

1985016

渐近分析及其应用

(按照听林家翘教授讲学的
笔记整理, 未经林教授审阅)

暨南大学
数学系资料

赠阅
请交换

清华大学基础部数学教研组印

1980.1.

绪 论

渐近分析的观念是比较老的，近年来发展得比较多，它是在自然科学和工程科学中应用得很广泛的一种数学方法。有许多渐近分析的方法是工程师首先发明的，如流体力学中的边界层理论，就是从工程的需要而引入的，以后广泛应用于其他学科，就象 Fourier 的发明 Fourier 分析那样。

渐近分析中的转向点理论可用来研究壳理论，这在本课程安排的第三次专题报告中对报告的张维等的文章中将会谈到。渐近分析包括将方程用渐近方法化为简化的方程，如在浅水波理论和板壳理论中都是用这种方法。

我这次讲课的重点是转向点问题，并应用于流体运动稳定性问题和天文问题。

量子力学中有转向点问题，天文中的星系螺旋结构密度波理论中的一些问题，在数学上也归为转向点问题，并可应用到磁镜及等离子体问题中去。

下面我想简单地谈一谈对应用数学的看法。应用数学就是可用性数学，如果不可用或不用就不成其为应用数学。作为应用数学应当包括三方面的内容：

始：实质问题的数学表达；

中：求解；

终：数学解的实质注释。

这里所说的实质问题是指：科学问题（物理、经济问题等）、工程问题等。

中国古书《左传》中有一句话：“一问三不知”，如果将“三”比做上面所说的“始、中、终”，应用数学对这三个方面都不能不知，应当有“来龙”，又有“去脉”。

如果将应用数学与纯粹数学加以比较，可列表如下：

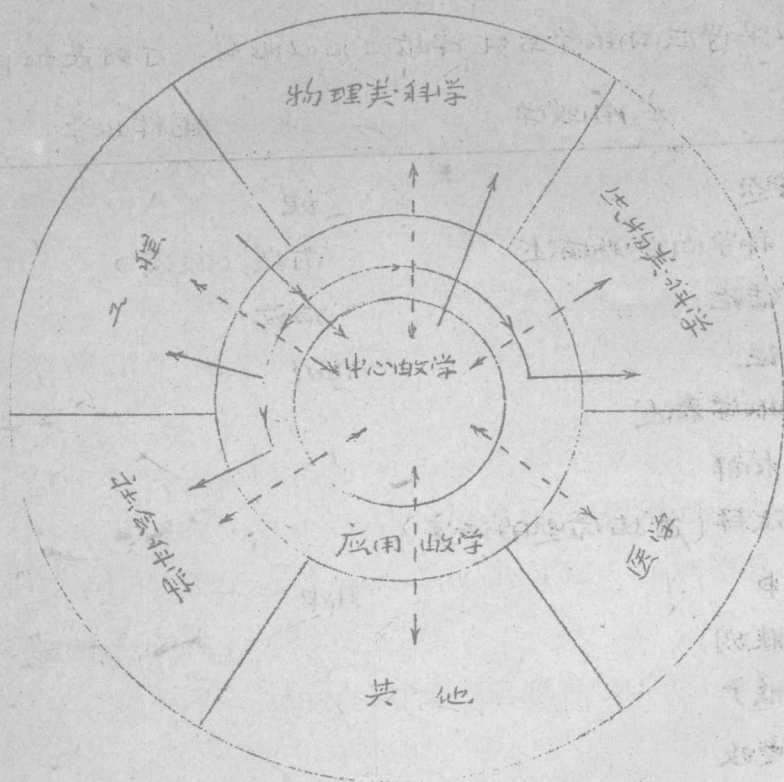
应用数学	纯粹数学
命题	定理
科学问题的描述	前提（假设）
结论	结论
论证	证明
数学表述	
求解	
注释（包括命题的证实）	
引申	引申
推测	
推广	
修改	

其中应用数学的论证在演绎程度上不同于纯粹数学的证明。如许多在应用的新计算方法其收敛性并未证明，而用计算机标下是稳定的，这样就是可用的。

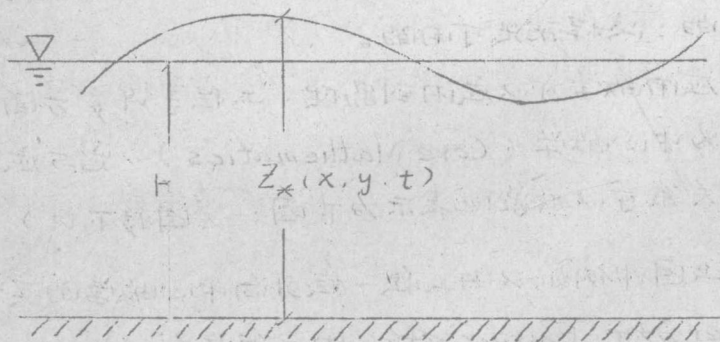
应用数学可以应用到物理、工程等许多方面，纯数学也有人称之为中心数学（Core Mathematics），它与应用数学和其他科学的关系可以形象地表示为下图：（图移下页）。

上图中例如以由工程一栏引向中心数学的实线箭头代表Fourier分析，Fourier分析是由工程师发明的，它一方面发展为应用数学的一支，转过来应用于工程、物理等各个领域，另一方面它深入到中心数学的领域中，作为一个纯粹的理论课题。

下面举几个应用数学中的例子。



例1. 浅水波问题



当扰动前水深 H 与水平特征尺寸 L 之间有如下关系

$$H \ll L$$

时称为浅水波。

势函数 φ 满足方程

~ 绪3 ~

$$\Delta\psi = 0$$

及边界条件:

$$\text{当 } z=0 \text{ 时, } \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0$$

$$\text{在自由面上, } p=0, \quad w = \frac{\partial z}{\partial t} + u \frac{\partial z}{\partial x} + v \frac{\partial z}{\partial y} \quad (\text{其中}$$

p 为压强, u, v, w 为 x, y, z 方向的速度分量)。

$$\text{引进深度参数 } \eta = \frac{H}{L} \text{ 及波幅参数 } a = \frac{Z_* - H}{H}, \text{ 可分为下面}$$

三种情况进行简化:

(i) $a=0$ ($1 \gg \eta^2$): 这时可用 Airy 理论, 在数学上完全和气体的压缩波一样, 可以得到“水跃”现象 (冲击波现象)。

(ii) $a=0$ (η^2), 即 a, η 均甚小, 这时是低幅水波, 可以用非线性理论来处理, 得出孤立波 (Solitary wave)。

(iii) $a \ll \eta^2$, 可用线性理论来解释。

例2. 压缩波

一维压缩波问题归结为微分方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(fu) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{c^2}{f} \frac{\partial f}{\partial x} \end{cases}$$

可用小扰动方法求出其近似解。通常是将 p 和 u 按某个小参数 ε 展开为、

$$f = f_0 + f_1 \varepsilon + f_2 \varepsilon^2 + \dots$$

$$u = u_1 \varepsilon + u_2 \varepsilon^2 + \dots$$

代入方程求出各级近似, 可以发现

$$f_2 \sim t, \text{ 有限量}$$

这就是所谓“永年项”, 它说明通常的小扰动法当时间久了就不

~猪+~

能用了。在后面关于 PLK 方法的专题报告中将讨论这个问题。

例3. 水流不稳定性问题

这个问题可以归结为四阶微分方程

$$\frac{d^4 \varphi}{dx^4} + \lambda^2 \left\{ P \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + Q \frac{d\varphi}{dx} + R \varphi \right\} = 0 \quad (*)$$

的解，其中 λ 为大参数。

$$P = P(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} P_n(x)$$

$$Q = Q(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} Q_n(x)$$

$$R = R(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} R_n(x)$$

当 $x = x_0$ 使 $P_0(x_0, \lambda) = 0$ 时，称 x_0 为方程的转向点。这次讲课将着重讲在转向点附近的一致有效渐近解问题。

如果在上述方程中令

$$v = \frac{d^2 \varphi}{dx^2}$$

得：

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \lambda^2 \{ P v + \dots \} = 0$$

这个方程与量子力学中的方程

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \lambda^2 [E - U(x)] \psi = 0$$

类似，这是有转向点的一种典型方程。Langer 在 1939 年已解决了后面这个方程的问题。

下面将看到，为了求 (*) 的一致有效渐近解，先要研究辅助

方程 $u^{(iv)} + \lambda^2 (Z u'' + \alpha u' + \beta u) = 0 \quad (**)$

的解，而 (**) 的解可用 Laplace 变换求得。

目 录

绪 论

绪 1~5

第一章

渐近分析基础

- §1. Bessel 方程的积分表示式解 1~9
- §2. 鞍点法 9~18
- §3. Hankel 函数、Bessel 函数的渐近性质 18~22
- §4. 用 Laplace 变换求微分方程的积分表示式解：Airy 函数 22~28
- §5. 转向点问题 28~37
- §6. Langer 变换 37~39
- §7. 非齐次微分方程及高阶近似问题 40~42

参考文献

43

第二章

流场运动稳定性

44

- §1. 平行流运动稳定性：Orr-Sommerfeld 方程 44~47
- §2. 无粘方程解的性质 48~49
- §3. Orr-Sommerfeld 方程的渐近解 50~53
- §4. 本征值方程及中性曲线 53~59
- §5. 关于 Orr-Sommerfeld 方程的进一步讨论 59~71

参考文献

71

第三章	星系螺旋结构的密度波理论	72
§1.	引言	72
§2.	密度波理论的物理基础	73 ~ 76
§3.	动力学问题的数学提法	76 ~ 81
§4.	螺旋密度波的近理论	81 ~ 102
§5.	非稳定螺旋模式	102 ~ 107
§6.	其他	108 ~ 112
	参考文献	113

附录	专题报告	1
I.	浅水波理论 (按照所林家翘教授讲课的 讨论整理, 未经林教授审阅)	114 ~ 122
II.	圆环壳和承受轴对称载荷时的复变量方 程组解法 (赵鸿宾报告)	123 ~ 141
III.	关于 PLK 方法 (翁铭德报告)	142 ~ 165
IV.	保角变换在粘性流体力学中的应用 (蔡人用报告)	166 ~ 178
V.	特征线摄动法 (时爱民报告)	179 ~ 194

第一章 渐近分析基础

§1. Bessel 方程的积分表示式解

1. 引言

在柱坐标下，用分离变量法解波动方程

$$\nabla^2 w = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (1.1.1)$$

可得 n 阶 Bessel 方程

$$f^2 \frac{d^2 Z_n}{df^2} + f \frac{dZ_n}{df} + \left(1 - \frac{n^2}{f^2}\right) Z_n = 0. \quad (1.1.2)$$

在 $f=0$ 附近，方程 (1.1.2) 的广义幂级数解

$$J_n(f) = \left(\frac{f}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{n! 1 \cdot (m+n+1)} \left(\frac{f}{2}\right)^{2m} \quad (1.1.3)$$

称为 n 阶 Bessel 函数。当 n 不是整数时， $J_{-n}(f)$ 是 Bessel 方程的另一个线性无关解。而当 n 为整数时 $J_n(f)$ 、 $J_{-n}(f)$ 线性相关，另一线性无关解取为 Neumann 函数 $N_n(f)$ 。

当 $f \gg 1$ 时，

$$J_n(f) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi f}} \cos\left(f - \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.1.4)$$

是 Bessel 函数当 f 很大时的渐近表示式。下面我们将由 Bessel 函数的积分表示式用“鞍点法” (The saddle point method) 得出 $J_n(f)$ 的这个渐近表示式。用渐近表示式 (1.1.4) 来研究 $f \gg 1$ 时 $J_n(f)$ 的性质比用广义幂级数解 (1.1.3) 优越得多。

2. 波动方程的解，Bessel 函数

考虑方程 (1.1.1)，令

$$w = u(x, y, z) e^{-i\omega t} \quad (\omega \text{ 为圆频率})$$

~ / ~

代入 (1.1.1) 得

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad (k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}) \quad (1.1.5)$$

引入柱坐标 $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$ 如果 u 在 z 方向没有变化 (即柱面波) (1.1.5) 变为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 u = 0$$

令 $(= k r)$ 得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + u = 0 \quad (1.1.6)$$

设方程 (1.1.6) 有解如

$$u = Z_n(\rho) e^{in\varphi}$$

的分离变量解, 则代入 (1.1.6) 可知 $Z_n(\rho)$ 满足 n 阶 Bessel 方程 (1.1.2):

$$\frac{d^2 Z_n}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dZ_n}{d\rho} + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right) Z_n = 0 \quad (1.1.2)$$

(1.1.2) 有两个奇点: $\rho = 0$ 和 $\rho = \infty$ 。在 $\rho = 0$ 附近其解由 (1.1.3) 给出, 而在 $\rho = \infty$ 处则用渐近表示式 (1.1.4) 给出。粗略地看, 当 $\rho \gg 1$ 时 $Z_n(\rho)$ 一定有 $\frac{1}{\rho} e^{\pm i\rho}$ 这样形式的解。事实上, 设

$v_n = \sqrt{\rho} Z_n$, 代入 (1.1.2) 得

$$\frac{d^2 v_n}{d\rho^2} + \left(1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{\rho^2}\right) v_n = 0 \quad (1.1.7)$$

当 $\rho \gg 1$ 时, 忽略 $\frac{n^2 - \frac{1}{4}}{\rho^2}$, (1.1.7) 变为

$$\frac{d^2 v_n}{d\rho^2} + v_n = 0$$

故有 $v_n \sim e^{\pm i\rho}$, 所以

$\sim 2 \sim$

$$Z_n(\rho) \sim \frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{\pm i\rho} \quad (1.1.8)$$

比较 (1.1.4) 和 (1.1.8) 两式, 可以看出, 它们属于同一类函数, 只有幅度和相角的差异, 而 (1.1.4) 式中幅度和相角是如何确定的呢? 这就要用到 Bessel 方程的积分表示式解, 即 Bessel 函数的积分表示式。

Bessel 函数的积分表示式为

$$J_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{W_0} e^{i\rho \cos w} e^{in(w - \frac{\pi}{2})} dw \quad (1.1.9)$$

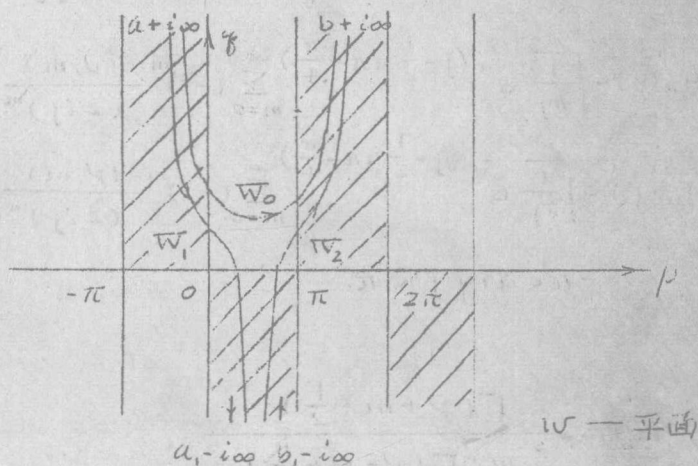


图 1.1.1

这里 $w = \rho + i\eta$ 是复变数, W_0 为 w 平面上的一条路径 (见图 1.1.1). 凡是全数时, W_0 可取为实轴上 $[-\pi, \pi]$ 这一段。

在波动方程中用得更多的是 Hankel 函数 $H_n^{(1)}(\rho)$, $H_n^{(2)}(\rho)$. 它们也是 Bessel 方程两个线性无关解, 它们的积分表示式分别为

$$H_n^{(1)}(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_{W_1} e^{i\rho \cos w} e^{in(w - \frac{\pi}{2})} dw \quad (1.1.10)$$

$$H_n^{(2)}(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_{W_2} e^{i\rho \cos w} e^{in(w - \frac{\pi}{2})} dw \quad (1.1.11)$$

其中 w_1, w_2 为 w 平面上的两条路径 (见图 1.1.1)。当 $f \rightarrow \infty$ 时, $H_n^{(1)}(f)$ 具有 $\frac{1}{\sqrt{f}} e^{if}$ 的性质, 它代表一个外行波; $f \rightarrow \infty$ 时, $H_n^{(2)}(f)$ 具有 $\frac{1}{\sqrt{f}} e^{-if}$ 的性质, 代表一个内行波。Hankel 函数与

Bessel 函数有如下关系:

$$J_n(f) = \frac{1}{2} [H_n^{(1)}(f) + H_n^{(2)}(f)] \quad (1.1.12)$$

$$H_n^{(1)}(f) = J_n(f) + iN_n(f) \quad (1.1.13)$$

$$H_n^{(2)}(f) = J_n(f) - iN_n(f) \quad (1.1.14)$$

$N_n(f)$ 为 Neumann 函数。Hankel 函数的渐近表示式为

$$H_n^{(1)}(f) \sim \sqrt{\frac{1}{\pi f}} e^{i(f - \frac{1}{2}n\pi - \frac{\pi}{4})} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(\nu, m)}{(2if)^m} \quad (1.1.15)$$

$$H_n^{(2)}(f) \sim \sqrt{\frac{1}{\pi f}} e^{-i(f - \frac{1}{2}n\pi - \frac{\pi}{4})} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(\nu, m)}{(2if)^m} \quad (1.1.16)$$

$$-\pi < \arg f < \pi$$

这里

$$(\nu, m) = \frac{\Gamma(\nu + m + \frac{1}{2})}{m! \Gamma(\nu - m + \frac{1}{2})}$$

由 (1.1.12), (1.1.15), (1.1.16) 知, (1.1.4) 的适用范围为

$$-\pi < \arg f < \pi$$

3. 波动方程的 Sommerfeld 解, Bessel 函数积分表示式的推导

下面我们从物理意义来说明 Bessel 方程的积分表示式可能具有的形式。如果 (1.1.1), (1.1.6) 中 w, u 与 y 无关, 则方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0 \quad (1.1.17)$$

成为

$$\sim + \sim$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + k^2 u = 0$$

它有两个线性无关解

$$u_1 = A e^{ikx} \quad u_2 = B e^{-ikx}$$

则波动方程 (1.1.1) 应有两个解

$$w_1 = A e^{i(kx - \omega t)} \quad \text{代表 } x \text{ 正向的平面波}$$

$$w_2 = A e^{i(-kx - \omega t)} \quad \text{代表 } x \text{ 负向的平面波。}$$

类似地，方程 (1.1.17) 分离变量后应有如下形式的解：

$$u(x, y) = A e^{i(ax + by)} \quad a^2 + b^2 = k^2$$

引入极坐标 $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ 并引入参数 α

$$\begin{cases} a = k \cos \alpha \\ b = k \sin \alpha \end{cases}$$

则

$$u = A e^{i k r (\cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha)}$$

$$= A e^{i k r \cos(\varphi - \alpha)} \quad (1.1.18)$$

它代表 $\varphi = \alpha$ 方向的一个平面波。一般 A 可以是 α 的函数，对不同的 α ，(1.1.18) 表示不同方向的平面波。上面从物理意义讲 α 是角度，不过如果我们把 α 推广成为复参数，代入方程可验证，它仍然是方程的解。

设

$$A = C_n e^{in\alpha} \quad (C_n \text{ 是与 } \alpha \text{ 无关的常数})$$

对 α 积分，并注意 $j = k r$ ，则有

$$u = C_n \int_{\beta_1}^{\beta_2} e^{i j \cos(\varphi - \alpha)} e^{in\alpha} d\alpha \quad (1.1.19)$$

3. β_1, β_2 为适当选取的两个积分限。(1.1.19) 与 (1.1.18) 不同

(1.1.18) 代表 $f = \alpha$ 一个方向的平面波，而 (1.1.19) 代表的是一束平面波的迭加，其方向由 $\alpha = \beta$ 变到 $\alpha = \gamma$ 。显然 (1.1.19) 是满足 (1.1.6) 的。为了使 (1.1.19) 具有 $u = Z_n(j) e^{iny}$ 的形式，令

$$\alpha = w + \gamma, \quad w_0 = \beta - \gamma, \quad w_1 = \gamma - \gamma = 0$$

则 (1.1.19) 变为

$$u = \left(C_n \int_{w_0}^{w_1} e^{i f \cos w} e^{inw} dw \right) e^{iny}$$

如果 e^{iny} 的系数只是 j 的函数，其充要条件是 w_0 与 w_1 均不依赖于 y ，这只要取积分路径的两个端点 w_0, w_1 为无穷远点即可，当然需要保证积分的收敛性。

由被积函数的形式可知，当 $i f \cos w$ 的实部为负时积分收敛。设 $w = p + i\gamma$ ，因为 j 是正的，故要求

$$\operatorname{Re}(i f \cos w) = \operatorname{sh} \gamma \sin p < 0$$

在上半平面上，因 $\gamma > 0$ ，故要求 $\sin p < 0$ ，即

$$-\pi + 2k\pi < p < -k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

在下半平面上， $\gamma < 0$ ，故要求 $\sin p > 0$ ，即

$$2k\pi < p < \pi + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

满足上述要求的区域就是图 1.1.1 中的阴影部分。只要 w_0, w_1 在这样的阴影区域内趋于 ∞ ，就可以保证积分收敛。选取路径 w 。

由 $w_0 = a + i\infty$ 到 $w_1 = b + i\infty$ ， $(-\pi < a < 0, \pi < b < 2\pi)$ 且选

$C_n = \frac{1}{2\pi} e^{-in\frac{\pi}{2}}$ ，就得到 Bessel 函数的积分表示式 (1.1.9)：

$$J_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{w_0}^{w_1} e^{i f \cos w} e^{in(w - \frac{\pi}{2})} dw$$

如果选取路径 w_1 或 w_2 (见图 1.1.1) $C_n = \frac{1}{\pi} e^{-i\pi\frac{n}{2}}$ ，

则得到 Hankel 函数的积分表示式 (1.1.10) (1.1.11)。

4. Bessel 函数的积分表示式与广义幂级数解同一性的证明
下面来证明 (1.1.9) 式与 (1.1.3) 式表示的是同一个函数。

在 (1.1.9) 式中作变量置换:

$$\zeta = e^{-i(\omega - \frac{\pi}{2})}$$

这时, 因 $\cos \omega = \frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2}$

取图 (1.1.2) 中的特殊路

径, (1.1.9) 式就变为

$$J_n(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} e^{\frac{\zeta}{2}(\zeta - \zeta^{-1}) - (n+1)\zeta} d\zeta \quad (1.1.20)$$

这里 γ_0 是由 ω 平面上的特殊

路径 ω_0 (见图 1.1.2) 变到

ζ 平面所得到的路径 (见图 1.1.3)。

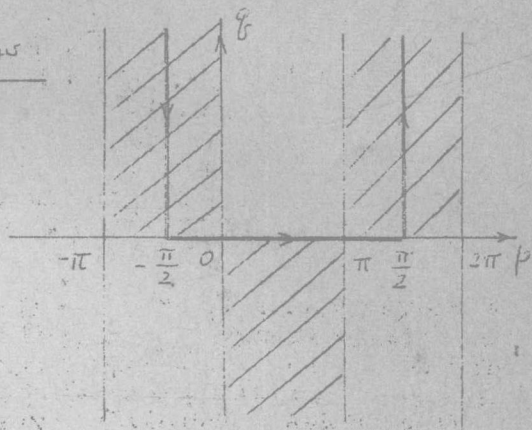


图 1.1.2

ω - 平面

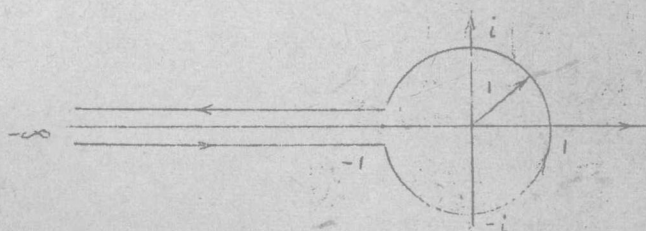


图 1.1.3 ζ - 平面

再令 $\zeta = \frac{2v}{\zeta}$, 则 ζ 变到 v 平面上的路径为 v_0 . 它们的形状是差不多的 (见图 1.1.4). (1.1.20) 式变为:

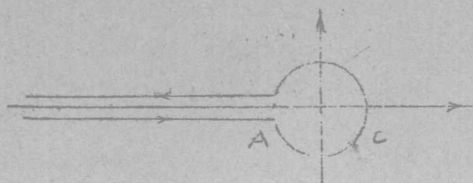


图 1.1.4 u -平面

$$J_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} e^{\frac{f}{2} \left[\frac{2u}{f} - \left(\frac{f}{2u} \right)^2 \right]} \left(\frac{2u}{f} \right)^{-(n+1)} d\left(\frac{2u}{f} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{f}{2} \right)^n \int_{C_0} e^u e^{-\left(\frac{f}{2}\right)^2/u} u^{-(n+1)} du \quad (1.1.21)$$

由于被积函数中有 e^u 这个因子，故当 $u \rightarrow -\infty$ 时 e^u 是指数减小的，(1.1.21) 中的积分收敛，且是 f 的整函数，故可展开为 f 的泰勒级数，级数的首项为：

$$\lim_{f \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} e^u e^{-\left(\frac{f}{2}\right)^2/u} u^{-(n+1)} du \right]$$

由于

$$\int_{C_0} = \int_{-\infty}^A + \int_C + \int_A^{-\infty}$$

沿下岸 沿上岸

在圆周 C 上，令 $u = re^{i\varphi}$ ，则

$$\int_C = \int_{-\pi}^{\pi} e^{re^{i\varphi}} e^{-\left(\frac{f}{2}\right)^2/re^{i\varphi}} re^{i\varphi} i e^{i\varphi} d\varphi$$

$$\lim_{f \rightarrow 0} \int_C = 0$$

故当 $f \rightarrow 0$ 时有

$$\int_{C_0} e^u e^{-\left(\frac{f}{2}\right)^2/u} u^{-(n+1)} du = \int_{-\infty}^0 + \int_0^{-\infty}$$

沿下岸 沿上岸

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} e^{\sqrt{z}} \left(\frac{f}{2}\right)^{1/2} \sqrt{z}^{-(n+1)} dz = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\text{下岸}} e^{\sqrt{z}} \sqrt{z}^{-(n+1)} dz + \int_{\text{上岸}} e^{\sqrt{z}} \sqrt{z}^{-(n+1)} dz \right)$$

在下岸, $\sqrt{z} = \sqrt{\rho} e^{-i\pi/2}$ 在上岸 $\sqrt{z} = \sqrt{\rho} e^{i\pi/2}$, 代入上式得:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \left[\int_0^\infty e^{-\sqrt{\rho} r} \sqrt{\rho}^{-(n+1)} e^{-(n+1)\pi i} - \pi i \, dr + \int_0^\infty e^{\sqrt{\rho} r} \sqrt{\rho}^{-(n+1)} e^{-(n+1)\pi i} \pi i \, dr \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-\sqrt{\rho} r} \sqrt{\rho}^{-(n+1)} \left[e^{-(n+1)\pi i} - e^{(n+1)\pi i} \right] dr \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\sqrt{\rho} r} \sqrt{\rho}^{-(n+1)} \sin(n+1)\pi \, dr \\ &= \frac{1}{\pi} \sin n\pi \int_0^\infty e^{-\sqrt{\rho} r} \sqrt{\rho}^{-(n+1)} \, dr \\ &= \frac{\sin \pi t}{\pi} \Gamma(t) \quad (\text{令 } t = -n, \operatorname{Re} t > 0) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-t)} = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \end{aligned}$$

在级数 (1.1.3) 中

$$\frac{J_n(f)}{\left(\frac{f}{2}\right)^n} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(n+m+1)} \left(\frac{f}{2}\right)^{2m}$$

它的首项也是 $\frac{1}{\Gamma(n+1)}$, 由解的唯一性及幂级数展开的唯一性

知 (1.1.3) 与 (1.1.9) 是完全一致的。(参致 [1])。

§2. 鞍点法

有了积分表示式, 就可以求它的渐近展开。我们将用“鞍点法”或“最速下降法”求出渐近展开式。