

《中学数学教学》专辑

初中数学教学研究

第二辑

(代数第二册)

上海师范大学数学系

在上海市各市区、县教育局教研室（教育学院、进修学校）大力支持下，我组部份同志本着为中学教学服务的宗旨，结合科学研究编辑出版了这一套《初中教学研究》，本册为第二辑（代数第二册）。

考虑到广大教师的实际需要，本书仍包括以下几项内容：

I. 教材说明——分析教材的地位和作用，教材的重点、难点，以便执教老师对教材有一个较为全面的认识，并在此基础上提出教学的目的要求，根据教材特点提出教学建议，供教师参考。

II. 教案选编——这部份教案约请了本市区县有经验老师撰写，有代表性的教案，可供参考。

III. 单元检查参考题——这些题目选用市区重点中学练习、检查期。一般来说，这些题目考查知识面比较全面，同时也考虑了知识与能力两方面的要求，但使用时必须根据各校实际情况，酌情选取。

IV. 教学资料——为了帮助教师更深刻理解教材，适当扩展一些有关知识，这仅供教师参考，不宜向学生讲授。

V. 教学史话——结合本册教材，适当介绍有关史料，丰富教学内容。

参加本册编辑的我组同志有罗肇华（第五章）、余致甫（第六章）、吴文昭（第七章）、张胜坤（第八章）、袁小

明（教学史话），最后由余致甫审读了全部的内容。

本书的校对工作亦由上述同志分章负责。

由于本书是一个集体创作的作品，因此在编写体例上，前后联系上一定会有欠妥之处，另外，由于我们的水平有限，错误、缺点在所难免，请读者不吝指正。

**上海师范大学数学系
中学数学教材教法教研室**

1985. 11.

目 录

第五章	二元一次方程组.....	1—34
	I. 教材说明(1) II. 教案选编(4) III. 单元检查参考题(27) IV. 教学资料(32)	
第六章	整式的乘除.....	35—91
	I. 教材说明(35) II. 教案选编(40) III. 单元检查参考题(77) IV. 教学资料(81)	
第七章	因式分解.....	92—135
	I. 教材说明(92) II. 教案选编(96) III. 单元检查参考题(119) IV. 教学资料(123)	
第八章	分式.....	136—187
	I. 教材说明(136) II. 教案选编(138) III. 单元检查参考题(173) IV. 教学资料(179)	
数学史话		187—193
	线性方程组研究的历史过程(187)	

第五章 二元一次方程组

I. 教材说明

一、教材的地位、作用和结构特点

二元一次方程组是线性方程组中最简单最基本的一种，现行教材将该章内容编排在有理数、整式、一元一次方程和一元一次不等式之后学习，一方面是由于有理数和整式是学习本章的运算基础，而一元一次方程则是学习本章的解法基础；另一方面从一元一次方程发展到二元一次方程组，未知数的个数由一个发展到二个，且方程的个数也由一个增加到二个，充分体现了教材由浅入深，由简单到复杂的特点，符合人们认识事物的客观规律。

本章内容虽然比较简单易学，一般同学不会感到特别困难，但是却是中学数学中的极重要的基础知识，它不仅是今后学习线性函数和解析几何的必要准备，且在其他自然科学也有着广泛的应用，因此必须使同学牢固掌握，切实学好。

本章教材的编排体系是首先介绍二元一次方程和二元一次方程组的概念，接着介绍二元一次方程组的两种解法，最后学习它的应用——列方程组解应用题，这样由概念——解法——应用，脉络清楚，层次分明，与一元一次方程和一元一次不等式的编排完全一致。

二、教学目的

1. 理解二元一次方程解的不定性，二元一次方程解的集

合意义、二元一次方程组的解的意义。

2. 熟练地掌握代入法和加减法解二元一次方程组,并能按实际情况选择较简便的解法。

3. 能按已知条件列出方程组解应用题,并能根据实际问题正确选择符合题意的解。

4. 通过“未知”和“已知”、“多元”与“一元”的矛盾及其转化,达到进行辩证唯物主义思想教育的目的。

三、重点、难点和关键

1. 重点:二元一次方程的解法。

2. 难点:根据题意选择适当的未知数找出等量关系,列出方程组。

3. 关键:①解方程组的关键是消元。不论是代入法或加减法,目的均是为了消元,使之转化为一元一次方程,因此,必须通过实例分析消元的方法。②解应用题的关键是能分析“已知”与“未知”之间的关系,找到两个(或几个)等量的关系,即列出方程组。

四、课时安排

全章教材建议用18课时,具体课时安排如下:

§5.1 二元一次方程	1课时;
§5.2 二元一次方程组	1课时;
§5.3 用代入法解二元一次方程组	2课时;
§5.4 用加减法解二元一次方程组	3课时;
§5.5 三元一次方程组的解法	2课时;
§5.6 应用题	6课时;
复习、测验	3课时。

五、教学建议及注意事项

1. 重视概念教学,本章教材的难点之一是二元一次方程的解的不定性,因为这是与一元一次方程的不同点,学生一开始学习很不易理解和接受,尤其是解的对应性(一对数),因此开始部分务必多举实例使学生真正理解其含义,在此基础上进一步阐明二元一次方程组的解必须是其中每一个二元一次方程解集的公共部份(即交集),正由于二元方程组是两个二元一次方程的组合,故其方程组和解必须用“ $\{$ ”表示,而同学常容易把二元一次方程组的解表示成: $x=a, y=b$,而不善于写成 $\begin{cases} x=a \\ y=b \end{cases}$ 的形式。

2. 学生学习了二元一次方程组的二种解法后,往往分不清在什么情况下采用何种方法,教师可引导同学讨论,在讨论的基础上总结规律。

3. 三元一次方程组的解法虽然不是本章教材的重点,但是该内容的学习必须建立在同学熟练掌握二元一次方程组解法的基础上。通过三元一次方程组的解法的学习,应使同学初步体会到解多元一次方程组的基本思想是消元,其大致步骤

为:三元一次方程组 $\xrightarrow{\text{消元}}$ 二元一次方程组 $\xrightarrow{\text{消元}}$ 一元一次方程。

4. 列方程组解应用题的步骤,应通过实例启发同学自己得出,然后教师可简要小结为:

- ①分析题意,选择未知数(简称“设”);
- ②根据等量关系列出方程组(简称“列”);
- ③解此方程组(简称“解”);
- ④检验解答(简称“答”)。

凡能列二元一次方程组来解的应用题,一般也能列一元

一次方程来解,但列二元一次方程组往往比较容易,这是因为列一元一次方程常需用一个未知数的代数式来表示另一个未知数,且要用一个方程表示题中几个等量关系,综合性强。当然从解法上来看,解一元一次方程却比解二元一次方程组简单,但解应用题的关键在于列方程而不在于解方程。这些道理当然也应通过实例用两种方法来讲,从而分析对比,使同学真正懂得其道理,加深印象。

(本说明由上海县教师进修学校张寿昌提供)

II. 教案选编

(1)

一、课题:二元一次方程。

二、教学目的:

1. 使学生理解二元一次方程与二元一次方程的解的概念。

2. 会求二元一次方程的解,并能验证一对数值是不是二元一次方程的解。

3. 能用二元一次方程中的一个未知数(如 x)的代数式来表示另一个未知数(如 y),并能根据这个关系式,对于给出 x (或 y)的一些值,求出对应的 y (或 x)的值,从而能较迅速地求出方程的一些解。

三、教学过程:

1. 复习提问:

(1) 什么叫做方程? 下列各式哪些是方程?

$$x+2; \quad 3 \times 2 - 1 = 11; \quad 3x+2=9x+4; \quad 3x-y=2;$$

$$x^2=4; \quad 2x-3y+5=0; \quad \frac{1}{x}-3=5; \quad \frac{1}{3}-x=5;$$

$$xy+5=0; \quad x+y=7. \quad (\text{后面八个方程留作后用}).$$

(2) 什么叫做一元一次方程？上面方程中，哪些是一元一次方程？

(3) 什么叫做方程的解？检验 $x = -\frac{1}{3}$ 是不是方程 $3x+2=9x+4$ 的解？

2. 讲授新课：

(1) 课题的引入：提问“已知两个数的和是7，求这两个数”。

①在这个问题里有几个未知数？（答两个）。

②如果一个数为 x ，另一个数为 y ，则可以列出怎样的方程？（答： $x+y=7$ ）。

③观察这个方程有哪些特点？有几个未知数？未知数 x 与 y 各项的次数是几次？从而导出二元一次方程的概念。

(2) 二元一次方程的定义（教师板书）：含有两个未知数，并且含有未知数的项的次数都是1，这样的方程叫做二元一次方程。例如 $x+y=7$ 是一个二元一次方程。

提问：在前面复习提问的八个方程中，还有哪些是二元一次方程？（答： $3x-y=2$ ， $2x-3y-5=0$ ）。

(3) 二元一次方程的解：

先让学生回忆方程的解的意义，然后提出什么叫做二元一次方程的解，如何求出二元一次方程的解等问题。并请学生思考：方程 $x+y=7$ 的解是什么？若学生能直接观察出一

个解,如 $x=3, y=4$.再提问是否还有其他一对 x 与 y 的值能适合这个方程?(让学生踊跃发言,说出其他的解,同时教师把这些解逐个写出在黑板上,指出黑板上每一对未知数的值都是方程 $x+y=7$ 的解)。

①适合(或满足)一个二元一次方程的每一对未知数的值都叫做这个二元一次方程的解。

方程 $x+y=7$ 的每一个解可分别记作:

$$\begin{cases} x=3 \\ y=4; \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=5; \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=6; \end{cases} \quad \dots$$

②验证一对数值是不是二元一次方程的解:

例: 在 $\begin{cases} x=-3.8 \\ y=10.8; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2\frac{3}{4} \\ y=-4\frac{1}{4}; \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=7. \end{cases}$

三对数值中,哪一对是方程 $x+y=7$ 的解?

练习:口答课本第二页练习第二题。

③让学生分别说出方程 $3x-y=2$ 和 $2x-3y+5=0$ 的几个解,当学生感到求解的速度较慢时,此时可以指出为了求解方便,可以把方程变形,用含有一个未知数的代数式来表示另一个未知数。

例如:将 $x+y=7$ 变形为 $y=7-x$ 或 $x=7-y$ 。提问:
 $3x-y=2$ 可变形为 $y=?$ 或 $x=?$ $2x-3y+5=0$ 可变形为
 $y=?$ 或 $x=?$

练习:课本第三页的练习第三题:在下列方程中,用含 x 的代数式表示 y : (1) $2x+y=3$; (2) $3x-y=2$; (3) $x+3y=0$; (4) $2x-3y+5=0$ 。

指出：掌握了这种方程变形的技能，对于任何一个二元一次方程，让其中一个未知数取任意一个值，就可以比较迅速地求出与它对应的另一个未知数的值，使之组合在一起，就成为方程的一个解。

④从上述两个方程： $3x - y = 2$ ， $2x - 3y + 5 = 0$ 变形的关系式，用列表法分别使 x （或 y ）取一些值，求出与它对应的 y （或 x ）的一些值，从而看到，任何一个二元一次方程都有无数个解。所以说二元一次方程的解有不定性。

由二元一次方程的所有解组成的集合，叫做这个二元一次方程的解集。

如果时间许可，再练习课本第三页的第四题：在方程 $3x + 2y = 12$ 中，设 $x = 2, 3, 4, 5$ ，分别求出对应 y 的值。否则留做作业。

3. 课堂巩固小结：

(1) 二元一次方程与二元一次方程的解的概念。

(2) 任何一个二元一次方程都有无数个解（解的不定性）。

(3) 为了便于求解方程，应当熟练地将方程变形，用一个未知数表示另一个未知数。

4. 作业：

课本第21页习题一的第一、二题。

（本教案由上海七宝中学韩长林、蒋志刚提供）

(2)

一、课题：代入消元法解二元一次方程组（一）

二、教学目的：

1. 要求学生正确理解和掌握代入消元法的基本思想、解题方法和步骤。

2. 讲述代入消元法解二元一次方程组，其关键是“消元”，变“二元”为“一元”，从而实现由“未知”到“已知”的转化，使学生熟悉辩证唯物主义的思想方法。

三、教学过程：

1. 复习：

(1) 什么样的方程组叫二元一次方程组？

(2) 什么叫二元一次方程组的解？

(3) 判别下列三对数是否是方程组

$$\begin{cases} y = 2x & \text{①} \\ x + y = 3 & \text{②} \end{cases} \text{ 的解.}$$

$$(i) \begin{cases} x = 2, \\ y = 4; \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} x = 4 \\ y = -1; \end{cases} \quad (iii) \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

2. 新课：

(1) 对于一个方程组，例如上面的 $\begin{cases} y = 2x & \text{①} \\ x + y = 3 & \text{②} \end{cases}$ 怎样去求出它的解来呢？

如果我们先求出①的解，再求出②的解，最后找出①、②的公共解，那显然是很繁琐的。因为①、②的解各有无数个。

例如： $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4, \end{cases} \begin{cases} x = -1 \\ y = -2, \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \dots$ 都是①的解，

$\begin{cases} x = 4 \\ y = -1, \end{cases} \begin{cases} x = -5 \\ y = 8, \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y = 3, \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \dots$ 都是②的解。而从这两组

无数个解中再寻求其公共解，不但繁琐，而且很困难。为此，我们要寻找新的解法。

(2) 再看刚才的方程组:
$$\begin{cases} y = 2x, & \text{①} \\ x + y = 3. & \text{②} \end{cases}$$

分析: 求其解, 即求①、②的公共解。所谓公共解, 就是两个方程中同一个未知数就应取相同的值。于是方程②中的 y 可用方程①中表示 y 的关于 x 的代数式 $2x$ 来代替。

解: 把①代入②得: $x + 2x = 3$. ③

这样由①、②两个方程, 我们得到了方程③, 由于②中的 y 已经被 $2x$ 所替换了, 所以③中只含有未知数 x , 它是一个关于 x 的一元一次方程。解之, 得: $x = 1$ 。

这样我们得到了一个未知数 (这里是“ x ”) 的值。而要求另一个未知数 (y) 的值, 只要——

将 $x = 1$ 代入方程①或②得到: $y = 2$. $\therefore \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$

经过检验可以知道, $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ 是原方程组的解。

(3) 在上面的例子里, 我们用代入的方法, 从两个二元一次方程里, 消去一个未知数, 得出一个含有另一个未知数的一元一次方程, 从而求得方程组的解。这种解方程组的方法叫代入消元法, 简称代入法。

附注: 在上述解题过程中的检验不必写出。

(4) 几个例子。

例 1 解方程组
$$\begin{cases} 3x - 6y = 4, & \text{①} \\ x = 6 - 5y. & \text{②} \end{cases}$$

分析: 本题方程②的左式为 x , 右式为含有 y 的代数式 $(6 - 5y)$, 所以我们可将②代入①, 通过消去 x 求解。

解: 将②代入①得

$$3 \cdot (6 - 5y) - 6y = 4, \therefore y = \frac{2}{3}.$$

将 $y = \frac{2}{3}$ 代入②, 得 $x = 6 - 5 \cdot \frac{2}{3} = 2\frac{2}{3}$.

$$\therefore \begin{cases} x = 2\frac{2}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases} \text{ 是原方程组的解.}$$

例2 解方程组 $\begin{cases} 2x + 5y = -21, & \text{①} \\ x + 3y = 8. & \text{②} \end{cases}$

分析: 本题中, 方程②中 x 的系数是 1, 所以可先把方程②变形, 用含 y 的代数式表示 x , 然后再求解.

解: 由②得 $x = 8 - 3y$. ③

把③代入①, 得, $2 \cdot (8 - 3y) + 5y = -21$.

$$\therefore y = 37.$$

把 $y = 37$ 代入③, 得 $x = -103$.

$$\therefore \begin{cases} x = -103 \\ y = 37 \end{cases} \text{ 是原方程组的解.}$$

3. 小结: 用代入消元法解二元一次方程组的方法、步骤一般是

(1) 将方程组中的一个方程变形, 用含有一个未知数的代数式表示另一个未知数;

(2) 消元. 将 (1) 中变形后的方程代入方程组中的另一个方程, 从而消去一个未知数, 得到一个关于另一个未知数的一元一次方程, 解此一元一次方程;

(3) 将 (2) 中求得的一个未知数的值, 反代入 (1) 中的代

数式，求得另一个未知数的值，从而得到方程组的解；

(4) 将解代入原方程组检验。(此步可不必写出)。

4. 练习：第 11 页练习 1. (1)、(2)；2. (1)、(2)。

5. 作业：第 22 页 习题一 4(1)、(2)、(3)、(4)。

注：代入法可用两节课时完成，这里是第一课时的教案。

(本教案由上海七宝中学裴钟怡提供)

(3)

一、课题：加减法解二元一次方程组。

二、教学目的：使学生掌握用加减消元解二元一次方程组的方法，并能应用解题。

三、教学过程：

1. 复习：用代入法解下列二元一次方程组

$$(1) \begin{cases} x+y=5, \\ 2x-y=4; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 3x+7y=-20, \\ 3x-5y=16. \end{cases}$$

并指出：

①解题方法探求的原则是消元，使其变为已经掌握解法的一元一次方程，先求出一个未知数的值，然后再求另一个未知数的值。

②消元法的具体方法是将其中的一个方程变为用内含有一个未知数(如 x)的代数式表示另一个未知数(如 y)，再代入另一个方程，就可得到一个一元一法方程(即消元)，变其中的哪一个方程以变化方法简易为原则而灵活掌握。

2. 新课：用加减法解二元一次方程组。

例 1 解下列二元一次方程组：

$$(1) \begin{cases} x+y=5, \\ 2x-y=4; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 3x+7y=-20, \\ 3x-5y=16. \end{cases}$$

除上述用代入消元法外，让学生观察并比较每一方程组中未知数系数的特点，得出这两题可达到消元的方法尚有：第(1)题可采用两式相加就消去 y 得出一个关于 x 的一元一次方程；第(2)题可采用两式相减就消去 x 得出一个关于 y 的一元一次方程，这时就分别求出一个未知数的值，再分别求出另一个未知数的值而得出方程组的解。这种将方程组的两个方程组相加或相减达到消元的方法称为加减消元法，简称加减法。

例2 解方程组
$$\begin{cases} 9u+2v=15, \\ 3u+4v=10. \end{cases}$$

这个方程组由于某一个未知数的系数的绝对值不相同，不能象例1可直接相加或相减而消去一个未知数，经过分析比较，只要将第一个方程分别乘以2再与第二个方程相减就可消元，得出一个一元一次方程，从而得到解法。（也可第2个方程分别乘以3与第一个方程相减消去未知数 u ）。

例3 解方程组
$$\begin{cases} 3x+4y=16, \\ 5x-6y=33. \end{cases}$$

此题经过分析比较，仅与例2不同的是两个方程分别乘以某一个数，变为某一个未知数的绝对值相同，再用加减法解题。

3. 小结：用加减法解二元一次方程组的规律。

(1) 方程组的两个方程中某一个未知数系数的绝对值相同直接用加减法。如果未知数的系数的绝对值都不相同，则把方程组中的一个或两个方程分别乘一个适当的数，使其中

的某一个未知数的系数的绝对值相等，再用加减法解方程组。

(2) 某一个未知数的系数的绝对值相等后，如果其系数的符号相同则采用“减法”；如果其系数的符号相反则采用“加法”，即可达到消元后得出一个一元一次方程。

(3) 先求出一个未知数后，再求出另一个未知数的规律是，将已求出的一个未知数的值代入原方程组中计算较简易的一个方程中去。

4. 巩固练习：

(1) 口答方法：第 14 页：1, 2, 5, 6.

(2) 笔练：第 14 页：3, 7, 8.

5. 作业：第 18 页。5.

(本教案由上海七宝中学倪庆方提供)

(4)

一、课题：三元一次方程组的解法举例。

二、教学目的：

1. 使学生理解三元一次方程组的含义。

2. 使学生掌握三元一次方程组的基本解法。

三、教学过程：

1. 复习提题：

(1) 什么叫二元一次方程？举例说明之。

(2) 什么叫二元一次方程的一个解？什么叫二元一次方程的解集？

(3) 什么叫方程组的解？如何解二元一次方程组？

2. 讲授新课：