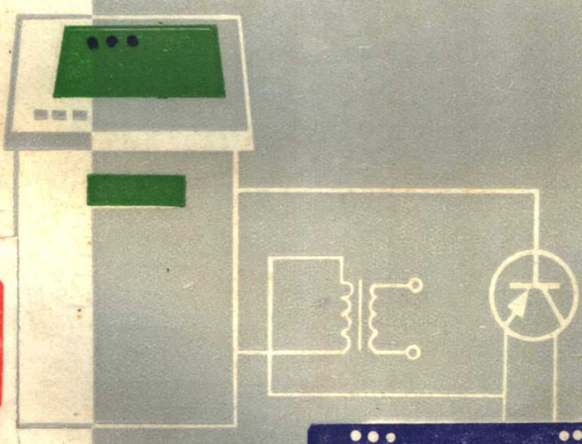
逻辑代数

LUO JI DAI SHU



衡阳师专数学科编

前　　言

根据全日制中学数学教学大纲要求，师范专科学校数学科必须开设《逻辑代数》这门课程。由于目前还没有现成教材，一九七八年七月湖南省教育局高教处决定，由衡阳师专负责主编《逻辑代数》教材，供本省师范专科学校数学科教学用和作为中学数学教师的教学参考书。

《逻辑代数》一书编写的过程是：由衡阳师专先起草《逻辑代数》编写提纲，并和邵阳、岳阳、常德三所师专一起讨论修订；根据修订的编写提纲，再由衡阳师专的肖鹏一老师写出初稿，经衡阳、邵阳、岳阳、常德、湘潭五所师专部分有关老师对初稿进行审定，提出修改意见后，再由衡阳师专修改定稿，最后，经省教育局高教处同意付印，才由衡阳师专负责印刷成书。

由于水平有限，本书缺点和错误一定不少，敬请同志们批评指正。

衡阳师专数学科

一九七九年五月

目 录

第一章　二进位数

电子计算机要进行大量的数值运算，选择什么样的计数法，对电子计算机的构造和性能都有很大的影响。在电子计算机中，一般采用二进位制计数法，也有采用八进位制、十进位制或二——十进位制代码等计数法。因此，这一章介绍计数法中的不同进位制的计数法，以及不同进位数之间的转换。着重介绍二进位数。

第一节　计数法

人们在实践中遇到许许多多的数值，如果每一个数值都要用一个符号来表示，那就不胜其繁，也不便于记忆和使用。于是，人们便创造了许多的计数法。所谓计数法，就是选用为数不多的基本符号和名称，把要计的数表示出来。比如，大家熟知的十进位制，就是用十个数码（即基本符号：0，1，2，3，4，5，6，7，8，9）和位值（……千位、百位、十位、个位、十分之一位、百分之一位、千分之一位，……）把要计的数表示出来。数值1981读作“一千九百八十一”，数字3.1416读作“三点一四一六”。

人们从实践中总结出来的计数法分为两大类：无位值计数法和有位值计数法。

一、无位值计数法

在这种计数法中，数字中的基本符号所表示的数值与基

本符号在数字中所处的位置无关，即同一基本符号所处的位置不同，但表示的数值相同。比如，罗马数字Ⅳ与Ⅵ中的Ⅰ，位置不同，但都表示数值“1”。

罗马数字采用的计数法，就是无位值计数法。它是采用基本符号和加、减计算原则来计数，与基本符号在数字中所处的位置无关。在罗马数字计数法中，规定基本符号为：

Ⅰ表示1，Ⅴ表示5，Ⅹ表示10，L表示50等。

由这些符号和加减计算原则来表示数字。比如：

Ⅲ表示1＋1＋1＝3，　Ⅳ表示5－1＝4，

Ⅵ表示5＋1＝6，　Ⅻ表示10＋2＝12，

ⅩⅩ表示10＋10＝20，　ⅩL表示50－10＝40.等等。

我国古代用算筹来计数，也是无位值计数法。

无位值计数法，无论是计数或运算都很麻烦，因此，目前这种计数法很少采用。

二、有位值计数法

在这种计数法中，数字中的基本符号所表示的数值与基本符号在数字中所处的位置有关，即同一个基本符号所处的位置不同，表示的数值也不相同。比如，十进位数字212.32中，数码2出现了三次，但所处的位置不相同，表示的数值也不相同。小数点左边第三位上的数码2处在百位，表示两百；小数点左边第一位上的数码2处在个位，表示两个；小数点右边第二位上的数码2处在百分位，表示百分之二。

有位值计数法，又按进位的基数不同，分为不同进位制计数法。

1.十进位制计数法

在这种计数法中，用十个数码：0，1，2，3，4，

5，6，7，8，9表示零到九的数值，并且超过9之后再加1，便向相邻的左边一位进1，即“逢十进一”。数位关系为：

……………	千位	百位	十位	个位	十分之一位	百分之一位	千分之一位	……………

这种计数法用十个数码来计数，10就称为这种计数法的基数。

在有位值计数法中，不论哪种进位制，基数总是大于1的整数，否则，就不称其为有位值计数法了。

为了说明十进位制计数法中的数字与数码和基数之间的关系，把任一个十进位数展开成为数码与基数的整数次幂之积的和的形式。比如：

$$204.25=2\times10^{2}+0\times10^{1}+4\times10^{0}+2\times10^{-1}+5\times10^{-2}$$

$$\text{系数}\longrightarrow\boxed{2\quad 0\quad 4\cdot 2\quad 5}$$

由上式可知，十进位数的数值，实际上是系数（在数码内取）与基数10的整数次幂之积的和。平常所写的数字，就是把位值省略掉的系数序列的缩写。

一般地，任何一个数，用十进位制计数法，一般都可以表示为

$$N_{(+)}=X_n\times 10^n+X_{n-1}\times 10^{n-1}+\cdots\cdots+X_1\times 10^1+X_0\times 10^0+X_{-1}\times 10^{-1}+\cdots\cdots+X_{-m}\times 10^{-m}$$

即 $N_{(+)}=X_n X_{n-1}\cdots\cdots X_1 X_0\cdot X_{-1}\cdots\cdots X_{-m}$

其中X_i（m，n为自然数，$-m\leqslant i\leqslant n$）为0到9 中的数码，脚码“+”表示十进位制。

2.p（大于1的整数）进位制计数法

有位值计数法，除了大家熟知的十进位制计数法外，还有其他各种进位制计数法，其道理是一致的。比如：六十秒钟为一分钟，六十分钟为一小时，就是60进位制计数法；二十四小时为一日，就是24进位制计数法；十二个月为一年，就是12进位制计数法；一百年为一个世纪，就是100进位制计数法。

一般地，讨论p进位制计数法。

在这种计数法中，用p个数码：0，1，2，……，$\overline{p-2}$，$\overline{p-1}$（这里$\overline{p-2}$，$\overline{p-1}$都是一个数码，看作一个整体）表示零到$\overline{p-1}$的数值，并且超过p－1之后再加1，便向相邻的左边一位进1，即“逢p进一”。p进位制计数法的基数是p。任何一个数，用p进位制计数法来表示，就是表示为数码（1到p－1）与基数p的整数次幂之积的和的形式

$$N_{(p)} = (X_n \times p^n + X_{n-1} \times p^{n-1} + \cdots\cdots + X_1 \times P + X_0 \times p^0 + X_{-1} \times p^{-1} + \cdots\cdots + X_{-m} \times p^{-m})_{(+)} \qquad (1-1)$$

其中X_i（m，n为自然数，$-m \leqslant i \leqslant n$）为0到$\overline{p-1}$中的数码，脚码“p”表示p进位数。上式说明了p进位数与十进位数之间的关系。

一般地，把位值省略掉，用它的系数序列来表示

$$N_{(p)} = (X_n X_{n-1} \cdots\cdots X_1 X_0 \cdot X_{-1} \cdots\cdots X_{-m})_{(p)}$$

当p＝2时，就是二进位制计数法。二进位制计数法只用0，1两个数码，基数为2。

当p＝8时，就是八进位制计数法。八进位制计数法有八个数码：0，1，2，3，4，5，6，7。基数为8。

当p＝12时，就是十二进位制计数法。十二进位制计数法有十二个数码：0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，$\overline{10}$，$\overline{11}$。基数是12。这里的数码$\overline{10}$，$\overline{11}$都是一个整体，不是十进位制计数法中的数字10和11。

例1　计算数字$101_{(p)}$，当p＝2，8，12时，对应的十进位数。

解　由（1——1）式得

$$101_{(二)} = (1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0)_{(+)} = 5_{(+)},$$

$$101_{(八)} = (1 \times 8^2 + 0 \times 8^1 + 1 \times 8^0)_{(+)} = 65_{(+)},$$

$$101_{(十二)}=(1\times12^2+0\times12^1+1\times12^0)_{(十)}$$

$$=145_{(十)}。$$

由例1可知，用不同进位制来表示同一个数值，基数愈小，数值的位数愈多；基数愈大，数值的位数愈少。比如，数值5，用二进位数来表示，有三位数$101_{(二)}$，用十进位数来表示，只有一位数$5_{(十)}$。

例2 计算数字$100\overline{10}\,\overline{11}_{(p)}$，当$p=12$，16时，对应的十进位数。

解 由（1——1）式得

$$100\overline{10}\,\overline{11}_{(十二)}=(1\times12^4+0\times12^3+0\times12^2+10\times12^1+11\times12^0)_{(十)}$$

$$=20867_{(十)}$$

$$100\overline{10}\,\overline{11}_{(十六)}=(1\times16^4+0\times16^3+0\times16^2+10\times16^1+11\times16^0)_{(十)}$$

$$=65707_{(十)}.$$

例3 取0，1，2，3，4，5，6，7，8，8，9，10，11作为十二进位制的数码会出现什么问题？

解 如果取0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11作为十二进位制的数码，那么数码10和11都会与由数码0、1组成的数字10和11混淆，从而利用（1——1）

式可计算出不同的十进位数值。

三、二进位数的特点

电子计算机之所以采用二进位制计数法，是因为二进位制计数法有以下特点。

1、运算简单

任何一种进位制进行算术运算时，都必须记住两个数之和及积的表，才能进行计算。一般地讲，p进位制，就要记住$\frac{p(p+1)}{2}$个和及积，才能进行计算。

当p＝10时，即十进位制，就要记住$\frac{10(10+1)}{2}=55$个和及积（九九表），才能进行计算。这样，计算机的计算器就很庞大，控制线路也很复杂。

当p＝2时，即二进位制，只要记住$\frac{2(2+1)}{2}=3$个和及积，就可以进行计算。这样，计算机的计算器就会比较小一些，控制线路也会比较简单。

2、易于实现

任何一种计算工具，都是采用某种东西来表示不同的数码。如果在电子计算机中用十进位制，则要求计算机的元件具有十种稳定的物理状态来表示十个数码，而具有十种稳定的物理状态的元件不多，而且制造工艺复杂。如果在电子计算机中采用二进位制，则要求计算机的元件具有两种稳定的物理状态来表示两个数码。然而具有两种稳定的物理状态的元件容易找到。比如灯亮和灯灭，继电器的闭合和断开，晶体管的导通和截止，磁心的不同方向的磁化，脉冲的有和

无，电压的高和低等等，都可以用来表示二进位制的两个数码。

3、节省设备

现在以十进位制与二进位制在计算机中所用的元件数进行比较，比较的标准是都能表示出$m = 1000$个数字来。为了说明问题，假定每一数位上的每一数码都用一个元件，则十进位制中每一数位上放十个元件，二进位制中每一数位上只放两个元件，实际电路中每一数位上放的触发器也是两个晶体管组成。在这个前提下求两种不同进位制所用元件数量N。

采用十进位计数法时，数值由0，1，2，……顺序排列到999共有1000个数。由此可知，十进位数三位数就能表示出1000个不同数值的数。根据上面假定，十进位制每位放十个元件，即$p = 10$，则$m = p_3 p_2 p_1 = p^3 = 10^3$，由此写成下式

$$m = p$$

式中n表示位数。

由此也可以求出二进位制的位数n来。在上式中令$p = 2$，$m = 1000$，于是得到

$$1000 = 2$$

当$n = 9$时，$m_1 = 2^9 = 512$个不同的数值；

当$n = 10$时，$m_2 = 2^{10} = 1024$个不同的数值。因此，选择$n = 10$，即二进位制要十位才能表示出1000个不同的数值来。

两种进位制都表示出m个数来，则不同的p有不同的n。

最后算出两种进位制所用的元件数量N

$N_{(+)}$ = 位数×每位元件数 $= n \times p = 3 \times 10 = 30$（个元

件）；

$N_{(二)}$ = 位数×每位元件数 = $n \times p = 10 \times 2 = 20$（个元件）。

由此可知，在计算机中采用二进位制比采用十进位制要节省元件。

通过数学推导可以证明，三进位制计数法所用的元件数量最少，其次是二进位制计数法所用的元件数量少。然而，由于制造具有三种稳定的物理状态的元件困难，而且工作也不可靠，所以目前在电子计算机中，多采用二进位制。

4、采用二进位制计数法，便于利用逻辑代数来分析和综合电子计算机中的逻辑电路。

这一点将在第四章说明。

由于二进位制具有上述特点，所以二进位制在电子计算机中获得广泛的应用。

但是，二进位制也有它的不足之处。一方面书写的数位多，念起来不易懂。另一方面，人们习惯采用十进位制，要用电子计算机计算，首先就要把原始数据转换为二进位数，计算出结果后，又要把二进位数转换为十进位数。而且二进位数与十进位数之间的转换也不很简便，虽则采用八进位数来弥补这一缺点，但要增加转换设备和转换时间。所以，有很多专用数据处理计算机，还是采用十进位制。

习题一——一

1、比较两个数的大小：

101与110；　110与1000；　1101与1110；

1100与1011。

2、由大到小排列下面五个数：

1100，1001，1011，1101，1010

3、在□中填入“1”或“0”，使不等式成立：

100□□>10010；　　10□□0>10100；

1□01□>11010；　　110□□>11001。

4、计算数字$1011.011_{(p)}$，当$p=2$，8时所对应的十进位数。

5、回答下列问题：

(1) 用二进位数表示一个四位长的十进位数最小需要几位？

(2)十二位长的二进位整数表示十进位数的范围是什么？

第二节　二进位数的运算

二进位数只用了两个数码，并且“逢二进一”。因此，二进位数的运算，比十进位数的运算简单，不象十进位数的运算那样，需要复杂的九九表。

一、二进位数的加法

要掌握二进位数的加法，只需要掌握加法表就容易了，其要点就是“逢二进一”。

加法表：

$$0+0=0$$
$$0+1=1$$
$$1+0=1$$
$$1+1=10$$

二进位数的加法与十进位数的加法一样，可进行竖式演算，其步骤也相同。

例 1 、计算：

(1)　$1001+11=?$

(2)　$1011.01+1.101=?$

解　(1)
$$\begin{array}{r} 1001 \\ +)\quad 11 \\ \hline 1100 \end{array}$$
(2)
$$\begin{array}{r} 1011.01 \\ +)\quad 1.101 \\ \hline 1100.111 \end{array}$$

$1001+11=1100$；　　$1011.01+1.101=1100.111$.

二、二进位数的减法

减法是加法的逆运算，因此，容易由加法表得到减法表。其要点就是本位不够减时，向相邻的左边一位借 1 当 2 进行计算。

减法表：

$$0-0=0$$
$$1-0=1$$
$$1-1=0$$
$$10-1=1$$

例 2　计算：

(1)　$1101-111=?$

(2)　$1011.101-10.11=?$

解　(1)
$$\begin{array}{r} 1101 \\ -)\quad 111 \\ \hline 110 \end{array}$$
(2)
$$\begin{array}{r} 1011.101 \\ -)\quad 10.11 \\ \hline 1000.111 \end{array}$$

$1101-111=110$；　　$1011.101-10.11=1000.111$.

在电子计算机中进行减法运算，当遇到 0 减 1 时，需要从相邻的左边一位借 1 当 2 再减，这样做将变得非常麻烦。

因此，研究使用补数的减法。实际上，使减法由加法来计算，从而使电子计算机的构造简化。下面讲一讲使用补数的减法。

在十进位数的减法里，如果遇到减法

$$1230-97$$

可采用如下算法：

$$1230+3-100=1133$$

这就是使用补数的减法。

一般地，若$X+Y=10^n$（n为自然数），则称Y为X的补数。

于是　被减数－减数＝被减数＋减数的补数-10^n.

比如，　$1230-97=1230+3-10^2$

二进位数的补数与十进位数的补数，概念相同。即若$X_{(二)}+Y_{(二)}=10^n_{\ (二)}$（n为自然数），则称$Y_{(二)}$为$X_{(二)}$的补数。

使用补数的减法，必须先求出减数的补数。通过下例，可找出求补数的法则。

例3　求二进位数1011和110100的补数。

解　由$10^4-1011=10000-1011=101$知1011的补数为101；

由$10^6-110100=1000000-110100=1100$知110100的补数为1100.

从例3归纳出求补数的法则：

（1）从右往左看，若第一位数码为1，则第一位数码不变，以后各数码0就变为数码1，数码1就变为数码0.

（2）从右往左看，若第一位数码为0，则在出现数码

1以前的所有数码0和第一次出现的数码1都不变，而后的数码0就变为数码1，数码1就变为数码0.

例4　计算：

(1)　$1101-1010=?$

(2)　$1011-101=?$

解　(1)　$1101-1010=1101+110-10000=11$

(2)　$1011-101=1011+11-1000=110$

三、二进位数的乘法

二进位数的乘法是根据下面乘法表进行计算的，在竖式演算中，实际上是由加法和移位来实现的。

乘法表：

$$0\times0=0$$
$$0\times1=0$$
$$1\times0=0$$
$$1\times1=1$$

例5　计算

(1)　$110\times101=?$

(2)　$1101.1\times10.1=?$

解

(1)
$$\begin{array}{rr} & 110 \\ \times) & 101 \\ \hline & 110 \\ & 000 \\ +) & 110 \\ \hline & 11110 \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rr} & 1101.1 \\ \times) & 10.1 \\ \hline & 110\ 11 \\ & 0000\ 0 \\ +) & 11011 \\ \hline & 100001.11 \end{array}$$

$110\times101=11110$；　　$1101.1\times10.1=100001.11$.

四、二进位数的除法