·内部发行·

北京电視大学

數學系講义

[数学分析部分]

第二册

一元微积分

（乙）

北京电視大学数学系編

一九六一年元月

目　　录

第三章　微分和積分

§1　微分和积分的概念

1. 問題的提出

一运动的物体，考慮它在一个特定的时間段內运动过程的情况。設此时間段以时間 t 的变化区間 $a \leqslant t \leqslant b$ 表示，在运动过程中物体的位置与时間的关系以函数 $S=S(t)\,(a \leqslant t \leqslant b)$ 來表示（在运动軌道上，物体的位置以自某个选定的定点出发进行度量的距离 S 表示），在时刻 t 运动的速度以 $v(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ 來表示，在研究运动第一类問題时我們知道 $v(t)$ 就是 $S(t)$ 的导函数，由 $S(t)$ 可以求出 $v(t)$，現在我們进一步研究运动第二类問題：已知物体运动速度 $v(t)$，求它在时刻 a 到 b 所走的路程 $S(b)-S(a)$，如在現代交通工具上，都有特別的裝置記录其速度，由之來計算行走的距离，

如果运动是等速的，则行走的距离等于速度乘上經历的时間

$$S(b)-S(a)=v(b-a) \qquad (v\ \text{是常数})$$

在一般的情形下，速度是变化的，这就需要我們用新的方法來解定这个問題。我們常见的运动，其速度随时間連續变化，儘管在整个过程中变化可能很大，但在很短的时間內变化却很小，因此，就可以在局部上把一般运动近似地当作等速运动來处理，这个想法是导致定积分概念的指导思想。将 $[a,b]$ 分成很多小区間，把分点記作

$$a=t_0,\ t_1,\ t_2\cdots\cdots,t_n=b$$

当分割很密时，在每段上速度的变化就很小，質点运动都可以看作是等速的(近似)，其速度即为在此时間段中任意一个时刻运动的速度，为了方便，取 $v(t)$ 在小区間左端的値作为在这小段时間內运动的速度，如在小时間段 $[t_i,\ t_{i+1}]$ 上，此等速度运动（近似）的速度为 $v(t)$，因此运动的路程

$$S(t_{i+1})-S(t_i) \doteq v(t_i)(t_{i+1}-t_i)$$

或簡記作

$$\triangle S_i \doteq v(t_i)\triangle t_i$$

$$(i=0,1,2,\cdots\cdots,n-1)$$

其中 $\Delta S_i = s(t_{i+1}) - s(t_i)$

$t_i = t_{i+1} -$

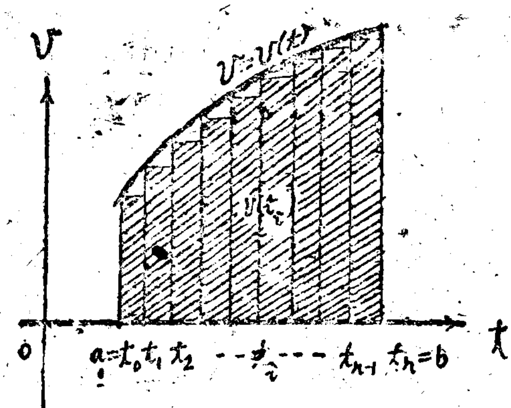
把所有这些 $v(t_i)\triangle t_i$ 加起來，就得到路程 $S(b)-S(a)$ 的一个近似值 S^*，

因为我們把 $v(t)$ 在每一小段时間上看成不变的，而实际上它是变化的，所以 S^* 和 $S(b)-S(a)$ 一般不等。但是，若把时間間隔分得越來越小，在每小段上速度的变化也就越來越小，这样，求出的 S^* 就越近似于 $S(b)-S(a)$。如果設想每小段时間趨向于 0，則 S^* 的极限值就应为 $S(b)-S(a)$

即如令 $l=\max(\triangle t_i)(i=0,1,2,\cdots\cdots,n-1)$，則

$$\lim_{l\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} v(t_i)\triangle t_i=S(b)-S(a)$$

我們再來看看这个过程的几何表示。在直角坐标系中，以横軸表时間 t，縱軸表速度 v，則 $v(t_i)\triangle t_i$ 就表示一个底为 $\triangle t_i$，高为 $v(t_i)$ 的小矩形的面积，S^* 就表示那个階梯形的面积（如圖3.1）



（3—1）

当把区間分得越來越細时，S^*就越接近于以曲綫 $v=v(t)$ 为一边的曲边梯形的面积，所以，以 $\triangle t_i$ 为底的小曲边梯形的面积之值就是 $\triangle S_i$，而此曲边梯形的面积的值即为 $S(b)-S(a)$。

从这个圖上，我們清楚地看到，当分得越細时，在每一个 $\triangle t_i$ 上，速度的变化就可以任意地小，我們以 $v(t_i)\triangle t_i$ 代替 $\triangle S_i$，就是把 $v(t)$ 在 $[t_i, t_{i+1}]$ 上看成是不变的，並恒等于 $v(t_i)$，在几何上，就是把曲綫 $v=v(t)$ 在 $[t_i,t_{i+1}]$ 上的一小段看成是平的，其高度即为 $v(t_i)$，而用以 $\triangle t_i$ 为底的小矩形的面积來代替小曲边梯形的面积。从圖上看，它們相差的一塊面积比起它們的每一个來都很小，通过几何圖形，我們也以所形象地看到，在分割愈益細密的过程中 $S^*\to S(b)-S(a)$ 的情形。

上面我們給出了巳知速度求路程的一般方法。在生产实际中，有許多問題看起來和运动第二类問題並不一样，但可以用同样的方法來解决，例如在点电荷Q形成的电場中，一电荷 q 在电場力作用下由靜止而运动，在这里，运动的方向与电場力 F 的方向完全一致，F 的大小是 $\frac{qQ}{r^2}$，随点电荷 q 和Q的距离 r 而变化，現在要求在位移自 $r=a$ 到 $r=b$ 一段力 F 所作的功 $W(b)-W(a)$。我們知道：如作用力的大小不变，則功等于力乘距离

$$W(b)-W(a)=F(b-a)$$

但实际上 F 常常是連續变化的，和前面的 $v(t)$ 是連續变化的一样，把路程分成很多小段，在每一小段上力的变化就很小，可以近似地看作常量，这时有

$$\triangle W_i\doteq F(s_i)\triangle s_i$$

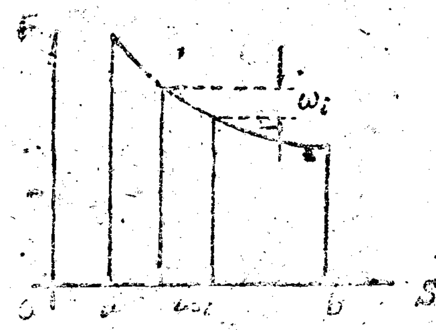
而和

$$W^*=\sum_{i=0}^{n-1}F(s_i)\triangle s_i$$

$$w=\max(w_i) \quad (i=0,1,2,\cdots,n-1)$$

由于 $F(s)$ 是連續变化的，当 $l=\max|\triangle s_i|\to 0$ 时，有 $w\to 0$，

$$\therefore \lim_{l\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}[\triangle W_i-F(s_i)\triangle s_i]=0.$$



(8—2)

通过这些分析，我們清楚地看到对于次要部分的这种忽略是允許的，而且是問題的解决所必須的，而其关鍵在于 $F(s_i)$ 是連續变化的，在每一小段 $\triangle s_i$ 上它的变化很小，当以 $F(s_i)\triangle s_i$ 來近似 $\triangle W_i$ 时（用常力作功的計算公式到非常力作功的情形），所发生的誤差是 $\triangle s_i$ 的高級无穷小量。这說明了把变力作功的情形轉化成常力作功的情形，实际上是有条件的，那就是 $F(s)$ 是一个連續函数（这僅是一个充分条件）

由于 $F(s_i)\triangle s_i$ 关于 $\triangle s_i$ 是綫性的，又是 $\triangle W_i$ 的主要部分，故称之为 $\triangle W_i$ 的主要綫性部分。我們把这种在局部范圍內用主要綫性部分 $F(s_i)\triangle s_i$ 來代替改变量 $\triangle W_i$ 的过程称为微分过程，並称 $F(s)\triangle s$ 为函数 $W(s)$（作的功 W 是路程 s 的函数）在点 s 关于增量 $\triangle s$ 的微分，並記作 $dW=F(s)\triangle s$. 前面已指出 $\frac{\triangle W}{\triangle s}-F(s)\to 0$，即 $F(s)$ 应是 $W(s)$ 的微商，故函数 $W(s)$ 的微分实际上就是其导数 $W'(s)=F(s)$ 与自变量增量 $\triangle s$ 的乘积：即

$$dW=F(s)\triangle s=W'(s)\triangle s.$$

而通过积分求出整体，即把所有的微分 $F(s_i)\triangle s_i$ 累加起來並取极限得出精确值的过程叫作积分过程，极限值 $\lim\limits_{l\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1}F(s_i)\triangle s_i$ 即称为函数 $F(s)$ 在 $[a,b]$ 上的积分，並記作

$\int_a^b F(s)ds$. 由于 $\lim\limits_{l\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1}F(s_i)\triangle s_i=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\triangle W_i=W(b)-W(a)$，故

$$\int_a^b F(s)ds=W(b)-W(a)$$

这里应注意 $W(s)$ 是 $F(s)$ 的原函数，

在上面应用微积分解决二类問題时，已知量（如速度，力）与所求量（如路程，功）間存在着某种确定的关系，一般地說，在解决其他实际問題时，如果当已知量 $f(x)$ 为常量（即 $f(x)$ 实际上是与 x 无关的，在考慮的过程中保持不变）时，所求量 $F(x)$ 从 a 到 b 的改变量 $F(b)-F(a)$ 可以按公式

$$F(b)-F(a)=f(x)(b-a)$$

來計算，那么，当已知量 $f(x)$ 随 x 連續变化时，在局部上就可以用 $f(x)\triangle x$ 來近似所求量的改变量 $\triangle F(x)$，这时，$f(x)\triangle x$ 就是 $\triangle F(x)$ 的主要綫性地部分，並且 $F(x)$ 就是 $f(x)$ 的原函数，为求出 $F(b)-F(a)$，只要对 $f(x)\triangle x$ 求和取极限，即

$$\left|\frac{\triangle W_i-F(s_i)\triangle s_i}{\triangle s_i}\right|=\left|\frac{\triangle W_i}{\triangle s_i}-F(s_i)\right|\leqslant w_i\to 0$$

在同一变化过程中的二个无穷小量 α 与 β，若 $\beta/\alpha\to 0$ 这就說明 β 与 α 虽同时趨向于 0；但 β 比 α 的变小要快得多，以致 β 在除以 α 之后还是个无穷小量，这样我們就称 β 为較 α 高級的无穷小量，記作 $\beta=0(\alpha)$。

所以 $\triangle w_i-F(s_i)\triangle s_i$ 为較 $\triangle s_i$ 高級的无穷小量，即

$$\triangle W_i-F(s_i)\triangle s_i=0(\triangle s_i)$$

移項，得

$$\triangle W_i=F(s_i)\triangle s_i+0(\triangle s_i)$$

另外，在同一变化过程中的一个无穷小量 α 与 β（同一过程，指的是依賴于同一个变量），如果 $\beta/\alpha\to 1$，这就說明 β 与 α 在同时趨向 0 的过程中无限地接近于相等，这样，我們就称 β 与 α 为等价的无穷小量，並記作 $\alpha\sim\beta$。因为

$$|\triangle W_i-F(s_i)\triangle s_i|\leqslant w_i\triangle s_i$$

两边用 $F(s_i)\triangle s_i$ 除（設 $F(s_i)\neq 0$）得

$$\left|\frac{\triangle W_i}{F(s_i)\triangle s_i}-1\right|\leqslant\left|\frac{w_i}{F(s_i)}\right|\to 0$$

$$\therefore\ \frac{\triangle W_i}{F(s_i)\triangle s_i}\to 1$$

故 $\triangle W_i$ 与 $F(s_i)\triangle s_i$ 为等价的无穷小量

$$\triangle W_i\sim F(s_i)\triangle s_i$$

（一般地說，如 $\alpha\neq 0$，則 $\beta\sim\alpha$ 的充分必要条件是 $\beta-\alpha=0(\alpha)$）

[illegible]：我們用 $F(s_i)\triangle s_i$ 近似代替 $\triangle w_i$ 是抓住了事物（即 $\triangle w_i$ 的計算）的主要部分，而僅僅略去了比 $\triangle s_i$ "高級的无穷小"，而这只是次要的部分。

这样的忽略在解决我們的問題时是否允許呢？

現在再回过头來看总誤差 $\sum[\triangle W_i-F(s_i)\triangle s_i]$

因为

$$|\triangle W_i-F(s_i)\triangle s_i|\leqslant w_i\triangle s_i$$

所以

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}(\triangle w_i-F(s_i)\triangle s_i)\right|\leqslant\sum_{i=0}^{i-1}\left|\triangle W_i-F(s_i)\triangle s_i\right|$$

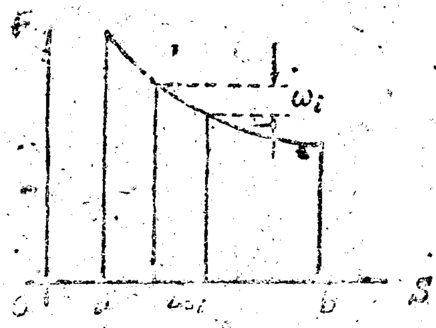
$$\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}w_i\triangle s_i\leqslant w\sum_{i=0}^{n-1}\triangle s_i=w(b-a).$$

其中

$$w = \max(\omega_i) \qquad (i=0,1,2,\cdots,n-1)$$

由于 $F(s)$ 是連續变化的，当 $l=\max|\triangle s_i|\to 0$ 时，有 $w\to 0$，

$$\therefore \lim_{l\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}[\triangle W_i - F(s_i)\triangle s_i]=0.$$



(8—2)

通过这些分析，我們清楚地看到对于次要部分的这种忽略是允許的，而且是問題的解决所必須的，而其关鍵在于 $F(s_i)$ 是連續变化的，在每一小段 $\triangle s_i$ 上它的变化很小，当以 $F(s_i)\triangle s_i$ 來近似 $\triangle W_i$ 时（用常力作功的計算公式到非常力作功的情形），所发生的誤差是 $\triangle s_i$ 的高級无穷小量。这說明了把变力作功的情形轉化成常力作功的情形，实际上是有条件的，那就是 $F(s)$ 是一个連續函数（这僅是一个充分条件）

由于 $F(s_i)\triangle s_i$ 关于 $\triangle s_i$ 是綫性的，又是 $\triangle W_i$ 的主要部分，故称之为 $\triangle W_i$ 的主要綫性部分。我們把这种在局部范圍內用主要綫性部分 $F(s_i)\triangle s_i$ 來代替改变量 $\triangle W_i$ 的过程称为微分过程，並称 $F(s)\triangle s$ 为函数 $W(s)$（作的功 W 是路程 s 的函数）在点 s 关于增量 $\triangle s$ 的微分，並記作 $dW=F(s)\triangle s$．前面已指出 $\frac{\triangle W}{\triangle s}-F(s)\to 0$，即 $F(s)$ 应是 $W(s)$ 的微商，故函数 $W(s)$ 的微分实际上就是其导数 $W'(s)=F(s)$ 与自变量增量 $\triangle s$ 的乘积：即

$$dW=F(s)\triangle s=W'(s)\triangle s.$$

而通过积分求出整体，即把所有的微分 $F(s_i)\triangle s_i$ 累加起來並取极限得出精确值的过程叫作积分过程，极限值 $\lim\limits_{l\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1}F(s_i)\triangle s_i$ 即称为函数 $F(s)$ 在 $[a,b]$ 上的积分，並記作 $\int_a^b F(s)ds$．由于 $\lim\limits_{l\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1}F(s_i)\triangle s_i=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\triangle W_i=W(b)-W(a)$，故

$$\int_a^b F(s)ds=W(b)-W(a)$$

这里应注意 $W(s)$ 是 $F(s)$ 的原函数，

在上面应用微积分解决二类問題时，已知量（如速度，力）与所求量（如路程，功）間存在着某种确定的关系，一般地說，在解决其他实际問題时，如果当已知量 $f(x)$ 为常量（即 $f(x)$ 实际上是与 x 无关的，在考慮的过程中保持不变）时，所求量 $F(x)$ 从 a 到 b 的改变量 $F(b)-F(a)$ 可以按公式

$$F(b)-F(a)=f(x)(b-a)$$

來計算，那么，当已知量 $f(x)$ 随 x 連續变化时，在局部上就可以用 $f(x)\triangle x$ 來近似所求量的改变量 $\triangle F(x)$，这时，$f(x)\triangle x$ 就是 $\triangle F(x)$ 的主要綫性地部分，並且 $F(x)$ 就是 $f(x)$ 的原函数，为求出 $F(b)-F(a)$，只要对 $f(x)\triangle x$ 求和取极限，即

$$F(b)-F(a)=\sum \triangle F=\lim\sum f(x)\triangle x=\int_a^b f(x)dx$$

因此，連續变化的量 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分就等于它的原函数 $F(x)$ 在 b,a 两点的值之差。由于任意二个原函数間僅差一常数，故此积分又等于任一原函数在 b,a 点的值之差，即

$$\int_a^b f(x)dx=\left[\int f(x)dx\right]\Big|_a^b$$

（等式右边的記号表函数 $\int f(x)dx$ 在 b 点之値减去它在 a 点之値）

这就是通常所說的"微积分基本公式"，这里記号 $\int f(x)dx$ 表示 $f(x)$ 的任一个原函数 $\phi(x)$，称之为 $f(x)$ 的不定积分，而用記号 $\left[\int f(x)dx\right]\Big|_a^b$ 表不定积分在 b,a 点取值之差，即

$$\left[\int f(x)dx\right]\Big|_a^b=\phi(b)-\phi(a). \quad \text{或者：} \varphi(x)\Big|_a^b=\varphi(b)-\varphi(a)$$

这一节从运动第二类問題和变力作功問題，提出了微积分概念。我們看到微分和积分是一个不可分割的統一整体，在积分过程的同时也包含着微分的过程，而微分过程保証了积分过程得以实现，若离开了微分，积分就成为不可能，而微分离开了积分，它的作用也就不可能得到体現。

微分和积分体現了运动过程的局部和整体，均匀变化和非均匀变化，精确和近似之間的辩証关系，

例1. 已知一物体在 $[0,1]$ 这段时間內运动的速度为 gt，求所走的路程。

这实际上就是要計算积分 $\int_0^1 gt\ dt$，这里，被积的函数为

$$f(t)=gt$$

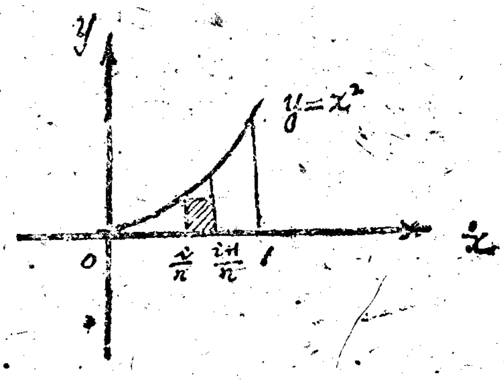
考虑的积分区間为 $[0,1]$，即上列公式中的 $a=0$，$b=1$，为求积分，先求 $f(x)$ 的原函数，我們知道，$\frac{1}{2}gt^2$ 的微商为 gt，所以 $F(t)=\frac{1}{2}gt^2$ 为 $f(t)$ 的一个原函数，按微积分基本公式，有

$$\int_0^1 gt\ dt=F(t)\Big|_a^b=\frac{1}{2}gt^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}g-0=\frac{1}{2}g.$$

例2. 求在抛物綫 $y=x^2$ 之下，在 $[0,1]$ 之上的一塊面积 S，利用分点

$$0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\cdots<\frac{n-1}{n}=1$$

把区間 [0, 1] 分成 n 等分，考慮在小区間 $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$ 上抛物綫底下的一小塊面积，抛物綫上横坐标为 $\frac{i}{n}$ 之点，其縱坐标为 $\left(\frac{i}{n}\right)^2$ 我們以高为 $\left(\frac{i}{n}\right)^2$ 底为 $\frac{1}{n}$ 之小矩形來近似它，把这样小塊的矩形面积加起來，得近似于所求曲边梯形面积之階梯形面积，为



(3—3)

$$S^*=0\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n}+\left(\frac{2}{n}\right)^2\frac{1}{n}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{n^3}\left[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\right]=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{6n^2}-\frac{1}{2n}$$

$$\therefore\ S=\int_0^1 x^2dx=\lim_{n\to\infty}S^*=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6n^2}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{3}$$

定积分的計算有二条途徑，一是通过微积分基本公式化成求原函数的問題（如例 1），另一种方法是直接从积分的來源进行近似計算(如例 2)，在下面二节來分别介紹这二种方法。

§2 微积分运算法則和基本性質

1. 积分表 上一节最后得出的微积分基本公式說明定积分的計算問題化成了找原函数的問題。因此只要把前一节列出的微商表倒过來写就成了一張原函数表。在微商表中各式右端的函数为左端函数的微商，所以左端的函数就是右端函数的原函数了。如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，則 $F(x)+c$ 就包括了 $f(x)$ 的所有的原函数。我們把 $f(x)$ 的原函数族(即所有原函数)記作 $\int f(x)dx$ 所以

$$\int f(x)dx=F(x)+c$$

例如

$$\because\ (\sin x)'=\cos x,\ \therefore\int\cos x dx=\sin x+c$$

积分表：

1. $\int 0dx=c$

2. $\int x^a dx=\frac{1}{a+1}x^{a+1}+c$ $(a\neq -1)$

3 $\int e^x px=e^x+c$

4. $\int a^x dx=a^x\frac{1}{\log a}+c$（$a$ 为不等于 1 的正数）

5. $\int \frac{1}{x}dx=\log|x|+c$

6. $\int \cos x\,dx=\sin x+c$

7. $\int \sin x\,dx=-\cos x+c$

8. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx=\operatorname{tg} x+c$

9. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx=-\operatorname{ctg} x+c$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+c$

11. $\int \frac{1}{1+x^2}dx=\operatorname{arc\,tg} x+c$

12. $\int \operatorname{ch} x\,dx=\operatorname{sh} x+c$

$\int \operatorname{sh} x\,dx=\operatorname{ch} x+c$

$\because (\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x,\quad (\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$

由前可见，微商和积分是二种互逆的运算，在这里就有二个等式，如$F'(x)=f'(x)$，则有

$$\int f(x)dx=\int F'(x)dx=F(x)+c$$

$$\left(\int f(x)dx\right)'=(F(x)+c)'=f(x)$$

用微商法立即可驗証不定积分的最簡单的性質：

1° $\int af(x)dx=a\int f(x)dx;$

2° $\int\left[f(x)+g(x)\right]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx。$

这是因为

$$\left(\int af(x)dx\right)'=af(x)=\left(a\int f(x)dx\right)'$$

$$\left(\int [f(x)+4g(x)]dx\right)'=f(x)+g(x)=\left(\int f(x)dx\right)'+\left(\int g(x)dx\right)'$$

2. 微积分基本运算方法， 在解决第二类运动問題过程的分析中我們看到，微分和积分是两个不可分割的統一整体。当人們在进一步运用积分工具时，更深入地揭露了微积分的关系。这一节我們就是要考慮一些微分法則，並且从这些微分的运算法則得出一些积分的运算法則，这些基本法則在微积分計算中要求能熟練运用。

1° 微分法則。我們知道一个函数改变量的微分就是把函数的微商乘以dx而得到，也就是

$$dy=f'(x)dx.$$

这样从第二章建立的微商运算法則就可以得到微分运算法則，例如

$$d(uv)=(uv)'dx=u\frac{dv}{dx}dx+v\frac{du}{dx}dx$$

$$=udv+udv$$

类似的还有

$$d(u\pm v)=du\pm dv,$$

$$d(cu)=cdu, \qquad (c\text{为常数})$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{1}{v^2}(vdu-udv)$$

2° 微分形式不变性。这是复合函数微商法則的另一形式。設函数

$$y=f(x)\text{可微,} \qquad x=\varphi(t)\text{也可微,}$$

由复合函数微商法則，$y=f(\varphi(t))$的微商为 $f'(x(t'))\varphi'(t)$。这样一來，对 t 說來就有

$$dy=f'(x)\varphi'(t)dt$$

但是 $dx=\varphi'(t)dt$；故有

$$dy=f'(x)dx$$

这說明在函数的微分表达式中 x 既可以是自变量，也可以是某一个函数。这个性質称为微分形式的不变性。

現在來考慮积分运算的基本方法。

3° 分部积分法。这是乘积的微商公式的直接結果，我們知道

$$(f\,g)'=f'\cdot g+f\cdot g'.$$

积分这个等式即得

$$\int f'\cdot g\,dx=f\cdot g-\int f\cdot g'dx.$$

为了应用的方便，常把这个等式写成

$$\int g\,df=f\cdot g-\int f\,dg$$

这样，就可以把求 $f'g$ 的原函数的問題化成求 fg' 的原函数的問題了。而 fg' 的原函数很可能比較容易求出。至于把被积函数的哪一部分看作 f'，哪一部分看作 g，要視具体情況而定。

对定积分分部积分的公式是

$$\int_a^b fg'dx = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'gdx$$

例1. 求原函数 $\int \ln x\, dx$.

从积分表中我們还看不出它是什么。但是，如果我們利用上面的方法，把 $\ln x\, dx$ 看作 $f(x)dg(x)$，$g(x)=x$，就会很容易求出它來。

$$\int \ln x\, dx = x\ln x - \int x d(\ln x) = x\ln x - \int \frac{1}{x} x dx = x\ln x - x + c.$$

例2. 同样的，对于 $\int xe^x dx$ 我們也可以用分部积分法求出它來。

在这里，把 $e^x dx = de^x$ 看作 $dg(x)$ 就可得到

$$\int e^x dx = \int x de^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

4° 換元积分法。例如我們要求原函数

$$\int tgx' dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx。$$

因为 $\sin x\, dx = -d\cos x$，二端除以 $\cos x$，令 $u=\cos x$，得到

$$\frac{\sin x}{\cos x} dx = -\frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\frac{du}{u}$$

这样一來我們就把积分函数 $tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ 的問題化成积分函数 $-\dfrac{1}{u}$ 的問題了，而后一問題顯然很容易解决。于是，我們就求出

$$\int tgx\, dx = \int -\frac{1}{u} du = -\ln|u| + c = -\ln|\cos x| + c.$$

一般說來，假如已知

$$F'(u) = f(u), \qquad u = \varphi(x),$$

我們就得到一个复合函数

$$y = F(u) = F(\varphi(x)).$$

由复合函数微商法則我們有

$$dy = F'(u)du = F'(\varphi(u)\varphi'(x)dx = f(\varphi(x))d\varphi(x),$$

再根据不定积分的定义我們就得到

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + c.$$

由此，我們可有下述結果：若 $u=\varphi(x)$ 可微，且函数 $f(u)$ 有原函数，則

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(\varphi(x))d\varphi(x)=\int f(u)du.$$

［积分后应把u换成$\varphi(x)$.］

在积分$\int tgxdx$中我們是把形如$f(\varphi(x))\varphi'(x)$的积分化为形如$f(u)$的函数的积分。在实际应用中也常把公式右端的形状化成左端的形状去积分。如果$f(\varphi(x))\varphi'(x)$的原函数比$f(u)$的原函数好求的話。

例如

$$\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

这样一个原函数从表面看來似乎很不好求，可是，如果我們令$x=u^2$就有

$$\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{\sin\sqrt{u^2}}{\sqrt{u^2}}d(u^2)$$

$$=\int\frac{\sin u}{u}2u\,du=\int 2\sin u\,du$$

$$=-2\cos u+c=-2\cos\sqrt{x}+c$$

問題很容易就解决了。

对定积分的换元公式是

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)\varphi'(t)dt,$$

其中　$x=\varphi(t)$,　　$a=\varphi(\alpha)$,　　$b=\varphi(\beta)$.

3. **例.** 我們講几个应用上述各积分法則的例，这些方法在計算时常常用到。

例1. 計算不定积分

$$I=\int\frac{dx}{x^2-a^2}.$$

由于

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right],$$

我們有

$$I=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}\right].$$

在右端的第一个积分中用$x-a$作为新变量而在第二个积分中用$x+a$作为新变量，則由于

$$dx=d(x-a)=d(x+a),\quad \int\frac{dx}{x-a}=\int\frac{d(x-a)}{x-a},\quad \int\frac{dx}{x+a}=\int\frac{d(x+a)}{x+a},$$

我們有

$$I=\frac{1}{2a}\left[\ln|x-a|-\ln|x+a|\right]+c$$

$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+c}\right|+c.$$

例2 計算不定积分

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

对于这种根式（含有二次式）常引用三角函数作变量替换。在这里令

$$x=a\sec t(\text{不妨取 } x>0, 0\leqslant t<\frac{\pi}{2}).$$

則

$$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2(\sec^2 t-1)}=a\,tg\,t,$$

$$dx=ad\left(\frac{1}{\cos t}\right)=a\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt.$$

所以

$$I=\int\frac{dt}{\cos t}.$$

在被积表达式中分子分母同时乘以$\cos t$則

$$I=\int\frac{\cos t}{\cos^2 t}dt=\int\frac{d(\sin t)}{1-\sin^2 t}.$$

利用上題結果，我們就得到

$$I=-\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sin t}{1+\sin t}+C_1=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}+C_1$$

再把t换成x:

$$\sin t=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}=\frac{1}{x}\sqrt{x^2-a^2},$$

我們就得到

$$I=\frac{1}{2}\ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}}+C_1=\frac{1}{2}\ln\frac{(x+\sqrt{x^2-a^2})^2}{(x-\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})}+C_1=$$

$$=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.\quad(C=C_1-2\ln a).$$

例3. $I=\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx.$

被积函数求一次微商就把根号翻到了下面，这就会变成例 2 的情况，所以我們利用分部积分法：

$$I=\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=x\sqrt{x^2-a^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$$

$$=x\sqrt{x^2-a^2}-\int\frac{x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx-a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$=x\sqrt{x^2-a^2}-I-a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

于是

$$I=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{1}{2}\ a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c.$$

4. **有理函数的积分法。** 有理函数是常见的一类函数，它的积分有比較系統一般的方法，我們这一节就來介紹这个方法。

設給定有理函数

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是多項式，彼此沒有共同的根。如果分子的次數小于分母次数，我們就說这个分式是一个真分式，在相反情形下就叫作假分式。对于假分式我們总可以利用初等代数中的多項式除法把它化为整式和真分式两部分，由于整式（多項式）的积分我們早已会求，所以問題就在于真分式的积分。对于真分式，利用代数的方法总可以把它分解成某些簡单类型的分式的和，这就是下面的代数中的部分分式。

定理：設分母 $Q(x)$ 具有因式分解

$$Q(x)=k(x-x_1)^{\lambda_1}\cdots(x-x_n)^{\lambda_n}(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}\cdots(x^2+p_mx+q_m)^{\mu_m}$$

其中各因子間两两无公因式，且 $x^2+p_ix+q_i$ $(i=1,2\cdots m)$ 沒有实根，則对任一有理真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$，总存在常数 $A^{(r)}_i$，$M^{(s)}_j$，$N^{(s)}_j$，使得

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{A_i^{(1)}}{(x-x_i)^{\lambda_i}}+\frac{A_i^{(2)}}{(x-x_i)^{\lambda_i-1}}+\cdots+\frac{A_i^{(\lambda_i)}}{x-x_i}\right\}$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{M_j^{(1)}x+N_j^{(1)}}{(x^2+p_jx+q_j)^{\mu_j}}+\frac{M_j^{(2)}x+N_j^{(2)}}{(x^2+p_jx+q_j)^{\mu_j-1}}+\cdots+\right.$$

$$\left.+\frac{M_j^{(\mu_j)}x+N_j^{(\mu_j)}}{x^2+p_jx+q_j}.\right\}$$

有了这个定理，我們就可以将有理函数的积分化为对这些部分分式的积分，而它們的积分是比較容易算出來的。当然要具体实現这方法，必須首先解决常数 $A^{(r)}_i$，$M^{(s)}_j$，$N^{(s)}_j$ 应如何來求出，下面举一例子說明求这些常数最常用的“待定系数法”。

設要計算积分

$$\int \frac{x^5+2x^3-2x^2+x-1}{x^2(x^2+1)^2}dx.$$

我們令

$$\frac{x^5+2x^3-2x^2+x-1}{x^2(x^2+1)^2}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+1},$$

其中 A,B,C,D,E,F 是待定的常数。上式二端同乘以 $x^2(x^2+1)^2$，再把两边同类项合併即得

$$x^5+2x^3-2x^2+x-1=(B+E)x^5+(A+F)x^4 \\ +(2B+C+E)x^3+(2A+D+F)x^2+Bx+A.$$

比較左右二端相应的系数得到

$$\begin{cases} B+E=1, \\ A+F=0, \\ 2B+C+E=2, \\ 2A+D+F=-2, \\ B=1, \\ A=-1. \end{cases}$$

解之得

$$A=-1,\ B=1,\ E=0,\ F=1,\ C=0,\ D=-1.$$

因此

$$\frac{x^5+2x^3-2x^2+x-1}{x^2(x^2+1)^2}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{(x^2+1)^2}+\frac{1}{x^2+1}.$$

于是左端的不定积分就可以化为右端的四个分式的不定积分；而

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C,$$

$$\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+C,$$

$$\int\frac{dx}{x^2+1}=\operatorname{arctg}x+C,$$

所以剩下只需求积分 $\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$。利用分部积分公式我們有

$$\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{x}{x^2+1}+\int\frac{2x^2}{(x^2+1)^2}dx$$

$$=\frac{x}{x^2+1}+2\int\frac{dx}{x^2+1}-2\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

因此

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\ \frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$=\frac{1}{2}\ \frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arc} tg\, x+C.$$

于是

$$\int \frac{x^5+2x^3-2x^2+x-1}{x^2(x^2+1)^2}dx=\frac{1}{x}+\ln|x|-\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arc} tg\, x+C.$$

上面的例說明了有理函数的一般积分方法，只是在一般情形，最后分出的部分分式可能会是下述类型积分：

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx.$$

这里 $x^2+px+q=0$ 沒有实根，即 $p^2-4q<0$，因而

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+a^2,$$

其中

$$a=\frac{1}{2}\sqrt{4q-p^2}.$$

令 $t=x+\frac{p}{2}$，則

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}dx=\int \frac{M't+N'}{(t^2+a^2)^m}dt,$$

其中 $M'=M$， $N'=N-\frac{1}{2}Mp$。但是

$$\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^m}=\frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^m}=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln(t^2+a^2) & \text{当} m=1,\\ \frac{1}{2(1-m)}(t^2+a^2)^{1-m} & \text{当} m\neq 1,\end{cases}$$

所以只需求积分

$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}.$$

对这个积分，与上面計算积分 $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ 一样可用分部积分法：

$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}=\frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+t^2-t^2}{(t^2+a^2)^m}dt=\frac{1}{a^2}\left[\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{m-1}}\right.$$