

对于等位导体的充电法理论

作 者 A·C·СЕМЕНОВ

译 者 孙 润 臣

校 对 林 振 民

地质部地球物理深矿研究所

1957

对于等位导体的充电法理论

A. C. 西门诺夫

1. 球形导体

我们研究的是标准导电球体，该球体位于均匀的，各向同性的，无限的或半无限介质中，其电阻率为 ρ ，电位和导数可用下列已知公式表示：

$$u = \frac{\rho i}{4\pi} \cdot \frac{1}{r} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\rho i}{4\pi} \cdot \frac{x}{r^3}; \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\rho i}{4\pi} \cdot \frac{z}{r^3} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中 i ——为通过球体的电流， r ——为观测点与球体中心间的距离，它等于 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ； x 、 y 、 z ——为观测点的坐标（相对于球体的中心点）。

平坦地面的影响可用球体镜像替换的方法做近似计算。假设地面与 xy 面平行，则得：

$$u = \frac{\rho i}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (1')$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\rho i x}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_2^3} \right); \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\rho i}{4\pi} \left(\frac{z}{r_1^3} - \frac{2z_0 - z}{r_2^3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2')$$

式中 z_0 ——为矿体中心距地面的深度， r_1 和 r_2 ——为观测点与实际球体中心及球体镜像的中心间的距离。

观测经常是在地面上进行的，这时可将式(1')和(2')稍微简化一下，则成下列形式

$$u = \frac{\rho i}{2\pi} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\rho i}{2\pi} \cdot \frac{x}{r^3} \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2'')$$

必须注意，矿体的位置越深，则对地表值的近似计算就越准确。

根据列出的公式可计算对于 $z_0 = 1$ ， $\rho = 1$ 和 $i = 1$ 并通过震中*的剖面上的电位值和梯度值，计算的结果列在表 1 中并表示于图 1 和图 2 中。

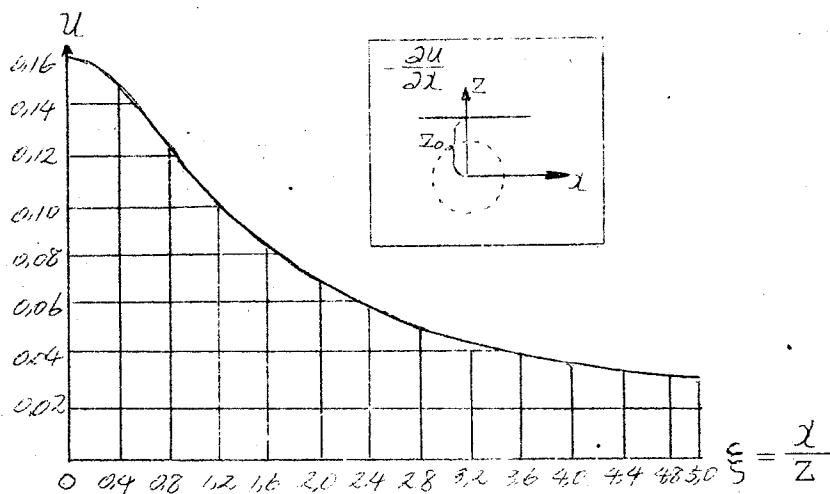


图 1 充电球体的电位曲线

和图 2 中。电位曲线具有单一的性质，在 $x = 0.5 - 1.0 z_0$ 的间隔中电位下降最为强烈，当 z_0 很小时，梯度曲线近于直线，当 $x = 0.707 z_0$ 时具有最大值。当 ρ, i 和 z_0 改变时，可以将上列曲线变形或直接用改变座标轴的比例尺的办法而取得类似曲线。

* 震中 (ЭПИЦЕНТР) —— 球体中心在地表的投影——译者

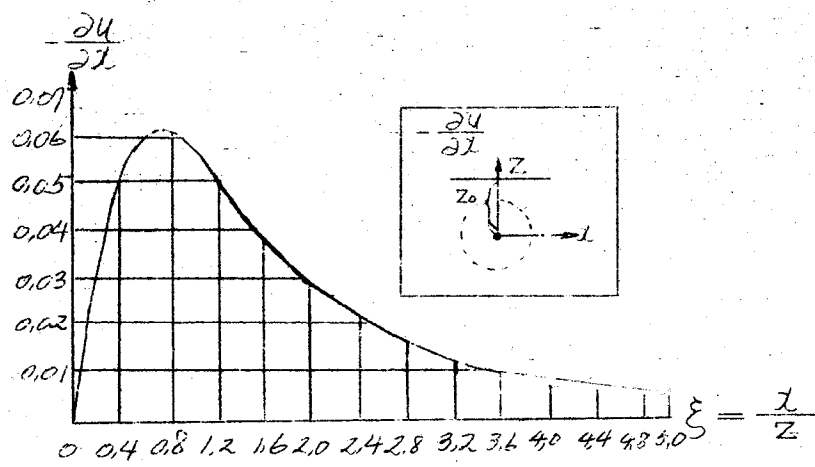


图2 充电球体的梯度曲线

上列的每一式均使观测的数值(电位、导数与观测点坐标(相对于球体中心而言)联系起来。球体的位置可用各种方法确定。我们只研究一下其中最主要的几个方法。

假设地面等位线图^①为已知。震中位置可确定在等位线的中心点。 Z_0 可根据相应的等位线的直径来确定。根据公式(1")可以确定当 $S = \sqrt{x^2 + y^2}$ 为 Z_0 的倍数时的电位与最大电位值间的比例关系： $\frac{U_s}{U_{max}} = \frac{Z_0}{\sqrt{S^2 + Z_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$ 。如果 $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ，则相应地得出：

$$\frac{U_s}{U_{max}} = 0.71; 0.45; 0.32; 0.24; 0.20; \text{等} \dots$$

根据等位线图画出二个或三个通过极大值的电位剖面线，然后在电位为 $0.71 U_{max}$, $0.45 U_{max}$ 等处画一些弦，其长度等于球体中心深度的二倍、三倍等。

假设梯度曲线为已知。根据梯度的分量 $-\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $-\frac{\partial u}{\partial y}$ 可画出何图。

① 所有等位线应相联系，并且每一等位线的电位必须是已知的。

SWI/983/2

向量指向的中心⁵⁾将球体的震中相符合。

球体中心深度可以根据梯度曲线来确定，其方法和电位曲线所用的方法一样。用同样的方法来处理，使 $S = Z_0, 2Z_0, 3Z_0$ 等，求出 $\frac{\partial u_s}{\partial s}$ ； $(\frac{\partial u_s}{\partial s})_{max}$ 的比例关系，该比例关系相应地等于 0.91；0.46；0.25；0.10；等。

为要确定 Z_0 ，用梯度曲线通过零点的斜率最为方便。

当 $y = 0$ 时，对于较小的 x 值，可从公式 (2") 求得：

$$-\frac{\partial u}{\partial x}_{x \rightarrow 0} \approx \frac{\rho i x}{2\pi Z_0^2} = \alpha x. \quad (3)$$

震中区域里的梯度曲线，根据公式 (3)，应具有直线性质，在实际工作也⁶⁾经常遇到这种现象。 Z_0 的大小可根据直线的角系数按下列公式确定：

$$Z_0 = \sqrt[3]{\frac{\rho i}{2\pi \alpha}} = \sqrt[3]{\frac{\rho i x}{2\pi \cdot \frac{\partial u}{\partial x}}} \quad (4)$$

梯度曲线角系数与深度 Z_0 之间的关系示于图 3。

当未知 ρ 时，必须把它从公式 (4) 中消除掉。为此可以利用~~最大梯度的数值~~极大值：

$$(\frac{\partial u}{\partial x})_{max} = \frac{\rho i}{\sqrt{27} \pi Z_0^2} \quad (5)$$

把式 (5) 代入公式 (4)，得：

$$Z_0 = \frac{\sqrt{27}}{2} x \cdot \frac{(\frac{\partial u}{\partial x})_{max}}{(\frac{\partial u}{\partial x})_{x \rightarrow 0}} = 2.598 x \frac{(\frac{\partial u}{\partial x})_{max}}{(\frac{\partial u}{\partial x})_{x \rightarrow 0}} \approx 2.6 \frac{(\frac{\partial u}{\partial x})_{max}}{\alpha} = 2.6 m. \quad (6)$$

字母 m 以后表示梯度最大值与角系数的比值。参数 m 具有长度的因次，它的单位与 Z_0 ^① 一样。

① 参数 m 第一次是由 A. П. Казанский 提出的。

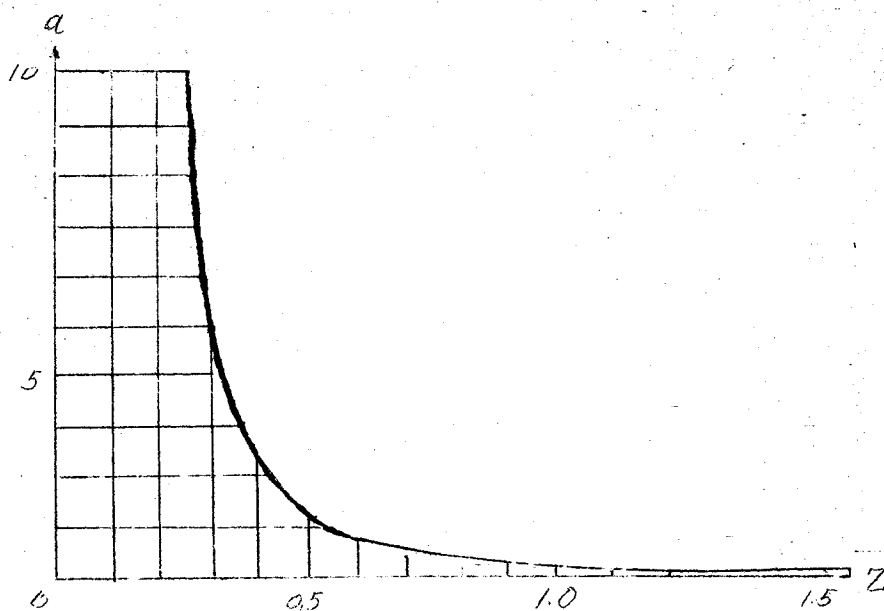


图3 系数与球形导体中心的距离的关系曲线。

用梯度曲线极值间的距离来确定 Z 更为简单，梯度最大值和最小值相应于：

$$\chi_{max} = -\chi_{min} = \frac{1}{\sqrt{2}} Z_0 \quad (7)$$

或用 p 来表示极值间的距离，即得：

$$Z_0 = \frac{\sqrt{2} p}{2} \approx 0.71 p \quad (8)$$

为了消除观测的偶然性和局部的不均匀性所引起的误差，建议同时利用 (6) 和 (8)。

最后，测定带电球体中心源度最可靠的方法是利用对数量板。

将通过膜中的剖面的公式 (1') 和 (2') 写成：

$$u_x = \frac{\rho_i}{2\pi Z_0} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + 1}}; \quad (9)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\rho_i}{2\pi Z_0^2} \cdot \frac{\xi}{(\sqrt{\xi^2 + 1})^3}, \quad (10)$$

式中 $\xi = \frac{x}{Z_0}$

对于主剖面^①在对数比例尺上绘制 u_x 和 $-\frac{\partial u}{\partial x}$ 对 ξ 的关系曲线 (对于 $\rho = 1$; $i = 1$ 和 $Z_0 = 1$ 的场合) (图4)。使取得的量板与画在同一横数的对数纸上之主要剖面的实测曲线相重叠、即可确定 Z_0 和 ρ 。在电位量板上，沿纵坐标轴指数“1”划出 Z_0 。——沿横坐标轴指数“1”划出 $-\frac{\rho}{Z_0}$ ，在梯度量板上指数“1”沿纵坐标轴划出 Z_0 、沿横坐标轴划出 $-\frac{\rho}{Z_0}$ 。

在公式(1)和(2)中未包括球体的半径。该半径可用测定球体接地电阻的方法或用观测球体电位的方法来求得。第一种方法实际上仅用于小型球体，即适用于能够做出这样的辅助接地的场合，其接地电阻的数量级等于或小于所求之接地电阻。这时每一个接地电阻都不能小于导线的电阻。用已知的方法(3)测定出接地电阻，即可按下式关系确定球体半径—— a 。

$$a = \frac{\rho}{4\pi R - \frac{\rho}{2Z_0}} \quad (11)$$

式中 R ——为接地电阻。

第二个方法是测量球体的电位。经过简单的推导，对 a 来讲可以取得下列关系：

$$a = \frac{Y}{\frac{2u_0}{u} - \frac{Y}{2Z_0}} \quad (12)$$

注①主剖面是指在地表上通过震中的剖面。对于伸长的导体，主剖面之一沿着走向，另一主剖面垂直走向。

或

$$\alpha = \frac{1}{\frac{4\pi\epsilon_0}{\rho_i} - \frac{1}{2Z_0}} \quad (12')$$

式中 U 为地面上距球体中心距离为 r 的某点的电位, U_0 为充电球体的电位。

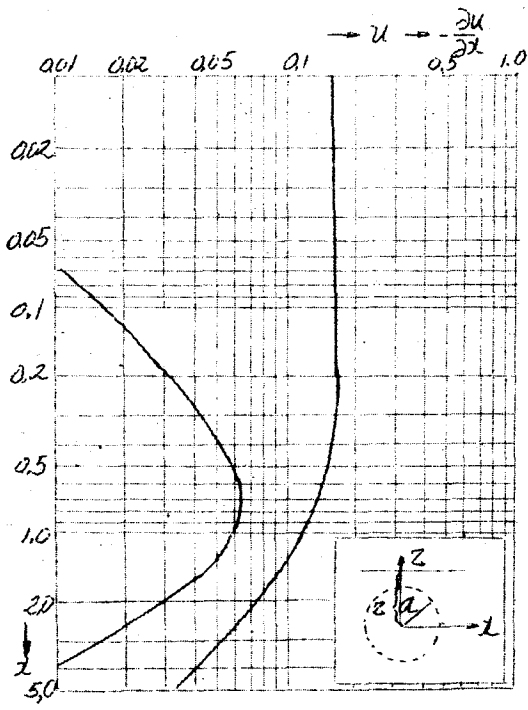


图4 球形导体的梯度和电位的量板

充电球体的电位值和电位梯度值

表 1

$$\rho=1; \quad i=1; \quad Z=1$$

ξ	$u_x = \frac{1}{2\pi\sqrt{\xi^2+1}}$	$\frac{du}{dx} = \frac{\xi}{2\pi(\xi^2+1)^{3/2}}$
0	0.1592	0
0.1	0.1582	0.0157
0.2	0.1561	0.0300
0.3	0.1522	0.0420
0.4	0.1476	0.0510
0.5	0.1420	0.0571
0.6	0.1363	0.0601
0.7	0.1317	0.0610
0.767	0.1300	0.0614
0.8	0.1241	0.0606
0.9	0.1181	0.0588
1.0	0.1125	0.0562
1.5	0.0882	0.0416
2.0	0.0711	0.0285
3.0	0.0503	0.0161
4.0	0.0386	0.0090
5.0	0.0312	0.0059

2. 线形导体

位于均匀的、各向同性的、无限介质中的线型导体的电位可用下列公式表示：

$$u = \frac{\rho l}{4\pi \cdot 2l} \ln \frac{y+Z+\sqrt{x^2+(y+Z)^2+Z^2}}{y-Z+\sqrt{x^2+(y-Z)^2+Z^2}} \quad (13)$$

式中： L ——导体长度的一半， x, y, z ——观测点的坐标。这时采用导体的中点做为坐标的原点，轴 y ——沿导体的方向，轴 x 和 z 与导体垂直。

当导体为水平时，在平坦的地面上的电场可用上述的简单加倍的方法即可求得。在表2和表3、图5和图6中，列出了线型充电导体沿地表上两个主剖面的电位的数值。

在地表上的同样剖面上，电位梯度数值可用下列公式求得：

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\rho l}{2\pi \cdot 2L} \left[\frac{1}{\sqrt{(y-L)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(y+L)^2 + z^2}} \right]; \quad (14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\rho l}{2\pi} \cdot \frac{x}{(x^2 + z^2) \sqrt{x^2 + L^2 + z^2}} \quad (15)$$

对于这些与电位的场合图相同的条件和坐标，其数值见于表4和5、图7和8中。

我们来研究一下取得的电位曲线。在导体的上方，所有曲线均具有最大值，导体的厚度越小则曲线越急剧。导体端部上的电位值稍许低于导体的中心部。对于不同的厚度，从表中到导体端部的间隔中的电位降见表6。

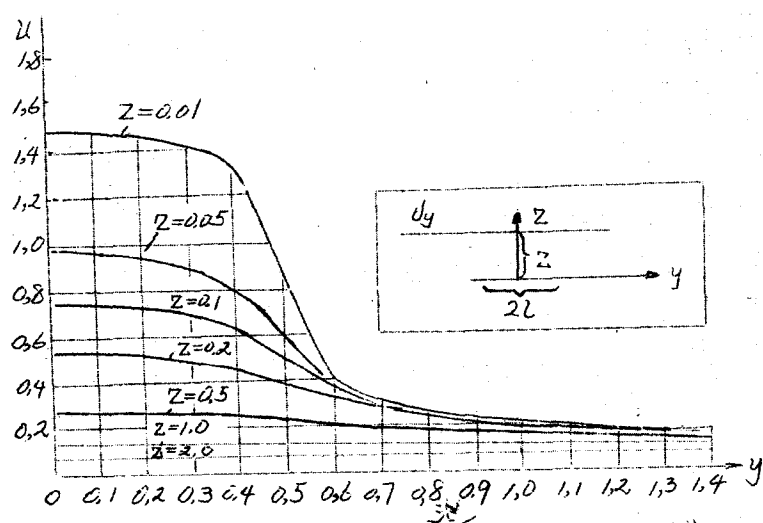


图5 沿充电线形导体走向的电位曲线

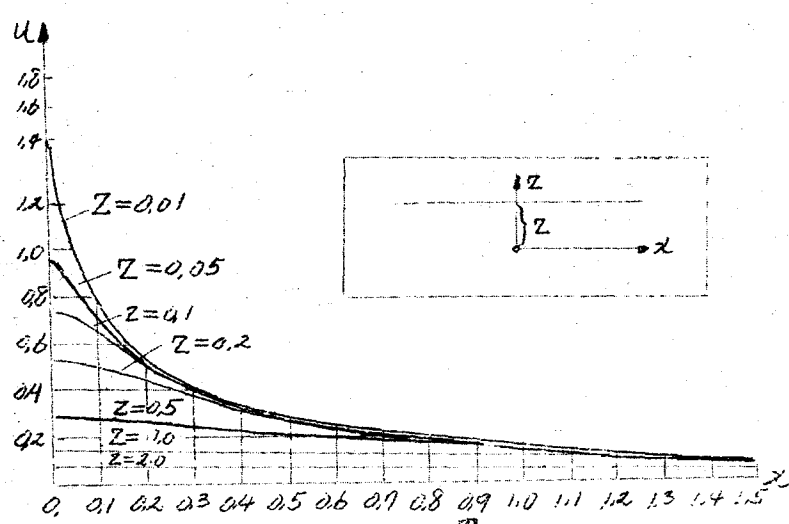


图6 无限长充电线形导体周围的电位曲线

$2L=1, \quad \rho=1, \quad i=1.$

在横剖面上同样可以见到深度小的导体电位降落急剧和深度大的导体电位降落平缓。将纵剖面 and 横剖面的相应曲线相对比，即能确定：在 0.1—0.2 的深度时等位曲线呈椭圆形，在 0.5—1.0 的深度时，则接近于圆形。

充电线形导体沿剖面 $y=0$ 的电位值 表2

$\rho=1; \quad i=1; \quad 2L=1$

$x \backslash Z$	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5	1.0	2.0
0	1.4672	0.95544	0.73675	0.52488	0.28075	0.15332	0.078839
0.01	1.356	0.9492	0.73518	0.52477	0.28073	0.15331	0.078832
0.05	0.9489	0.84576	0.71702	0.51586	0.27966	0.15314	0.078814
0.10	0.73517	0.70195	0.64439	0.49214	0.27658	0.15259	0.078707
0.20	0.52446	0.51586	0.49214	0.42512	0.26439	0.15253	0.078414
0.30	0.40883	0.40527	0.39467	0.36008	0.24748	0.14723	0.07794
0.40	0.33367	0.33183	0.32625	0.30649	0.2286	0.14305	0.07732
0.50	0.28075	0.27908	0.27638	0.26438	0.20977	0.1381	0.076514
1.0	0.15325	0.15314	0.15255	0.15053	0.13809	0.1104	0.070645
2.0	0.07886	0.07878	0.0787	0.07838	0.07644	0.07664	0.05601
5.0	0.0318	0.0318	0.03167	0.03167	0.03154	0.03104	0.02952

无限长导体沿剖面 $x=0$ 的电位值 表3

$$\rho = 1; \quad z = 1; \quad 2L = 1$$

z	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5	1.0	2.0
0	1.46736	0.46131	0.73518	0.52482	0.28060	0.15329	0.076789
0.2	1.44601	0.91860	0.71112	0.50358	0.27180	0.15101	0.07836
0.4	1.30449	0.79967	0.60135	0.42561	0.25030	0.14448	0.07743
0.5	0.80402	0.58777	0.47761	0.36837	0.22995	0.14045	0.076661
0.6	0.38162	0.36823	0.35231	0.30661	0.21197	0.13546	0.074827
0.7	0.22530	0.27726	0.27195	0.25291	0.19343	0.12967	0.073874
0.8	0.23246	0.23233	0.23086	0.2924	0.17753	0.12464	0.073593
1.0	0.17496	0.17463	0.17357	0.17016	0.14921	0.11363	0.070829
1.2	0.14122	0.14118	0.13590	0.13401	0.12746	0.10325	0.08041
1.4	0.11895	0.11895	0.11862	0.11796	0.11041	0.093791	0.065217
1.6	0.10300	0.10300	0.10270	0.10137	0.097569	0.085538	0.059165
2.0	0.08128	0.081283	0.08120	0.08070	0.078789	0.072150	0.056414
3.0	0.053543	0.053543	0.053479	0.053269	0.052893	0.051159	0.044346
4.0	0.039248	0.039248	0.039421	0.03994	0.039677	0.038697	0.035653
5.0	0.031545	0.031545	0.031655	0.031315	0.031134	0.031285	0.031619

无限长导体沿剖面 $y=0$ 的电位梯度值 $(-\frac{\partial u}{\partial x})$ 表4

z	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5	1.0	2.0
0	0	0	0	0	0	0	0
0.01	15.92	1.2245	0.3088	0.0735	0.008915	0.001417	0.00019
0.05	6.1218	3.184	1.243	0.3475	0.04265	0.00708	0.00096
0.1	3.09118	2.4875	1.532	0.5813	0.0856	0.01404	0.00191
0.2	1.47467	1.3904	1.135	0.693	0.1495	0.0269	0.003788
0.3	0.9093	0.8827	0.8065	0.596	0.183	0.0378	0.005603
0.4	0.6215	0.6143	0.5748	0.4748	0.1911	0.04617	0.00729
0.5	0.4502	0.4457	0.4288	0.3735	0.1836	0.0519	0.00882
1.0	0.1431	0.1418	0.1404	0.1347	0.1039	0.053	0.01389
2.0	0.0385	0.0385	0.0382	0.03804	0.03578	0.0278	0.01385
5.0	0.00633	0.00632	0.006318	0.006318	0.006225	0.005938	0.005063

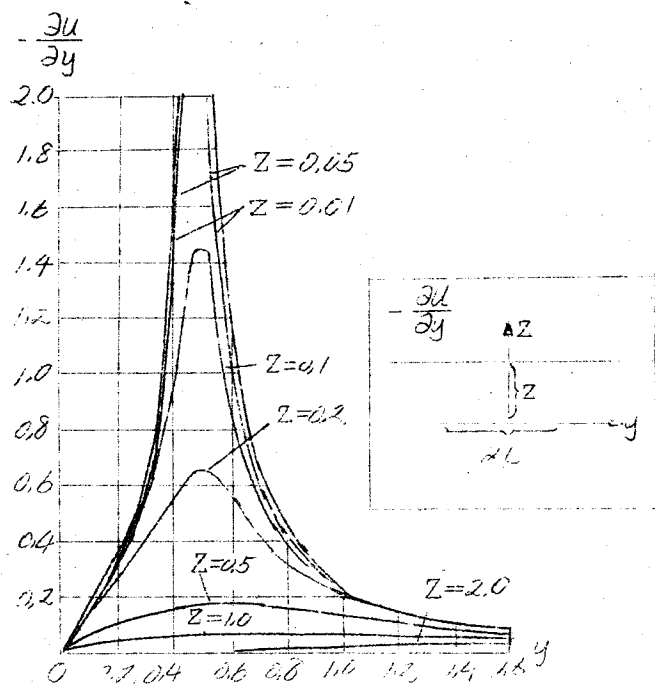


图7 充电线形导体沿 x 轴的梯度曲线
 $2L=1$, $p=1$, $i=1$.

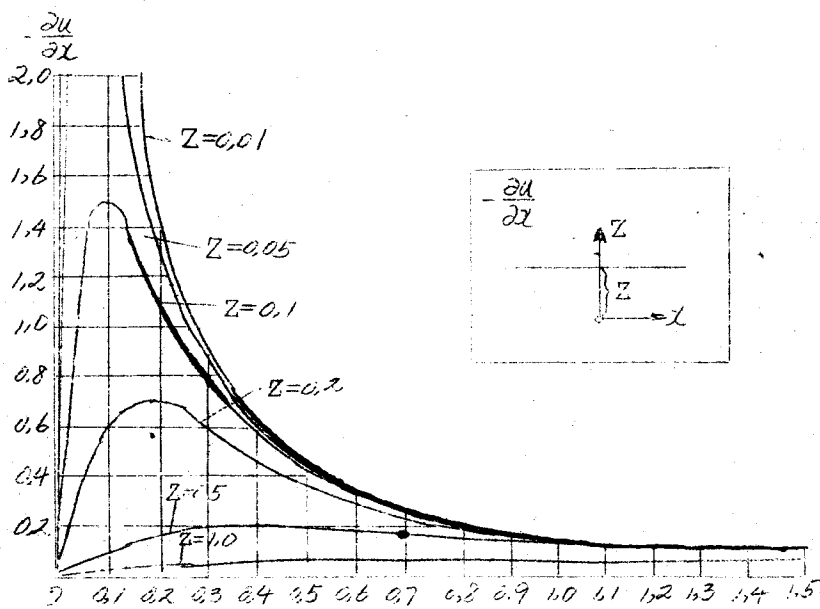


图8 充电线形导体垂直于 x 轴的梯度曲线
 $2L=1$, $p=1$, $i=1$.

充电线形导体沿剖面 $x=0$ 的电位梯度值 $(-\frac{\partial u}{\partial y})$

$$p=1; i=1; 2L=1.$$

表5

$y \setminus Z$	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5	1.0	2.0
0.2	0.30195	0.2985	0.28315	0.2229	0.087766	0.021935	0.0035979
0.4	1.40788	1.246	0.9329	0.53929	0.15758	0.040087	0.006909
0.5	15.7608	3.0249	1.4336	0.64977	0.176	0.046646	0.084057
0.55	2.97067	2.10367	1.26935	0.61972	0.17989	0.047792	0.0087305
0.6	1.43722	1.2044	0.98175	0.56958	0.18045	0.051326	0.009743
0.7	0.66338	0.63048	0.54153	0.43194	0.17321	0.054128	0.010937
0.8	0.40802	0.4011	0.38822	0.32053	0.15982	0.054128	0.011988
1.0	0.2122	0.2107	0.20616	0.17045	0.12444	0.05408	0.013532
1.2	0.13376	0.13325	0.13169	0.12564	0.095234	0.049772	0.014487
1.4	0.09308	0.0928	0.092145	0.09154	0.073598	0.044162	0.01485
1.6	0.0689	0.0686	0.068394	0.06827	0.05799	0.03975	0.01485
2.0	—	—	—	—	—	—	0.013913
3.0	—	—	—	—	—	—	0.01023

表6

Z	0.01	0.05	0.1	0.2	0.5	1.0	2.0
$u_y = 1; u_y = 0$	0.576	0.618	0.653	0.720	0.820	0.915	0.982

当导体的厚度为其长度的0.5—1.0时沿导体表面和垂直导体方向测得的梯度曲线偏差，一般不超过5—10%。

如果厚度已知，上列之电位降材料可用于测定导体的端侧。

为了进行验证，有时由于尺寸未知的，也可以绘制在距离中为 $2L, 3L, \dots$ 距离的电位值的表，并且用此方法从测得的曲线中求测 $2L$ 和 $3L$ 。但是，这种方法比之量板法复杂得多，量板法下面我们很快就会谈到。

在沿导体走向测得的梯度曲线上，在导体端侧附近可以看到极值。极值和它的差，随深度的减小而急剧增长。所有的极值在导体深度小于0.25时，实际上就在导体的端侧上或轻微向外错动些。从深度为0.5开始，曲线的最大值均明显地离开导体的端部，而当深度为2.0时，这个错动已达到单位值。

下面我们研究一下极大的错动与导体埋藏深度之间的关系。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = R \left\{ \frac{y-L}{[x^2+z^2+(y-L)^2]^{3/2}} - \frac{y+L}{[x^2+z^2+(y+L)^2]^{3/2}} \right\}$$

使二次导数等于零並且註

$$\frac{y-L}{2L} = \Delta \text{ 和 } \left(\frac{x}{2L}\right)^2 + \left(\frac{z}{2L}\right)^2 = p^2$$

即得

$$\frac{\Delta}{2L+\Delta} \left\{ \frac{p^2 + \Delta^2}{(p^2 + (\Delta+2L)^2)} \right\}^{3/2} = 0 \quad (*)$$

方程式(*)的图解结果可以取得 Δ 与 p 的下列关系

表7

p	1	0.5	0.3	0.2	0.1	0.05	0.01
Δ	0.34	0.083	0.023	0.0077	0.00098	0.000125	0.000001

利用上列的关系，不难确定导体端侧的位置，如果深度和该平面上的位置为已知的活。

列出的数据证明 Δ 与 p 相比 Δ 是很小的，因此方程式(*)可以简化， Δ 可以近似地用一个很简单的公式来表示：

$$\Delta = p^3 \quad (16)$$

假设 $\alpha = 0$ ，则公式给出极点的错动与深度的直接关系。
在 $p \leq 0.5 L$ 的情况下，该公式能给出满意的结果。

在比较大的范围内可以用下公式：

$$\Delta = \frac{p^3}{\sqrt{1+3p^2}} \quad (16')$$

或
$$\Delta = \frac{p^3}{\sqrt{1+3p^2+3p^4+p^6}} \quad (16'')$$

根据上述三个公式所得到的数据与实际数据的比较列于表 8 中

表 8

p	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0
实际 Δ	0.000001	0.000125	0.00098	0.00747	0.023	0.083	0.34
按公式 $\Delta = p^3$ 所得的 Δ	0.000001	0.000125	0.001	0.008	0.027	0.125	1.00
按公式 $\Delta = \frac{p^3}{\sqrt{1+3p^2}}$ 所得的 Δ	0.000001	0.000125	0.00098	0.00756	0.02394	0.0945	0.5
按公式 $\Delta = \frac{p^3}{\sqrt{1+3p^2+3p^4+p^6}}$ 所得的 Δ	0.000001	0.000125	0.00098	0.00750	0.0237	0.089	0.354

因此，如果导体的深度为已知（即或是大约），则可根据梯度曲线极值不难精确地求出线形导体端侧的位置。

垂直导体走向测得的梯度曲线具有较宽的极大值，这时其

位置接近于导体中心。当 λ 值很小时，在曲线上可看出直线线段。直线线段的倾角随着导体深度的改变而急剧的变化。直线线段的角系数与深度的关系不难用分析方法确定出来。当 λ 值很小时电位梯度 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 可大致用下列公式表示：

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\rho i}{2\pi} \cdot \frac{\lambda}{Z^2 \sqrt{l^2 + Z^2}} = a \lambda \quad (17)$$

当 ρ 、 i 和 l 为已知时，用该式可以很容易地找出 Z 。当 $l^2 \gg Z^2$ 时，深度可用下列公式表示：

$$Z = \sqrt{\frac{\rho i}{2\pi l a}} \quad (17')$$

当 $l^2 \ll Z^2$ 时，公式 (17) 可转化成 (13)。

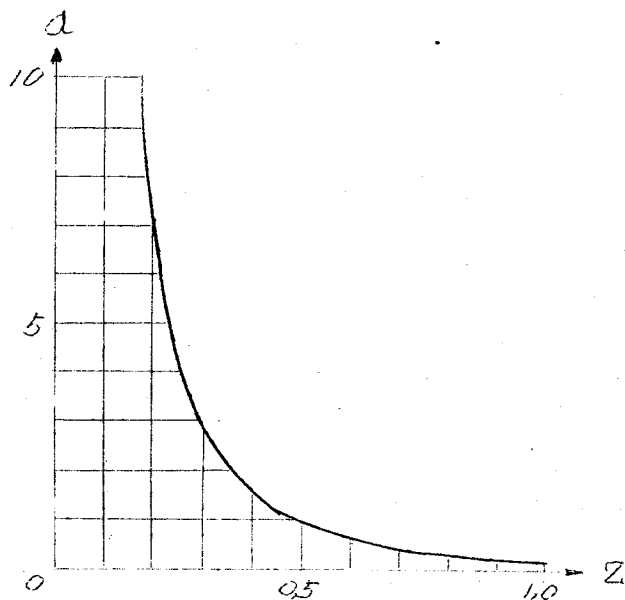


图9 角系数与深度关系曲线图。
水平线形导体。