開明青年叢書

軌跡

許莼舫 著

開明青年叢書

軌　　跡

許藴舫著

開明書店

作者的話

一般同學在學習平面幾何學的時候，或多或少總存在着一些困難．研究到它的原因，主要是以下的四點：(1)對於基本觀念瞭解得不夠清楚．(2)依照理論系統編排的教科書，不易兼顧到歸納類化，因而使初學者難於掌握解題的方法．(3)教科書中的例題太少，引導和啓示得不夠，難收觀摩之效．(4)只知死記定理和法則，不會把它們靈活運用．作者因爲有這樣的感覺，才編了這套小書．這套書分‘幾何定理和證題’‘幾何作圖’‘軌跡’和‘幾何計算’四册．內容主要是幫助同學們瞭解教科書中的材料，指導同學們運用定理和法則，掌握解題的正確方法；同時又兼顧到提高．所以，本書是和教科書相輔爲用的，也可以說是補助教科書的不足的．

在平面幾何學中的軌跡部分，原是進修高等數學的重要基礎，但是一般教科書都敍述得很簡略，同時又規定要分兩方面證明，因而同學們對它最感困難．

本書第一章，以充裕的篇幅，對學習軌跡應有的基本知識作詳細的講解．關於軌跡要怎樣去探求，怎樣去證明，都經反覆指導，使讀者在實際解題時不致有茫無頭緒之感．

第二章用具體的實例，分別引出七條基本軌跡定理，再應用它們來解決大多數的軌跡問題．這樣非但免除了兩面證的

麻煩，還可以使解答易於被發見.

另外有幾個重要的軌跡題，也是在解別的軌跡題時需要用來作根據的. 一般教科書裏雖都特別提出，但說明都比較繁複，所以本書在第二章裏另用淺顯易明的方法加以解答，並示應用的例子.

最後，因爲軌跡和作圖是聯系很多的，所以在第四章裏又舉些應用軌跡的作圖例題，以補'幾何作圖'一書的不足.

本書第二、三兩章的研究題，是分列在有關的軌跡定理之後的. 就教科書說，這種編排方法不很妥當；因爲在沒有決定軌跡種類以前，是無法知道這問題屬於哪一類的. 但本書爲了幫助初學，照這樣編排，無異是提示了這一問題該屬哪一條基本定理，使讀者在研究時候獲得便利，將來要解決教科書裏的雜題，自然可以事半功倍了.

本書在編寫時雖經仔細斟酌，但錯誤之處還恐難免，希望讀者予以批評和指正.

許莼舫 一九五二年一月

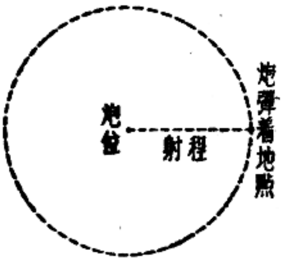
目　次

一 基本知識

怎樣叫做軌跡

我們爲了要保衛祖國安全,保衛世界和平,必須要加強國防建設. 關於鞏固國防的利器,像大炮、飛機之類,同學們一定都有一些初步的認識. 這裏先拿大炮做例子,來說明數學上的一件重要事實:

假定用一尊大炮來作一次射擊演習,把這大炮固定在炮位上,使它能繞炮位自由旋轉,然後以一定的射程向各方發射. 這時你可以看到,炮彈着地的各點剛正排列成一個圓形;這圓的中心就是炮位,半徑就是射程,像右圖. 假使炮彈着地的各點非常密集,你就看不到任何一點,而只見一整個的圓周——簡稱圓,就是一條封閉的曲線. 這樣永遠地向各方發射,炮彈着地的點永遠是在這一條曲線上,決不會到曲線的外面去.

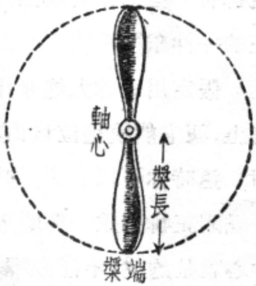


在上舉的例子中,因爲炮彈着地的各點必須和一個定點(就是炮位)有一定的距離(就是射程),所以集合而成這樣的一個圓. '和一個定點有一定的距離'是一個條件,凡是在這

圓上的點都適合這條件，而不在這圓上的點都不適合這條件．這圓是許多適合同一條件的點集合而成的，好像玩具火車的環形軌道一樣；也就是這樣的許多點停留着的痕跡，所以稱做是‘適合指定條件的點的軌跡’．

接着再用飛機做例子，來說明軌跡的另外一個意義：

飛機的推進器，是用兩片或多於兩片的螺旋槳裝在轉動軸上而成．當機器發動，推進器開始旋轉的時候，我們看見任何一片螺旋槳的外端，在圍繞着軸心作圓周的運動．這樣運動所經的圓周，是拿軸心做中心，槳長做半徑的．因爲槳端和軸心的距離——等於槳長，是一定不變的，所以槳端在運動中的各位置，決不越出這圓的曲線以外．這圓是一點依照指定的條件而運動所行的軌道，也就是一點在這樣運動時足跡所經的路線，所以稱做是‘運動點的軌跡’．



把上述軌跡的兩種意義比較一下：後者所說的雖然只有一點，但這一點是動的，當它動到另外的位置，就產生第二點、第三點等，而這些點的性質，當然也都適合指定條件．又因這點不會動到一定的路線以外，所以線外的點就不會適合指定條件．可見這樣的說法和前者好算是一樣的．

可是，就基本上說，前者是用靜止觀點來解釋的，後者是

用運動觀點來解釋的,兩者顯着很大的區別. 我們在研究自然科學時,如果只顧到靜止的狀態而不見運動,往往會犯下錯誤. 過去有些研究自然科學的人,只顧到個別事物而不見它們的聯系;只顧到事物的存在而不見它們的產生和滅亡;只顧到靜止而不見運動,因此只能供給一些片斷的、枯燥無味的死知識,對於自然的發生,以及發展變化的過程,幾乎全部忽略. 因而他們對各種自然現象的解釋,往往和眞理不符. 我們現在處於偉大的毛澤東時代,必須掌握馬列主義的思想武器,準備用唯物辯證法去改造自然科學,建設新的中國,一定先要把運動觀點樹立起來. 因此,我們對於軌跡的意義,應該捨棄前面的一種解釋,而取法於後面的一種才是.

利用運動觀點來解釋'一個動點和一個定點保持一定的距離而運動,它的軌跡是一個圓',其實是再簡單也沒有的. 同學們在用兩脚規畫一個圓(或工匠用剪刀畫圓)的時候,曾經注意到這一件事實嗎? 兩脚規的一隻脚是一個針頭,在紙上釘着的一點就是一個定點,另一脚上所附鉛筆的尖端就是一個動點,兩脚作適當的張開,就是使二點間保持一定的距離,筆尖在紙上畫成的一個圓,就是這一個動點運動一周所經的路線,也就是這動點的軌跡. 這原是在學習幾何時常見的事實,不過同學們一般都不很注意罷了.

上面爲便利起見,只舉了一個軌跡是圓的例子. 實際我們如果把指定的條件改變,那末軌跡的形狀可能也跟着改變.

普通在初等數學裏面所討論的軌跡,除掉圓以外,有的是直線——兩端都無限,有的是線段——兩端都有限,有的是射線——一端有限,另一端無限,有的是圓弧. 在每一指定條件下的點,它的軌跡有時還不止一條線. 關於這許多不同的情況,我們為了敍述的方便,這裏暫且不講,同學們讀到下面的幾節,自然會完全明瞭.

軌跡題的三種類型

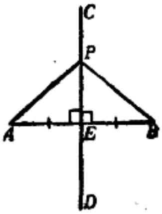
同學們已經學過了幾何定理和證明題,一定都知道每一條定理或證明題總可分做'假設'和'終結'兩部分. 假設是圖形中已知的性質,終結是要我們證明的其他性質,可說只有這樣的一種類型. 再就作圖題來說,也包含兩個部分,一是告訴我們已知的條件,一是吩咐我們要作怎樣的圖形,千題一律,找不到另外的一種類型. 現在我們要研究軌跡題了,軌跡題是不是也只有一種類型呢? 這卻和前面的完全不同,它的類型可以分做三種. 要知道詳細,必須先明瞭軌跡題的內容,究竟有哪幾個部分?

諸位讀過了上面的一節,已經知道軌跡是一點在指定條件下運動所經的路線. 所謂指定條件,像'和一個定點有一定的距離'等類,是最關緊要的. 因為這動點必須要有條件去限制它,才能作有規則的運動,從而產生軌跡;假使不受條件限制,這動點可以隨便亂動,就無所謂路線,結果不會有什麼軌

跡. 可見這指定條件,是軌跡題中決不可少的一個重要部分. 有了指定條件以後,相應地就可以決定軌跡的形狀;有的軌跡是圓,有的軌跡是直線,這各種不同的形狀,當然也是軌跡題中的重要部分. 假定我們在某一問題中,單說軌跡是圓,或是一直線,這種說法不夠具體. 因爲形狀雖都是圓,但中心的位置各有不同,半徑的長短也可能兩樣;同是直線,就位置說,有的是平行於一已知直線的,有的是垂直平分一已知直線的,就長短說,有的是無限的,有的是有限的. 所以我們單說軌跡是什麼形狀,還覺得不夠,應該要連位置和長短一齊說出來,這才可以具體地畫成圖形.

綜合上述各點,知道軌跡題的內容,包含三個重要部分:第一是指定的條件,第二是軌跡的形狀,第三是軌跡的位置和長短.

軌跡題的內容,我們已經把它分析得很清楚了,但是題目的外表不一定和內容完全一樣. 關於指定條件,是每一個軌跡題都須詳細敍明,可說是顯露在外表的;至於其他兩個部分,有的只發表形狀,有的是全不發表,因而形成軌跡題的三種不同的類型. 要敍明這三種類型,無妨先舉出它們的典型例子:



(1) 一動點 (P) 距一條定線段 (AB) 的兩端等遠,它的軌跡是一直線 (CD),這直線就是定線段的垂直平分線.

在這一道題中，'距一條定線段的兩端等遠'就是指定條件，'一直線'就是軌跡的形狀，'定線段的垂直平分線'就是說明了它的位置必須通過定線段的中點，且和定線段垂直，長度是無限的。這樣已經把指定的條件，軌跡的形狀，以及軌跡的位置和長短完全發表出來。要解決這一道題，只須根據幾何定理，給它一個證明，就可以了事，要算是最容易的。

(2) 一動點距一條定線段的兩端等遠，它的軌跡是一直線。

這樣只發表了條件和形狀，究竟這軌跡是在什麼地方？長短怎樣？還隱藏在題目裏面。這種題目的解決辦法，不像前面的那樣簡單，必須先要探求出這直線的位置和長短，然後再加以證明。

(3) 一動點距一條定線段的兩端等遠，求這動點的軌跡。

用這一個方式來提問題，它只說出了指定的條件，其餘的全部隱藏起來，要我們一樣一樣去摸索。先探求這軌跡的形狀，再探求這軌跡的位置和長短，最後才能把它證明。同前面的比較起來，這是最難解決的。

從上面的三個例子，我們把軌跡題分成如下的三種類型：

［第一類型］ 有條件，有形狀，又有位置和長短。

［第二類型］ 有條件，有形狀，但沒有位置和長短。

［第三類型］ 有條件，但沒有形狀，更沒有位置和長短。

在這三種不同的類型中，我們可以看出，第一類型有假設，又有完全的終結，可以稱做**軌跡定理**，只要給它證明一下就得；第二類型雖也有假設，但終結不完全，第三類型只有假設，沒有終結，都是**求軌跡題**，先要把這軌跡探求出來，然後才可以把它證明． 我們從下一節起，依次講述軌跡的證明和探求的方法．

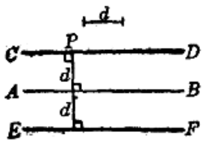
軌跡題要兩面證

上節講過幾何定理和作圖題都只有一種類型,軌跡題卻有三種類型,這是第一種區別. 現在再說到每一定理或作圖題都只要證明一次,但每一軌跡題卻要連證兩次,這是第二種區別. 普通證明一個軌跡題,必先證順的一方面是眞確的,接着再證逆的一方面也是眞確的,這樣才可以認爲切實可靠. 這必須要證明的兩方面,可以寫成如下的一般形式:

(*a*) 順的方面 凡在這線* 上的點,都能適合指定條件.

(*b*) 逆的方面 凡能適合指定條件的點,都在這線上.

那末爲什麽要大費周折,一證再證呢? 這裏當然要說出一個道理來.

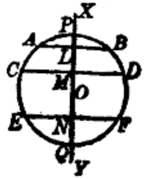


譬如有一個軌跡題: '一動點 (P) 和一條定直線 (AB) 保持一定的距離 (d) 而運動,求這動點的軌跡.' 我們探求到一條 CD 直線,它是平行於 AB,且和 AB 的距離等於 d 的,從'二平行線處處等距離'的定理,可證'凡在 CD 上的點,都和 AB 有一定的距離 d',就說所求的軌跡是一直線 CD,這就犯下了錯誤. 因爲除 CD 外,還有另一平行線 EF 也是所求的軌跡,已被忽略過去了.

可見證一道軌跡題,如果單證 (*a*) 而不證 (*b*),就只注意到這線上的點能適合指定條件,沒考慮到能適合指定條件的點也許不全在這線上,結果使求到的軌跡有不充足的弊病.

---

* 所謂'這線',有時是一條線,有時是幾條線,有時是無限長的線,有時是有限長的線.



又如有一軌跡題：'一動弦* 在定圓內平行移動，求它的中點的軌跡.' 我們假定這動弦在運動中的一個位置是 AB，中點是 L，從定理'通過圓的中心和弦的中點的線，必垂直於弦'，可證'動弦 AB 的中點 L，常在過中心 O 而垂直於這弦的 XY 線上'，於是說所求的軌跡是一直線 XY，無意間也造成了錯誤. 因爲這動弦常在圓內，它的中點決不會運動到圓外去，所以除 PQ 線段上的點能適合指定條件外，其餘在 PX 和 QY 上的點，都是不適合條件的. 因此，所求的軌跡只能說是線段 PQ，而不能說是一直線 XY.

可見單證 (b) 而不證 (a)，就只注意到適合條件的點在線上，沒考慮到線上的點也許不完全能適合條件，結果使求到的軌跡中存在着不必要的部分.

綜上所述，知道證軌跡題若單顧一面，會使求到的軌跡發生太少或太多的弊病. 不證 (a) 就可能得不必要的軌跡，不證 (b) 就可能得不充足的軌跡，因而我們可以稱 (a)'在線上的點合條件'是軌跡的必要性，(b)'合條件的點在線上'是軌跡的充足性.

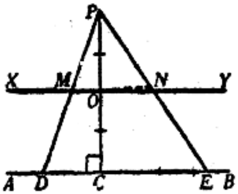
再說得明白一些，必要性的意思是線上各點必須有同一性質——就是適合同一條件，找不出任何一點例外；通俗地講，每一題中的軌跡，必須具備'清一色'的性格. 充足性的意思是線上各點的性質必須和線外各點的性質不同；通俗地講，每一題中的軌跡，必須具備'只此一家，別無分出'的性格. 必

* 通常所說的動弦，不但位置在變動，它的長短也是變動的. 至於它的中點，能跟着它運動，當然是一個動點.

要性和充足性應該同時證明，結果才算切實可靠.

爲了要使同學們在實際證題時便於模仿起見，下面舉一個具體的例子：

［範例 1］　一動線段，一端固定在一點 P，另一端沿定直線 AB 而運動，那末它的中點的軌跡是一直線，這直線是 AB 的平行線，且距 P 和 AB 等遠.



假設： 定點 P 和定直線 AB，$PC \perp AB$，O 是 PC 的中點，過 O 作 $XY \parallel AB$.

求證： 一端是 P 而另一端在 AB 上的動線段的中點的軌跡是 XY.

［思考］ 要證 XY 是這動點的軌跡，第 (I) 步必須先證它的必要性，就是證'凡在 XY 上的點都可以做題設線段的中點'. 第 (II) 步要證它的充足性，就是證'凡題設線段的中點都在 XY 上'.

證 (I) 在 XY 上任取一點 M，聯 PM，延長交 AB 於 D.

因爲 $PO=OC$，$MO \parallel DC$，所以 $PM=MD$（過 △ 一邊中點而 $\parallel$ 另一邊的線，必平分第三邊)，就是 M 做 PD 的中點.

(II) 從 P 到 AB 上作任意直線 PE，取 PE 的中點 N，聯 ON.

因爲 $PO=OC$，$PN=NE$，所以 $ON \parallel CE$（△ 二邊中點的聯線 $\parallel$ 第三邊）.

但 $XY \parallel AB$，所以 ON 合於 XY（過 AB 線外的同一點 O，只能作 AB 的一條平行線)，就是 PE 的中點 N 在 XY 上.

總結　從證明 (I)，知道凡在 XY 上的點都適合指定條件，從證明 (II)，知道凡適合指定條件的點都在 XY 上，所以這動點的軌跡是 XY.

注意一　上舉的'思考'一項，不過是表明證題前應有這一個思索的過程，留給同學們作參考的；在實際證題時當然不必明白寫出.

注意二　一個軌跡題既分兩方面證明,最後還要作一個總結,說明所求的軌跡確實是題中所說的某線.

注意三　證軌跡題時,不必像初學幾何定理那樣,拘泥於刻板的形式. 不很重要的或顯而易見的理由,也可以酌量省略.

兩面證的變通

我們認識了軌跡的必要性和充足性以後,進一步來把這兩種特性的本質和相互間的關係考察一下:

(*a*) 必要性　凡在這線上的點,都能適合指定條件.

(*b*) 充足性　凡能適合指定條件的點,都在這線上.

在這兩個敍述中,每一敍述都可分做兩半段,(*a*) 的上半段'假使一點是在這線上'是一個假設,下半段'那末這點是適合指定條件的'是一個終結,可見這一個敍述可以算作一條定理. 還有 (*b*) 的上半段'假使一點是適合指定條件的'是假設,下半段'那末這點是在這線上'是終結,也可以算作一條定理. (*b*) 的假設和終結剛正是從 (*a*) 逆轉而成的.

諸位還記得在學習幾何定理和證題的時候,我們說過定理可以從一變四嗎? 這軌跡的必要性和充足性既然可以認作兩條定理,而且它們的假設和終結又剛巧是逆轉來的,不是互相成爲'逆定理'嗎? 大家都知道,原定理眞確時,它的逆定理不一定會跟着眞確的*,無怪這兩者必須分別證明,缺一不

---

* 照理,不眞確的命題不能叫做定理,如果一條定理逆轉之後並不眞確,應該稱做逆命題,但因一般書中爲免分歧,都假稱做逆定理,所以本書也沿用舊名,而在這裏說明一下.

可了.

每一定理除掉可以變得一逆定理外，如果把‘是這樣’和‘不是這樣’對調過來，又可得一‘對定理’，如果旣逆轉而又對調，所得的是‘逆對定理’. 我們無妨再照這樣變化一下，得下列的兩條定理:

(a') 凡不適合指定條件的點，都不在這線上.

(b') 凡不在這線上的點，都不適合指定條件.

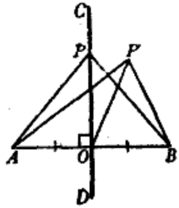
其中 (a') 和 (a) 互成逆對定理，原定理和逆對定理的關係你還記得嗎? 它們要眞確就全眞確，要不眞確就全不眞確，因而 (a') 和 (a) 可說是步調一致的. 從 (a) 旣可判定軌跡的必要性，從 (a') 就同樣可以來判定. 可見我們在證軌跡的必要性時，不證 (a) 而換證它的逆對定理 (a')，也未嘗不可.

再，(b') 原是 (a) 的對定理，但 (b') 和 (b) 也互成逆對定理，兩者也取一致的步調. 從 (b) 旣可判定軌跡的充足性，那末從 (b') 也未嘗不可以判定. 我們要證軌跡的充足性，證 (b) 或證 (b') 總是一樣的.

綜上兩點，知道要證一軌跡題，雖然必須分兩面證，但不必拘泥於上節所講的 (a) 和 (b)，我們儘可便宜行事，任意變通，證必要性時，在 (a) 和 (a') 兩者中任證一種；證充足性時，在 (b) 和 (b') 兩者中任證一種就是.

[範例 2] 一動點距一條定線段的兩端等遠，它的軌跡是一直線，這直線就是定線段的垂直平分線.

假設: 定線段 AB, 過 AB 的中點 O 作垂線 CD.



求證: 距 AB 等遠的點的軌跡是直線 CD.

[思考] 要證這動點的軌跡是 CD, 第 (I) 步證 (a) 的必要性,就是證'在 CD 上的點距 A、B 等遠', 第 (II) 步證 (b') 的充足性,就是證'不在 CD 上的點距 A、B 不等遠'.

證 (I) 在 CD 上任取一點 P, 聯 PA、PB.

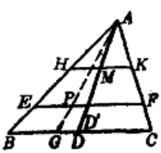
在 $\triangle POA$、$\triangle POB$ 中, $AO=OB$, $\angle POA=\angle POB=90°$, $PO=PO$, 所以 $\triangle POA \cong \triangle POB$ (s. a. s.=s. a. s.), $PA=PB$.

(II) 在 CD 外任取一點 P', 聯 $P'A$、$P'B$、$P'O$.

因爲 $P'O$ 不是 AB 的垂線(過 AB 上的一點 O 只能作 AB 的一條垂線),所以 $\angle P'OA \neq \angle P'OB$. 又因 $AO=OB$, $P'O=P'O$, 所以 $P'A \neq P'B$ (兩 △ 的兩組邊相等,若夾角不等,則第三邊也不等).

總結 從 (I) 知 CD 上的點合條件, 從 (II) 知不在 CD 上的點不合條件, 所以 CD 是這動點的軌跡.

[範例 3] 一動線段平行於 $\triangle ABC$ 的一邊 BC, 在這三角形內移動,它的中點的軌跡是一直線,這直線就是 BC 上的中線.



假設: AD 是 $\triangle ABC$ 的中線.

求證: 平行於 BC 而在 $\triangle ABC$ 內的線段,它的中點的軌跡是 AD.

[思考] 先依 (a') 證 AD 的必要性,就是證'不是這些線段的中點不在中線 AD 上', 再依 (b) 證 AD 的充足性,就是證'是這些線段的中點,必在中線 AD 上'.

證 (I) 在 $\triangle ABC$ 內作任意線段 $EF \parallel BC$, 交 AB、AC 於 E、F. 在 EF 上