控制系统的状态空间分析

（第四册）

（日）绪方胜 廖新著 华东工程学院译

武汉钢铁学院电气自动化教研室翻印

1979年5月

目　　录

第七章　可控性和可测性

第八章　稳定性分析

第九章 最佳控制系统

第七章　可控性和可测性

7—1　引　　言

在求解动力学系统控制的基本问题时，我们应当知道为了对动力学系统实现的控制所必需的信息的种类和数量。考虑图7—1所示系统。装置或动力学系统的状态和输出由如下方程描述：

$$X = AX + Bu \qquad (7-1)$$

$$Y = CX + Du$$

其中：

X = n维向量（状态向量）

u = r维向量（控制向量）

Y = m维向量（输出向量）

A = $n\times n$ 维矩阵（转移矩阵）

B = $n\times r$ 维矩阵（控制矩阵）

C = $m\times n$ 维矩阵（输出矩阵）

D = $m\times r$ 维矩阵（传输矩阵）

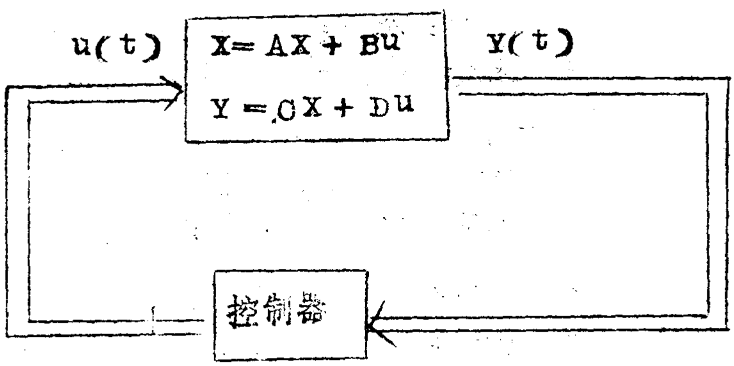

图7—1　控制系统

A，B，C和D假设为常数矩阵。方程（7—1）中的第一个方程给出了装置的动力学系统特性或系统的动力学特性。（7—1）的第二个方程表示输出变换。在方程（7—1）中，当没有u时A即表

示了装置或系统的动力学特性；B则描述了装置或动力学系统是怎样相对于u被驱动的；C表示输出是怎样相对于X被驱动；D则表示从u传输到Y。〔如果所有的状态X都直接受到u的影响，那么装置或动力学系统就是没有相对于u驱动。如果所有的状态变量$x_i(t)$都是可以测量的，则装置或动力学系统就是没有相对于Y驱动。〕在图7—1所示系统中，控制器对输出Y(t)进行观测，并根据这种观测确定控制向量u(t)。装置或动力学系统控制的基本问题可以叙述为：

1. 是否可能作到在一个有限的时间内通过加入一个适当控制输入，使系统从任一初始状态变换为所要求的状态？

2. 是否有可能作到通过观测一个有限时间内的输出Y(t)，而识别出初始状态$X(t_0)$？

卡尔曼引入了可控性和可测性的概念，并且给出对这些基本问题的解答（7—1），在本章中我们主要是给出可控性和可测性概念的解释，并回答上述同样的问题。

在近代控制理论中，可控性和可测性概念是个基本的重要概念。实际上，可控性和可测性对于很多控制问题可以解释为解存在的必要条件，并且在某些情况下解释为充分条件。

下面，我们介绍可控性和可测性的定义，要注意的是在本章中我们将简称方程（7—1）所描述的装置或动力学系统为系统。

可控性 如果对于任意的t_0都能够构成一个无约束的控制向量u(t)，它能在有限的时间间隔$t_0 \leqslant t \leqslant t_1$内，使得任一给定的初始状态$X(t_0)$转换为某一终止状态$X(t_1)$，则称方程（7—1）的系统为全状态可控的（通常我们可以将终止状态取为状态空间的原点）。

全状态可控性对于系统输出Y(t问题的解的存在性而言，既不是必

要的也不是充分的，正因为这样，希望单独定义一个全输出可控性。输出可控制有利于我们研究具有时间延迟的系统和直接从控制输入转化为输出的系统（7—1）。

如果能够构成一个控制向量 $u(t)$，它能在有限的时间间隔 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ 内将任一给定的初始输出 $Y(t_0)$ 转化为某一终止输出 $Y(t_1)$，则称方程（7—1）的系统为全输出可控的。

对于 t_1 是未定界的控制问题的解的存在性而言，全可控性通常是必要条件，当控制过程被限定在固定的有限时间内时，是需可控制有更强的属性。这种可控性的更强属性是通过整体可控性来定义的（7—1）。如果在每个间隔 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ 上系统是全可控的，则称系统为整体（状态或输出）可控的。

可测性　如果对于每个 t_0 和某个 t_1，每个状态 $X(t_0)$ 都可以利用在 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ 内的 $Y(t)$ 来确定，则称系统在 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ 上是全可测的。从本质上说，如果系统状态的每次转移都最终影响到系统的输出，则称系统是全可测的。

根据上述定义，全可测性就意味着，一旦方程（7—1）中的 A 和 C 给定，并且在有限区间内响应 $Y(t)$ 是已知的，即可确定的系统的初始状态 $X(t_0)$。我们来研究一个简单的例题。如果输出变换矩阵给定为：

$$C = [100\cdots\cdots 0]$$

则在不存在控制向量或 $u(t) = 0$ 时我们有：

$$y(t) = x_1(t)$$

在这种情况下，状态变量 $x_1(t)$ 是可以量得的或可测的，而 $x_2(t)$，$x_3(t)$，……，$x_n(t)$ 则既不能量得也不可测。如果状态变量的初始

值 $x_1(t_0)$，$x_2(t_0)$，……，$x_n(t_0)$ 可以在 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ 有限区间内根据 $x_1(t)$ 的测量值确定，那么系统是全可测的。可控性概念对于利用尽可能小的时间内测得的一个状态变量来重现不可测的状态变量问题的求解是有用的。

与整体可控制的情况相类似，我们也来定义整体可测性如下：如果系统对于每个 t_0 和每个 $t_1 > t_0$ 都是全可测的，则系统称为整体可测。

本章提要：这一章我们将可控性和可测性概念作为定理来加以详细介绍。讨论只限于线性系统。7—2节中介绍讨论线性动力学系统可控性和可测性所必须的数学基础。7—3节初步讲解线性时不变系统的可控性。7—4节具体讨论线性时不变系统的可测性。7—5节涉及的是线性时不变系统的可控性和可测性。7—6节讨论的是动力学系统的可控性和可测性间的关系，以及线性动力学系统和它的脉冲响应间的关系。

7—2 数学基础

这一节我们介绍本章中要用到的数学基础知识。首先，简要地介绍一下凸集；然后我们定义伴随系统。伴随系统的使用往往可以简化最佳控制问题的理论研究。再后，我们将讨论对于给定的基底 n 维向量空间 V 中元素的表示。最后，我们定义 Gram 矩阵和 Gram 行列式，以及几个关于 Gram 矩阵的定理。

凸集　如果与集上每个偶点相联的线段上的所有点也都在集上，则称该集为凸集。

我们定义在时间间隔 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ 内由原点可达到的 n 维空间上所有点的集为 $\Gamma(t_0, t_1)$。则 $\Gamma(t_0, t_1)$ 为一凸集。这可由下

面叙述中看出：假定定义在$t_0 \leqslant t \leqslant t_1$上的具体控制向量为$u_1$和$u_2$，它将输出驱动到$P_1$和$P_2$二点。因为在n维向量空间上的任何一点都可用n维向量X表示，我们可以分别用向量$X_1(t_1)$和$X_2(t_1)$表示点P_1和P_2。考虑与点P_1和P_2相联的线段上的点P_3。我们用向量$X_3(t_1)$表示点P_3。因此$X_3(t_1)$可以表示为：

$$X_3(t_1)=\alpha X_1(t_1)+(1-\alpha)X_2(t_1),$$

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 1$$

显然，点P_3可利用控制向量u_3而到达，其中

$$u_3=\alpha u_1+(1-\alpha)u_2$$

因此，P_3点在$\Gamma(t_0, t_1)$上。由于和$\Gamma(t_0, t_1)$上每个偶点相联的线段上的任一点也在$\Gamma(t_0, t_1)$上，所以集$\Gamma(t_0, t_1)$是凸集。

如果我们希望看看凸集$\Gamma(t_0, t_1)$与整个空间V的重合情况，就只要看一下$\Gamma(t_0, t_1)$在V中的任何一个方向上是否无界；也就是说，向量$X(t_1)$生成n维空间V。

伴随系统　考虑由下列方程描述的系统：

$$\dot{X}=A(t)X \qquad (7-2)$$

其中X是n维向量A(t)是$n \times n$矩阵。我们假定在时间间隔$t_0 \leqslant t \leqslant t_1$内A(t)的元素作为t的函数是绝对可积的。假定$\Phi(t, t_0)$是满足下列方程的唯一基本矩阵：

$$\frac{d}{dt}[\Phi(t,t_0)]=A(t)\Phi(t,t_0),\ \Phi(t_0,t_0)=I \qquad (7-3)$$

然后对于方程

$$\Phi(t,t_0)\Phi^{-1}(t,t_0)=I$$

—6

的两 对 t 微分可得：

$$\frac{d}{dt}[\Phi(t,t_0)]\Phi^{-1}(t,t_0)+\Phi(t,t_0)\frac{d}{dt}[\Phi^{-1}(t,t_0)]$$

$$=A(t)\Phi(t,t_0)\Phi^{-1}(t,t_0)+\Phi(t,t_0)\frac{d}{dt}[\Phi^{-1}(t,t_0)]$$

$$=A(t)+\Phi(t,t_0)\frac{d}{dt}[\Phi^{-1}(t,t_0)]=0$$

因此，我们可得

$$\frac{d}{dt}[\Phi^{-1}(t,t_0)]=-\Phi^{-1}(t,t_0)A(t),\ \Phi^{-1}(t_0,t_0)=I$$

……………（7—4）

我们定义：

$$\Phi(t_0,t)=\Phi^{-1}(t,t_0)=\psi^*(t,t_0) \quad (7—5)$$

于是方程（7—4）变为

$$\frac{d}{dt}[\psi^*(t,t_0)]=-\psi^*(t,t_0)A(t) \quad (7—6)$$

因此，我们看到 $\psi^*(t,t_0)$ 是如下系统的基本矩阵：

$$\dot{Y}=-YA(t)$$

其中 Y 是行向量

对方程（7—6）取共轭转置可得

$$\frac{d}{dt}[\psi(t,t_0)]=-A^*(t)\psi(t,t_0),\ \psi(t_0,t_0)=I$$

……………………（7—7）

我们发现对于系统

$$\dot{Z}=-A^*(t)Z \quad (7—8)$$

$\psi(t,t_0)$ 即为它的基本矩阵。

方程（7—8）称之为方程（7—2）的伴随方程。矩阵微分方程（7—7）称为方程（7—3）的伴随方程。同样的，方程（7—2）和（7—3）也分别称为方程（7—8）和（7—7）的伴随方程。

如果矩阵是逆Hermitian型的，即

$$A(t) = -A^*(t)$$

则系统

$$\dot{X} = A(t)X$$

为自伴的。

例7—1　考虑下述系统。

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots\cdots + a_n x = 0 \qquad (7—9)$$

让我们求其伴随系统。方程（7—9）可以写为：

$$\dot{X} = AX$$

其中

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$$

伴随系统是：

$$\dot{Y} = -A^* Y$$

其中

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad -A^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{a}_n \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & \bar{a}_{n-1} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & \bar{a}_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \bar{a}_1 \end{bmatrix}$$

或者：

$$
\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= \bar{a}_n y_n \\
\dot{y}_2 &= -y_1 + \bar{a}_{n-1} y_n \\
&\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\
\dot{y}_n &= -y_{n-1} + \bar{a} \ y_n
\end{aligned}
\qquad (7-10)
$$

在方程（7—10）中消去y_1，y_2，……，y_{n-1}可得：

$$(-1)^n \quad y_n + (-1)^{n-1}\bar{a}_1 \quad y_n^{(n-1)} + \cdots\cdots + (-1)\bar{a}_{n-1} \ \dot{y}_n$$
$$+\bar{a}_n y_n = 0$$

方程（7—11）为方程（7—9）的伴随方程。

相对于给定的基底n维向量空间中元素的表示方法

根据公式（7—5）我们可以看出对于所有的t和t_0有：

$$\psi^*(t, t_0)\Phi(t, t_0) = I$$

$$(\psi_i(t, t_0), \Phi_j(t, t_0)) = \delta_{ij} = 1 \quad i = j = 0 \quad i \neq j \qquad (7-12)$$

$$(i, j = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

这里$\psi_i(t, t_0)$和$\Phi_j(t, t_0)$分别为$\psi(t, t_0)$的第i列和$\Phi(t, t_0)$的第j列。根据方程（7—12），并且因为$\Phi(t, t_0)$的n列之间是线性无关的，而且$\psi(t, t_0)$的n列之间也是线性无关的，向量$\Phi_i(t, t_0)$　（$i = 1, 2, \cdots\cdots, n$）的集是n维状态空间V的基底；而向量　$_j(t, t_0)$　（$j = 1, 2, \cdots\cdots n$）的集是对偶状态空间V'的基底。因此参考2—3节，我们可以将V中的任一向量Y表示为：

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{n} (\psi_i(t, t_0), Y(t))\Phi(t, t_0)$$

这一点是容易看出的。因为Y（t）可以表示为：

$$Y(t)=\sum_{i=1}^{n} a_i\Phi_i\ (t,t_0)$$

i(t，t_0)和Y(t)的内积为：

$$(\psi_i(t,t_0),Y(t))=(\psi_i(t,t_0),\ \sum_{i=1}^{n}a_i\Phi_i(t,t_0))$$

$$=a_i$$

因此，对于所有t和t_0有：

$$Y(t)=\sum_{i=1}^{n}(\psi_i(t,t_0),Y(t))\Phi_i(t,t_0)$$

在本章中我们将常常使用这种向量表示法。例如，对于给定的n维向量空间V的基底ξ_1，ξ_2，……ξ_n，我们可将V中任一向量Y唯一的表示为：

$$Y=\sum_{i=1}^{n}(\psi_i,Y)\xi_i$$

其中η_1，η_2，……，η_n是基底ξ_1，ξ_2，……，ξ_n的对偶基底。

Gram矩阵和Gram行列式　假定X_1，X_2，……，X_n是m维向量空间V中的元素。n×n矩阵

$$G=((X_i,X_j))=\begin{bmatrix}(X_1,X_1) & (X_1,X_2)\cdots & (X_1,X_n)\\ (X_2,X_1) & (X_2,X_2)\cdots & (X_2,X_n)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ (X_n,X_1) & (X_n,X_2)\cdots & (X_n,X_n)\end{bmatrix}$$

称为向量X_1，X_2，……，X_n的Gram矩阵。它的行列式$|(X_i,X_j)|$称为Gram行列式。

Gram矩阵可以表示为A^*A，这是因为：

$$
G=\begin{bmatrix}
(X_1, X_1) & (X_1, X_2) \cdots & (X_1, X_n) \\
(X_2, X_1) & (X_2, X_2) \cdots\cdots & (X_2, X_n) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
(X_n, X_1) & (X_n, X_2) \cdots & (X_n, X_n)
\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
x_{11} & x_{21} \cdots & x_{m1} \\
x_{12} & x_{22} \cdots & x_{m2} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
x_{1n} & x_{2n} \cdots & x_{mn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
x_{11} & x_{12} \cdots\cdots & x_{1n} \\
x_{21} & x_{22} \cdots\cdots & x_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
x_{m1} & x_{m2} \cdots\cdots & x_{mn}
\end{bmatrix}
$$

$$
A=\begin{bmatrix}
x_{11} & x_{12} \cdots\cdots & x_{1n} \\
x & x_{22} \cdots\cdots & x_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
x & x_{m2} \cdots\cdots & x_{mn}
\end{bmatrix}
$$

$n\times n$ 矩阵 G 也称为 $m\times n$ 矩阵 A 的 Gram 矩阵。（显然，如果 A 是实矩阵，那末 $A^* = A'$，因此 Gram 矩阵可以写为 $A'A$。）

下面我们将证明 Gram 矩阵始终是正定的或半正定的。

定理 7—1　如果 A 的秩是 n，则 $m\times n$ 矩阵 A 的 $n\times n$ Gram 矩阵 A^*A 是正定的；如果 A 的秩小于 n，则 A^*A 是半正定的。

证明　考虑 Hermitian 型

$$
\begin{aligned}
X^*(A^*A)X &= (AX)^*(AX) = Y^*Y \\
&= \bar{y}_1 y_1 + \bar{y}_2 y_2 + \cdots\cdots + \bar{y}_m y_m \\
&= |y_1|^2 + |y_2|^2 + \cdots\cdots + |y_m|^2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

可见，当且仅当 $Y = AX = 0$ 时 X^*A^*AX 等于零。如果 A 的秩是 n，那末只有满足 $AX = 0$ 的向量 X 为 $X = 0$，因此，当 A 的秩是 n 时，

$Gram$ 矩阵 A^*A 是正定的。

当且仅当 A 的秩小于 n 时，满足 $AX=0$ 的非零向量 X 才存在。所以，当 A 的秩小于 n 时，$Gram$ 矩阵 A^*A 是半正定的。这样证明到此完成。

可见任何正定矩阵和正半定矩阵都可以表示为 $Gram$ 矩阵。（参考习题 A—7—7）

定理 7—2　实数或复数向量 $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ 线性无关的必要和充分条件是 $Gram$ 矩阵 $((X_i, X_j))$ 是非奇异的，或者下面的 $Gram$ 行列式是非零的。

$$|(X_i, X_j)| = \begin{vmatrix} (X_1, X_1) & (X_1, X_2) \cdots\cdots & (X_1, X_n) \\ (X_2, X_1) & (X_2, X_2) \cdots\cdots & (X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (X_n, X_1) & (X_n, X_2) \cdots\cdots & (X_n, X_n) \end{vmatrix}$$

证明　为证明这一定理，假定 $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ 是线性相关的。于是存在非零常数 $C_1, C_2, \cdots\cdots, C_n$，使得：

$$C_1X_1 + C_2X, \cdots\cdots + C_nX_n = 0$$

因此

$$\sum_{j=1}^{n} C_j(X_i, X_j) = (X_i, \sum_{j=1}^{n} C_jX_j) = 0$$

这就意味着 $n \times n$ 矩阵 $((X_i, X_j))$ 的列向量成为线性相关的，因此

$$|(X_i, X_j)| = 0$$

相反，如果

$$|(X_i, X_j)| = 0$$

则存在非零常数 $C_1, C_2, \cdots\cdots, C_n$ 使得：

$$\sum_{j=1}^{n} c_j(X_i, X_j) = 0 \qquad (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

因此

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i, \sum_{j=1}^{n} c_j X_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_i c_j (X_i, X_j)$$
$$=0$$

即是

$$\sum_{i=1}^{n} c_i X_i = 0$$

这就意味着 $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ 是线性相关的。因此我们证明了向量 $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ 为线性无关的必要和充分条件是：

$$|(X_i, X_j)| \neq 0$$

也就是说 Gram 矩阵是非奇异的，到此证明完成（应当指出的是：Gram 行列式非零意味着它是正的。见习题 A—7—6）。

连续时间函数的列向量的线性无关性　考虑下列 $m\times n$ 矩阵 $H(t, t_0)$：

$$H(t, t_0) = \begin{bmatrix} h_{11}(t, t_0) & h_{12}(t, t_0) \cdots & h_{1n}(t, t_0) \\ h_{21}(t, t_0) & h_{22}(t, t_0) \cdots & h_{2n}(t, t_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{m1}(t, t_0) & h_{m2}(t, t_0) \cdots & h_{mn}(t, t_0) \end{bmatrix}$$
$$= \left[H_1(t, t_0) \vdots H_2(t, t_0) \vdots \cdots \vdots H_n(t, t_0)\right]$$

其中函数 $h_{ij}(t, t_0)$ $(i=1, 2, \cdots\cdots m;\ j=1, 2, \cdots\cdots n)$ 在区间 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ 内是 t 的连续函数。当且仅当

$$c_1 H_1(t, t_0) + c_2 H_2(t, t_0) + \cdots\cdots + c_n H_n(t, t_0) = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7-13)$$

时向量$H_1(t,t_0)$，$H_2(t,t_0)$，……，$H_n(t,t_0)$称为线性无关的，其中C_1，C_2，……，C_n为使得方程（7—13）成立的非全零常数。

对于时变向量$H_i(t,t_0)$和$H_j(t,t_0)$，我们定义内积为：

$$(H_i,H_j)=\int_{t_0}^{t_1}H_i^*(t,t_0)H_j(t,t_0)dt$$

在2—3节中曾指出，任何一种内积的定义，都必须满足4个公理。显然，上述定义是满足4个公理的，即：

1. $(H_i,H_j)=\overline{(H_j,H_i)}$
2. $(CH_i,H_j)=\overline{C}(H_i,H_j)=(H_i,H_j)$其中C是复数。
3. $(H_i+H_j,H_h+H_k)=(H_iH_h)+(H_jH_h)+(H_iH_k)+(H_jH_k)$
4. $(H_i,H_i)>0$　　　$H_i\neq 0$时

我们将用$(H_j,H_j)^{\frac{1}{2}}$来定义$H_j=H_j(t,t_0)$的范数$||H_j||$

$H(t,t_0)$的Gram矩阵为：

$$\begin{bmatrix} (H_1,H_1) & (H_1,H_2)\cdots\cdots & (H_1H_n) \\ (H_2,H_1) & (H_2,H_2)\cdots\cdots & (H_2H_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (H_n,H_1) & (H_n,H_2)\cdots\cdots & (H_n,H_n) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \int_{t_0}^{t_1}H_1^*H_1dt & \int_{t_0}^{t_1}H_2^*H_2dt\cdots\cdots & \int_{t_0}^{t_1}H_1^*H_ndt \\ \int_{t_0}^{t_1}H_2^*H_1dt & \int_{t_0}^{t_1}H_2^*H_2dt\cdots\cdots & \int_{t_0}^{t_1}H_2^*H_ndt \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_{t_0}^{t_1}H_n^*H_1dt & \int_{t_0}^{t_1}H_n^*H_2dt\cdots\cdots & \int_{t_0}^{t_1}H_n^*H_ndt \end{bmatrix}$$

7—14

$$
=\int_{t_0}^{t_1}\begin{bmatrix} H_1^{*}H_1 & H_1^{*}H_2 & \cdots\cdots & H_1^{*}H_n \\ H_2^{*}H_1 & H_2^{*}H_2 & \cdots\cdots & H_2^{*}H_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_n^{*}H_1 & H_n^{*}H_2 & \cdots\cdots & H_n^{*}H_n \end{bmatrix} dt
$$

$$
=\int_{t_0}^{t_1} H^{*}(t,t_0)H(t,t_0)dt
$$

定理7—3　当且仅当$m\times n$矩阵

$$
H(t,t_0)=[H_1(t,t_0)\quad H_2(t,t_0)\quad \cdots\cdots\quad H_n(t,t_0)]
$$

的Gram矩阵

$$
\int_{t_0}^{t_1} H^{*}(t,t_0)H(t,t_0)dt
$$

为非奇异时，或Gram行列式

$$
|(H_i,H_j)|=\left|\int_{t_0}^{t_1} H^{*}{}_i(t,t_0)H_j(t,t_0)dt\right|
$$

是非零时，向量$H_1(t,t_0)$，$H_2(t,t_0)$，……$H_n(t,t_0)$的集和时间间隔$t_0\leqslant t\leqslant t_1$内为$t$的连续函数的元素$h_{ij}(t,t_0)$（$i=1,2,\cdots\cdots,m$；$j=1,2,\cdots\cdots,n$）在同样区的内是线性无关的。

其中：

$$
H_j(t,t_0)=\begin{bmatrix} h_{1j}(t,t_0) \\ h_{2j}(t,t_0) \\ \vdots \\ h_{nj}(t,t_0) \end{bmatrix}\quad (j=1,2,\cdots\cdots,n)
$$

此定理的证明类似于定理7—2，因此略去。在线性时变系统可控性和可测性的讨论中将要用到这一定理。

根据定理7—3我们可以直接得到下述结果：定义在区间$t_0\leqslant t$