师专函授学习资料

《初等数学复习及研究》

（平面几何）

学习参考资料

第一分册

邯郸地区教师进修学院

保定地区教师进修学院

说　明

为了帮助师专函授学员学习数学函授教材——梁绍鸿编《初等数学复习及研究》（平面几何），我们编写了这本《学习参考资料》供邯郸和保定两个地区师专函授学员学习参考。

这本《学习参考资料》，是由保定地区教师进修学院教学组和邯郸地区教师进修学院雷国铭、梁美玲、张东海等同志负责编写的；本书还将陆续印出，第一、二分册为学习参考资料，第三、四、五分册为习题解答。由于时间仓促，水平有限，缺点错误，在所难免，望同志们批评指正。

编者

一九七九年四月

目　　录

概　述…………………………………………（1）

引　言…………………………………………（3）

第一章　中学平面几何摘要

第一节　直线形定理……………………………（21）

第二节　关于园的定理…………………………（35）

第三节　比例线段及相似形……………………（59）

第四节　面积问题………………………………（125）

第二章　推证通法

第一节　命题的形式……………………………（163）

第二节　直接证法和间接证法…………………（174）

第三节　分析法与综合法………………………（183）

第四节　演绎法与归纳法………………………（189）

概　　述

《初等数学复习及研究》是北京师范大学梁绍鸿教授根据55年教育部编定的师范学院数学系教学大纲编写的，内容共分七个部分：

引言。首先阐述了几何论证的本源，说明建立公理体系的必要性；然后叙述了几何学简史并对欧几里德（Euclid）《几何原本》给予评价；后来介绍了希尔伯特(Hilbert)公理体系的主要内容，初步阐明近代公理法对于几何论证的严格要求。

第一章——中学平面几何摘要。对以往中学平面几何课本的内容进行了整理和摘录，目的在于方便复习与引证。

第二章——推证通法。论述命题的结构形式，以及推证命题时惯用的逻辑及在数学中的应用。

第三章——证题术。详细论述各种证题技术，以培养独立证题的技能、技巧。

第四章——轨迹。阐明轨迹的意义和基本属性，详述三种类型命题的解法，讨论如何探求轨迹及如何检查题解。

第五章——作图。阐述作图在几何学中的地位，尺规作图的根据与解题步骤，作图的各种方法，略述尺规作图的不能问题及判断方法。

附录——多值有向角。解决由于图形变化而引起证明方法不同的问题。

师专函授教材中安排这个教材的主要目的是：

由于数学论证的方法，在逻辑结构方面要求特别严格，在平面几何上这一点更为突出，所以培养谨严的逻辑习惯，发展积极的逻辑思维能力，是这个课本所要解决的主要问题。

在教学过程中，学生对于某一问题知其然不知其所以然，讲课也能听懂，但一遇到具体问题就束手无策，或冥思苦想，不得要领，或无的放矢，离题万里。成了数学教学中一大难点。

在数学教学过程中，必须启发学生勤于思考、善于思考，发展严密准确的逻辑思维，培养观察、分析、综合、研究、推导、解决问题的能力。要求学生不但知其所以然、还要使学生了解怎样才能知其所以然，这就是说，要求学生学会并掌握解决问题的思考方法，我们学习这本教材必须注意这一点。这个教材在这方面是有独到之处的，对道理与思考路线的来龙去脉，叙述的不厌其详。目的在于方便教师的学习，并使从中得到实际训练的经验。

课本中还配备了相当数量的练习题，一般习题大多是稍费思考就可解决。较困难的一类均列入各章的复习题及总复习题中了。这些习题并不要求全做，但可供同志们参考，并选择部分习题作为巩固知识的练习。

我们这个《参考材料》是根据我们辅导《初等数学复习及研究》（平面几何）而编写的，供师专函授学员使用，为了方便学员学习，我们把各章节习题解答另编成册，供同志们参考。

引　　言

一、几何论证的本源

几何学中有两件经常要做的工作：

一是为了简约文辞而**确立定义**，

二是为了蕃息内容而**推证定理**。

每遇到一个新概念，就要给他订立明确的定义，使人明白所指的是什么。

例如　锐角定义是：小于一个直角的角叫锐角。

这里就牵扯到“小于”“角”“直角”等概念。

也就是说：我们是用已经有过定义的旧概念来定义新概念。

这些旧概念也是又有它自已的定义。

这样回溯下去，当然不能无止境地续继下去，必定有一些人们从客观存在的具体事务中抽象出来的认为是最简单而无需解释的概念，即所谓**原始概念**，然后所有的其余概念才能由这些原始概念引导出来。

当然这些原始概念是越少越好，但也要够用。即所谓**维少维佳，维少维够。**

在几何中，普通选择的基本概念有两种，总称为**元词**。其中：

指单纯的事物的，叫做**元名或基本元素**，有“**点**”，“**直线**”，“**平面**”。

指事物之间单纯关系的，叫做元谊或基本关系，又分为三种：

结合关系　就是“属于”或“在……之上”，

顺序关系　就是“介于”或“在……之间”，

合同关系　就是“相等”或“合同”。

以上所述元词，三个基本元素，三个基本关系，是几何学中的不定义概念。

证明定理，毫无疑问，当然应该每推导一步都要有根据。但这根据的根据又是什么呢？这样一步步往上回溯，与概念一样，也必然有一套基本命题，以它做为逻辑推证的根据，这一套命题是从经验和大量的实践中得来的，是不加证明而直接采用的，构成了一切定理的基础，称之为公理。

这些公理我们后面再详细论述。

选定了基本概念与公理之后，几何学的论证就有了本源。它们相辅相承，组成了所谓“公理体系”。然后，就以它们为论据，按照逻辑推理，一面转求新名（定义），一面寻求余论（定理），洋洋大观，论证严密的几何学就由此而建立起来了。

二、古代几何学简史

几何学与其它科学一样，是在长期的实践过程中发展起来的。

相传古代埃及的尼罗河每年泛滥，两岸田亩地界尽被淹没。大水过后，必须重新勘定地界，在这个过程中，测量土地的方法自然应运而生。据说几何学就是起源于这种“测地术”，“几何学”这个名词，是明朝人徐光启从英文“Geometry”一词译音而来，这个词的原意就含有“测地术”的

意思。

世界上第一部数学书叫做《阿默斯手册》，是公元前1700年，埃及人阿默斯（A hmes）手抄的，里面记载着很多关于面积的测量法和关于金字塔的几何问题，共85个问题，1858年苏格兰人兰德发现。

我国最早的数学书《周髀算经》《九章算术》，所记载的问题，流传极古，可以推到公元前一千多年。河南安阳殷墟出土的文物上，有很多精美的几何图案，可以看出我国古代几何知识在很早就达到很高的水平了。

战国时期的墨翟及稍后的荀卿在他们著作中的论述比之与他们同期的欧几里德，都是各有千秋的。如墨子定义园：“圜，一中同长也”，定义正方形：“方，柱隅四讙也”。就是说园有一个中心，距园周上各点都一样远。正方形各边各角全相等。言简意赅，欧几里德也不过如此。说明我国古代几何学的一般情况。

古代埃及虽然积累了丰富的几何知识，但当时并没有组织成一门系统的科学，后来埃及与希腊通商，希腊很多学者先后到埃及留学，他们把埃及丰富的几何知识传到希腊，并进行了研究与整理，从而在理论和实践两方面为几何学的发展做了光辉的貢献。这些学者中比较有名的有泰勒，他曾发现若干几何定理及几何定理的论证方法。毕达哥拉斯曾独立地发现勾股定理，故至今西方称勾股定理为毕达哥拉斯定理。易卜加首先掌握了“反证法”，写了第一步初等几何教科书，并与柏拉图共同研究了“几何三大问题”。有名的柏拉图首创了分析法，并且首先确立了定义与公理，以做为几何学的基础。后来欧几里德在前人的基础上收集了当时的几

何学材料，经过严密的整理，写成了至今仍在影响着数学，一直被奉为正统的《几何原本》，该书已经有2000多年的历史了，现在初中所学平面几何，仍是以欧几里德几何原本为蓝本编写的。我们前面说的公理体系至今不过几十年的历史，他是由德国大数学家希尔伯特完成，1899年发表的。他的发表使得欧氏几何完备起来了，使欧氏几何的基础不再残缺，这一点我们后面将可看到。

三、欧几里德的《几何原本》

该书最突出的一点是它从一些特别提出的公理，公设和定义出发，有计划地来论证其它命题。再就是欧氏是第一次把丰富而散漫的几何材料整理成系统严明的教科书。欧几里德在距今2300年前所做的这一艰巨工作，对于几何学的流传与传播，起了巨大的作用。他的名字被后人推崇，并成了几何学的代名词。

该书是用七条定义，五个公设，八个公理为基础建立起来的。

定义

1、点无部分（即点是不可分的）。

2、线有长无宽。

3、线的界是点。

4、直线是这样的线，它对于它的任何点来说都是同样地放置着的。

5、面只有长和宽。

6、面的界是线。

7、平面是这样的面，它对于它的任何直线来说都是同样地放置着的。

公设

1、从每一点到另一点可引直线。

2、每一直线都可以无限延长。

3、以任意点为中心可作半径等于任意长的园。

4、凡直角都相等。

5、若两直线与第三直线相交，若其中一侧的两个内角之和小于二直角，则该直线必在这一侧相交。

这就是有名的欧几里德第五公设，称为**平行公设**。

这个公设措词冗长，引用的概念也比较多，应用也较迟，在《几何原本》中，前面28个命题全没有用到这一公设，后来很多数学家研究，为什么欧几里德似乎是有意地延迟这条公设的使用，直到不得不使用时才开始使用。也就是他们考虑是否欧几里德当时并不想把这一条列为公设，而是企图证明，但没有成功，这才把这一条列为公设。于是很多数学家研究这一问题，企图从其它命题逻辑地把第五公设推出来，从欧几里德时代一直到十九世纪末期，这个公设一直是几何学上最流行的问题之一。在2000多年时间里，对第五公设有许多不同的证明方法，但结果均遭到了失败。不是在逻辑上有矛盾，就是需要另外的公设。

虽然证明第五公设没有成功，但这些推证因为没有运用平行公设也推导出了一系列重要的结果，积累了丰富的知识，这就产生了非欧几何。从而使几何学进入了所谓近世几何范畴。

这个近世几何与欧氏几何的不同点就在于完全不用借助于感觉、直观、表象。因而更深刻地反映了现实，理论上达到更完备的程度。

公理

1、等于同量的量相等。

2、等量加等量，其和相等。

3、等量减等量，其差相等。

4、不等量加等量，其和不等。

5、等量的两倍仍相等。

6、等量的一半仍相等。

7、能迭合的量相等。

8、全体大于部分。

欧几里德以这些定义、公设、公理为基础，按照严格地形式逻辑方法推出了全部几何学，这对于2300年前的人来讲，是很巨大的贡献，他的成就至今仍为我们所享用。

但认真研究一下，我们发现欧氏几何有很大缺欠。

首先关于定义，他的七条定义用的方法叫做描述法，这种定义方法，是用普通语言，从若干方面，将所要定义的概念的特征描述出来，使人心领神会。在描述过程中，不可避免地要用一些旧的概念，象欧氏所用的“分”“长”“宽”“界”等，这些概念欧氏并没有给定义，这就形成了用没有定义过的概念去定义新概念，这在逻辑上是讲不通的。也就使得欧氏几何的基础并不是很牢固的。但欧氏所创的描述法，因其易为初学者接受，所以沿用至今，现在对于初学者来讲，还是用描述法，很多不能定义的概念，也用描述法来定义（其实是解释），如“集合”。

再者欧氏的五个公设，八个公理，作为几何学严格的逻辑推理的基本命题，确实过于贫乏了。正因为如此，欧几里德在推证定理时，往往不得不求助于图形的直观性。

下面我们通过两个例子说明欧几里德不得不借助的直观性。

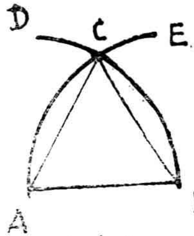
例1　在一已知的有限直线上做一等边三角边（原本第一卷，第一命题）

欧氏是这样证明的：

设A B是已知的有限直线，

在直线A B上求做等边三角形。

以A为中心，A B为距离画一个园BCD；再以B为中心，BA为距离，再画一个园ACE，从这两园的交点C连至点A和B。



（1）

由于点A是园BCD的中心，故AC＝A B；又由于点B是园ACE的中心，故BC＝BA；所以，AC＝BC＝A B，所以三角形ABC是等边的，并且它是在已知的有限直线AB上的，就即为所求。

在这个证明中，我们研究一下就发现有这样的问题：

当两园中的一园通过另一园的中心时，为什么这两个园必有交点？它的逻辑根据是什么？从哪个命题可以导出这个结论？

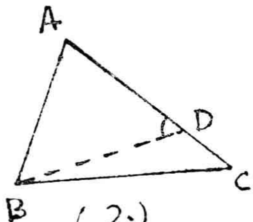
欧几里德是借助图形的直观性，默认了园的连续性，如果园不是连续的，而且点C不存在于两园之上，那么欧几里德的证明就失败了，但这一连续性欧氏在《原本》中根本没有提到，就拿他作为根据。这就说明欧氏是借助于直观和默契。开篇第一命题就有逻辑缺欠。

例2　每个三角形的大边对着的角也大。

（卷1第18命题）

欧几里德的证法和现在中学课本中的证法是一样的。

先在三角形ABC的大边AC上取AD＝AB，连接BD。



(2)

因为∠ADB是△BCD的一个外角，所以∠ADB大于它不相邻的内角∠DCB（这是欧氏已证明过的）。

又因为　∠ADB＝∠ABD

∴　∠ABD也大于∠ACB

∵　∠ABC＞∠ABD

从而　∠ABC大于∠ACB

这里面的问题在于欧几里德是根据BD介于BA与BC之间这一事实，判断出∠ABC大于∠ABD，从而得到∠ABC大于∠ACB的。

但是为什么从点D介于A与C之间的事实（这是从大小线段AC＞AD的定义中得来的），就能获得BD介于BA与BC之间的结果呢？

欧几里德对此不仅没有逻辑上的证明，甚至连“介于”的概念也含糊地隐藏于他的证明之中了。

大家可能说“这是显然的”。问题不在于命题本身是否正确与明显，而在于他的证明是借助于直观，在逻辑推理上是站不住脚的。

下面我们看另一种类型的一个例子。

例3　求证　任意三角形均等腰

证明　做△ABC中∠A的分角线AD和BC的垂直平分线OD，相交于点O，过点O做OE⊥AB，OF⊥AC

则有　　$OE=OF$

∵　　$OB=OC$

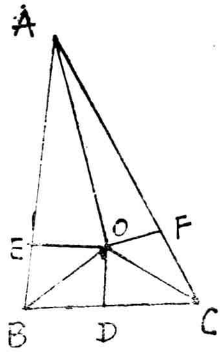
∴　　$Rt\triangle BOE\cong Rt\triangle COF$

∴　　$BE=CF$

又∵　　$AE=AF$

∴　　$AB=AC$

$\triangle ABC$是等腰三角形



(3)

这个证明中逻辑推理一点矛盾也没有，但结论却是错误的，问题在哪里？

问题就在于如果准确地作图，将发现点O不在三角形内部，而在三角形外部。这就充分说明欧几里德几何必须借助于图形的直观性，借助于感觉，这在逻辑上是无论如何解释不通的。

虽然欧几里德几何有以上我们指出的缺欠，但在欧几里德的时代，他的成就是巨大的，也算够严密的了。几何学的奠基工作，其实只是到了十九世纪才完成。我们应该高度评价欧几里得的不朽贡献。

四、希尔伯特公理体系

（一）对公理所提出的要求

我们已经谈到在二千多年来试图证明欧几里德第五公设的尝试中及近二百年来建立非欧几何的过程中，给几何学积累了关于公理本质及公理间相互关系的非常丰富的资料，这些资料经过最近100年来的研究与整理构成近代体系的基础，这种成果由德国大数学家达维德·希尔伯特（1862—1943）写成了一本书《几何基础》。这部书建立了完善的公理体

系，从而使欧几里德几何不再残缺，这就是所谓希尔伯特公理体系。

近代公理法要求在建立几何时要把一些不定义的基本概念先挑选出来，这些概念之间的相互关系则要在一些不加证明而采用的命题——所谓公理中加以确定，而几何中其他所有命题都应根据这些公理以及前面已经证明了的命题来加以证明，而一切新的、比较复杂的概念都应该用基本概念及已经用基本概念下了定义的概念来定义，这里绝不容许訴諸直觉或默契。

为了用这样的办法建立几何学，必须对公理体系的选择提出特殊的要求，也就是必需满足三项要求：

1、和谐性（相容性）

就是说，在所研究的几何体系中的各公理不应相互矛盾，由各公理辗转推出来的一切结果——定理，推论等也不应有丝毫矛盾。

欧几里德的公理体系是完全满足和谐性的要求的，他的各个定理与推论我们并未发现它们有什么矛盾。所以欧氏几何是自成其独立体系的。

2、独立性

要求该体系中公理个数能尽量地少，就是说：在公理体系中不允许出现可根据前面出现的公理所能证明的公理，甚至更广义的讲，不允许能用其余公理证明的公理。

3、完备性

就是在构成几何学中只能按纯粹地逻辑推理方式进行，不得訴諸直觉和默契。

我们已经看到欧几里德的体系是不满足完备性的要求

的。由于他不完备，很难说他满足独立性的要求。

（二）希尔伯特公理体系

希尔伯特在十九世纪末建立的公理体系恰恰满足相容、独立、完备这三项要求。

几何学中所要研究的是三种不同的基本对象，点、直线、平面。希尔伯特把这三个基本对象称为元名，而且不定义它们，把它们之间的一些关系三种五个：

结合关系：点在直线上，点在平面上。

顺序关系：一点介于两点之间。

合同关系：两线段相等，两角相等。

（其中线段、角是从元名中引出的）

叫做元谊，也不定义它们。

我们已经说了，**元名、元谊统称元词。**

就用这些元词定义以后的各种新概念，新关系。还要求这些关系满足下边列举的公理的要求。这些公理分五组二十条。

结合公理：八个

顺序公理：四个

合同公理：五个

平行公理：一个

连续公理：两个

下面我们简单将这些公理列举如下：为了方便起见，我们不画出图形，可参看原著。

结合公理

I_1.通过不同两点的直线必存在。

习惯上，我们把“在……上”说成“通过”。

I_2.通过不同两点的直线至多有一条。

I_3.每条直线上至少有两点。至少存在着三个点，不在一条直线上。

I_4.通过不在同一直线上的三个点的平面必存在。在每一平面上至少有一个点。

I_5.通过不在同一直线上的三点的平面至多有一个。

I_6.若一直线有两个不同点落在某平面上，则该直线全在这平面上。

I_7.若两平面有一个公共点，则它们至少还有另一公共点。

I_8.至少有四点不在同一平面上。

结合公理中的后五个公理主要是空间几何学用的，平面几何中只用前三个公理。公理I_1和I_2的要求也就是欧几里德在他的第一公设里所说的，而其余公理的必要性欧几里德并没有注意到，原因在于，在论证中保留着直观性的人，用不着这样的假定：直线上至少有两点；存在着三个不在同一直线上的点；等等。他们的直观概念使他确信，这是些不成问题的事情。如前所述，这些公理的提出与阐明主要是为了确定事实，为以后的论证准备根据。

顺序公理

II_1.若点B介于点A与点C之间，则A、B、C是一条直线上的三个不同点，且点B也介于点C与点A之间。

II_2.对于任何不同的两点A和B，在直线AB上至少有一点C，使得点B介于点A与点C之间。

这个公理由于可理解为线段可以延长，故称**展延公理**。

II_3.同一直线上任意不同的三点中，至多有一个点介于