

在 $\triangle BAE$ 和 $\triangle BCE$ 中

$$\left. \begin{array}{l} BA = BC, \\ \angle ABE = \angle CBE = 45^\circ \\ BE \text{ 共用} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABE \cong \triangle BCE$$



$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \angle BAE = \angle BCE \\
 \text{又} \because &\left. \begin{aligned} AB \parallel DG &\Rightarrow \angle BAE = \angle G \\ &\angle BAE = \angle BCE \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
 &\angle G = \angle ECF
 \end{aligned}$$

$\therefore$ CE 在点 C 而与圆 CFG 相切。

二、间接证明法

所谓间接证明法，就是从问题的结论出发，假定结论若不成立必导致与已知的条件或已知定理相矛盾，所以又叫做反证法。实质就是论证原命题的逆否命题。在具有唯一性的问题时。可将论点转换，先令结论正确，进而论证其前提条件与题设条件一致。

凡直接从已知条件出发，不容易证明的问题，都应利用间接证明法，所以间接证明法也是解决几何问题的有力武器，需要很好掌握。

1. 归谬法

所谓归谬法，就是先作与结论相反的假定导致与已知条件、公理或定理相矛盾进而主张原结论正确。所谓“归谬”并不是论证的结果不正确，因为论证的是逆否命题，正应该得出那个结果。只因为与已知条件，公理或定理相违背，才叫做“归谬”

间接证明法中，最常用的就是归谬法：