马克思
数学手稿

《北京大学学报》专刊

一九七四年五月

马　克　思
数　学　手　稿

（试　译　稿）

北　京　大　学
马克思数学手稿编译组

编 译 说 明

伟大的革命导师马克思，由于研究政治经济学、哲学的需要，十分注意钻研数学，写下了许多关于数学的读书笔记和研究手稿。正如恩格斯所说：**“马克思是精通数学的”**（《反杜林论》），并且**“有独到的发现”**（《在马克思墓前的讲话》）。这些手稿是珍贵的马克思主义文献，是用唯物辩证法研究自然科学的光辉典范。

恩格斯曾希望有机会将自己在自然辩证法方面的研究成果，**“同马克思所遗留下来的极其重要的数学手稿一齐发表”**（《反杜林论》）。但是，这个愿望没有来得及实现。恩格斯逝世以后，德国社会民主党的修正主义头目伯恩施坦等把马克思、恩格斯的重要手稿长期扣压，不予发表。十月革命胜利以后，在列宁、斯大林领导下，由联共（布）中央领导的研究机构拍摄了这些手稿的照片，并加以整理和翻译。一九二五年出版了恩格斯的《自然辩证法》（德俄对照本）。一九三三年，马克思数学手稿的部分重要内容（关于微分学的一些最完整的论述）的俄文译文，首先发表在联共（布）的理论刊物《在马克思主义旗帜下》，随后又编入文集《马克思主义与自然科学》。在我国，曾有不少同志关心和从事马克思数学手稿的翻译，一九七一年，复旦大学的同志从日文（译自俄文）转译了马克思的这一部分手稿。现在，我们根据德文原文译出这一部分内容，并从德文增译了论述微积分的另一些手稿，编在一起，印成这个集子。

当前，伟大的批林批孔运动正有力地推动着教育革命迅猛发展，促进各门学科沿着无产阶级的方向进行改造，也促进我们自己的世界观的改造。毛主席指出：**“你们学自然科学的，要学会用辩证法。”**我们必须认真学习马、列和毛主席的一系列哲学著作，学会用唯物辩证法来指导自然科学的教学和研究工作。学习马克思的数学手稿，可以帮助我们更好地掌握思想武器，在自然科学领域中深入批判资产阶级世界观，深入批判唯心主义和形而上学，坚持用马克思主义占领阵地，进行战斗。

* * *

本译文的内容包括马克思关于微积分的大部分论述。译文目录是我们编排的，其中粗体

字表示马克思手稿中原有的标题。对于一些没有标题的段落，我们根据内容试拟了中文标题，中文编号（一、二…或（一）、（二）…）是我们加的。译文中的用语、符号及格式都尽量保持马克思手稿原样。

为了帮助学习，我们辑录了马克思、恩格斯的通信和《资本论》、《反杜林论》、《自然辩证法》等著作中有关的论述，一并印出。

我们对译文作了一些附注（以 ①,②…表示，集中印于文末）和脚注（以*表示，印在所在页的下端）。

由于我们对马克思数学手稿学习不够，翻译水平不高，译文、编目和简注中都难免有错误或不妥之处，希望同志们提出修改意见。*

北京大学马克思数学手稿编译组

一九七四年三月十四日

* 这部译稿于四月底印出后，有关的领导部门、各兄弟单位及校内师生给予我们热情的支持和鼓励，并对译稿提出了许多宝贵意见。这次付印，我们作了一些修改。

一九七四年五月卅日

目　　录

一

关 于 导 函 数

论导函数概念[①]

I

设自变量 x 增长到 x_1，随之因变量 y 增长到 y_1[②]。

在 I 这一节中讨论的是很简单的情形，即 x 仅以一次幂出现。

1）$y=ax$；当 x 增长到 x_1，

$$y_1=ax_1 \quad 并且 \quad y_1-y=a(x_1-x).$$

如果现在进行**微分运算**，就是说，我们让 x_1 减少到 x，那末

$$x_1=x; \qquad x_1-x=0,$$

从而

$$a(x_1-x)=a\cdot 0=0.$$

其次，因为 y 变为 y_1 只是由于 x 变为 x_1，所以也就有

$$y_1=y; \qquad y_1-y=0.$$

这样

$$y_1-y=a(x_1-x)$$

就变成 $0=0$。

首先设微分（*Differentiation*）*，然后再把它扬弃，这样在字面上就导致**虚无**。理解微分运算的全部困难（一般说来，正象理解**否定之否定**那样），恰恰在于要看到微分运算是**怎样**区别于这种简单手续并因此导出实际结果的。

如果我们用因子 x_1-x 去除 $a(x_1-x)$，并且也相应地去除等式的左边，就得到

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=a.$$

因为 y 是**因变量**，它就根本不能进行任何独立的运动，所以，y_1 就不能变为 $=y$，从而也不能有 $y_1-y=0$，除非 x_1 预先变为 $=x$。

另一方面我们看到，在函数 $a(x_1-x)$ 里，x_1 不可能 $=x$，除非使函数 $a(x_1-x)$ 变为零。

* 在这里，首先设微分是指取差。

因此，因子 x_1-x 在用来除等式两边的时候，**必然**是一个**有限差**。所以，在作出比

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}$$

的时刻，x_1-x 总 是一个有限差；从而

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}$$

是**有限差的比**，据此，

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

于是：

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}\text{ 或 }\frac{\Delta y}{\Delta x}=a,$$

这里常数 a 作为两个变量的有限差之比的**极限值**（*Grenzwert*）③ 而出现。

因为 a 是常数，所以它本身不能变化，从而化成为 a 的等式**右边**也不能变化。在这种情况下，**微分过程**在左边

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}\text{ 或 }\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

进行，这就是象 ax 这样简单的函数的特点。

假设在比的分母里 x_1 减少，以致趋 近 于 x；一旦 x_1 变成 x，x_1 的 减 少 达 到 了 极 限（*Grenze*）。由此就使 差 $x_1-x=x-x=0$，从而，$y_1-y=y-y=0$。于是我们得到

$$\frac{0}{0}=a.$$

因为在表达式$\frac{0}{0}$里，它的起源和含义的全部痕迹 都 消 失 了，所以我们用$\frac{dy}{dx}$来 代 替它，在这里有限差 x_1-x 或 Δx，以及 y_1-y 或 Δy，作为**被扬弃了的**或**消失了的**差，以符号形式出现，或者说，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$变成了$\frac{dy}{dx}$。于是，

$$\frac{dy}{dx}=a.$$

一些进行理性推断的数学家所坚持的聊以自慰的说法是，dy 与 dx 在量上实际只是无穷小，仅仅接近于$\frac{0}{0}$，这是奇想，这一点在第Ⅱ节中将更清楚地显示出来。

对于已讨论的情形，还要提到的一个特点是，$\frac{\Delta y}{\Delta x}=a$，并且同样$\frac{dy}{dx}=a$，因而有限差的极限值，同时也是微分的极限值*。

2）同一情形的第二个例子是

$$\begin{aligned} y&=x \\ y_1&=x_1 \end{aligned}\;,\qquad y_1-y=x_1-x;$$

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}\text{ 或 }\frac{\Delta y}{\Delta x}=1;\qquad \frac{0}{0}\text{ 或 }\frac{dy}{dx}=1.$$

II

因为 $y=f(x)$，而**展开成代数表达式的** x 的函数位于等式的右边，所以我们称这个表达式为 x 的**原函数**，通过微分而得到的最初变形，我们称之为 x 的**预备“导”函数**，它的经过微分过程最终得到的形式称为 **x 的“导”函数**。④

1）$y=ax^3+bx^2+cx-e$.

假如 x 增长到 x_1，则

$$y_1=ax_1^3+bx_1^2+cx_1-e,$$

$$y_1-y=a(x_1^3-x^3)+b(x_1^2-x^2)+c(x_1-x)=$$

$$=a(x_1-x)(x_1^2+x_1x+x^2)+b(x_1-x)(x_1+x)+c(x_1-x).$$

由此

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}\text{ 或 }\frac{\Delta y}{\Delta x}=a(x_1^2+x_1x+x^2)+b(x_1+x)+c.$$

预备“导数”

$$a(x_1^2+x_1x+x^2)+b(x_1+x)+c$$

在这里是有限差之**比的极限值**，就是说不管这些差取得怎么小，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的值是由这个“导数”给定的。但是，它和微分之比的极限值不一致，这与第Ⅰ节不同。⑤

如果在函数

$$a(x_1^2+x_1x+x^2)+b(x_1+x)+c$$

* 这句话中的极限值，前一个是指有限差之比的极限值，后一个是指微分之比的极限值。

里变量 x_1 减少，直到其减少的**极限**，即变为**等于** x，那末，x_1^2 变为 x^2，x_1x 变为 x^2，x_1+x 变为 $2x$，我们便得到 x 的“**导**”**函数**：

$$3ax^2+2bx+c.$$

这里清楚地表明：

第一：为了得出“导数”就必须设 $x_1=x$，因此按**严格的数学意义** $x_1-x=0$，无需任何只是无限趋近之类的糊涂话。

第二：由于设 $x_1=x$，于是 $x_1-x=0$，所以根本没有符号性的东西进入“导数”。原先通过 x 的变化而引进的量 x_1 没有消失，它只是**减少**到它的极小极限值 $=x$，并成为 x 的原函数中一个新引进的元素，它通过部分地与自己结合，部分地与原函数中的 x 结合，给出最终的“导数”，即**减少到它的极小量的预备“导数”**。

在最初的（预备）“导”函数里，把 x_1 化为 x，就使得左边的 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 变成 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{dy}{dx}$，这样：

$$\frac{0}{0} \text{ 或 } \frac{dy}{dx}=3ax^2+2bx+c,$$

所以，**导数**便作为微分之比的**极限值**出现。

先验的或符号上的不幸只发生在左边，可是它已经失去了自己的可怕的样子，因为它现在只是作为过程的表达式出现，其实际内容已在等式右边表明了。

变量 x 在“导数”

$$3ax^2+2bx+c$$

里，与它在 x 的原函数里（即在 ax^3+bx^2+cx-e 里）相比，处在完全不同的条件⑦之下。因此导数本身又可以作为原函数出现，通过再一次的微分过程而成为另一个“导数”的母亲。这件事情可以反复进行，除非变量 x 在某个“导数”中确实被去掉，所以对于只用无穷级数表达的 x 的函数，就可以无限次地反复进行，多数情形正是如此。

符号 $\frac{d^2y}{dx^2}$，$\frac{d^3y}{dx^3}$ 等等只表示关于最初给定的 x 的原函数的“导数”系谱。一旦人们不是把这些符号当作**逐次导出的 x 的函数**的单纯**表达式**，而把它们当成运动的**出发点**，它们就变得神秘了。已消失的东西之比必须重新经历再一次的消失，这当然是奇妙的，而另一方面，例如 $3x^2$ 能够象它的祖先 x^3 那样很好地经历微分过程，是不足为奇的。人们本来就可以从作为 x 的原函数的 $3x^2$ 出发。

但要**注意**，实际上只有在第Ⅰ节中那样的等式里，其中 x 只有一次幂，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 才是**微分过程**的终结。然而，正如第Ⅰ节所表明的，结果是：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=a=\frac{dy}{dx}.$$

于是，在这里，借助于 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 所经历的微分过程，实际上并**没有找到任何新的极限值**，只有当预备"导数"含有变量 x 的时候，因而当 $\frac{dy}{dx}$ 仍然是某个实在过程的符号的时候，才有可能找到新的极限值。⑧

这当然丝毫不会妨碍，在微分学中符号 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$ 等及其组合也构成等式的右边。但是人们知道，这样的纯粹符号的等式只是表示以后要应用到变量的实际函数上的**运算**。

2）$y=ax^m$。

如果 x 变成 x_1，那末 $y_1=ax_1^m$ 而且

$$y_1-y=a(x_1^m-x^m)=$$

$$=a(x_1-x)(x_1^{m-1}+x_1^{m-2}x+x_1^{m-3}x^2+\text{等等直到 } x_1^{m-m}x^{m-1}\text{项}).$$

于是

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}\text{ 或 }\frac{\Delta y}{\Delta x}=a(x_1^{m-1}+x_1^{m-2}x+x_1^{m-3}x^2+\cdots+x_1^{m-m}x^{m-1}).$$

如果现在我们把微分过程用到这个**"预备导数"**上，从而

$$x_1=x\text{ 或 }x_1-x=0,$$

那末

$$x_1^{m-1}\text{ 变成 }x^{m-1};$$

$$x_1^{m-2}x\text{ 变成 }x^{m-2}x=x^{m-2+1}=x^{m-1};$$

$$x_1^{m-3}x^2\text{ 变成 }x^{m-3}x^2=x^{m-3+2}=x^{m-1}$$

最后

$$x_1^{m-m}x^{m-1}\text{ 变成 }x^{m-m}x^{m-1}=x^{0+m-1}=x^{m-1}.$$

这样，我们就 m 次得到函数 x^{m-1}，因此"导数"就是 max^{m-1}。

由于在"预备导数"里设 $x_1=x$，在左边 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 就变成 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{dy}{dx}$，因而

$$\frac{dy}{dx}=max^{m-1}.$$

虽然可以用这样的方式来处理一切微分学的运算，但这是无益的烦琐。可是在这里还要举一个例子，因为在前述的各例里，差 x_1-x 在 x 的函数中出现**仅仅一次**，所以在形成

$$\frac{y_1-y}{x_1-x} \text{ 或 } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

时，它就从右边消失了。在下面就不是这样的情况：

3) $y=a^x$;

如果 x 变成 x_1，那末

$$y_1=a^{x_1}.$$

因此

$$y_1-y=a^{x_1}-a^x=a^x(a^{x_1-x}-1).$$

$$a^{x_1-x}=\{1+(a-1)\}^{x_1-x},$$

而且

$$\{1+(a-1)\}^{x_1-x}=1+(x_1-x)(a-1)+\frac{(x_1-x)(x_1-x-1)}{1\cdot 2}(a-1)^2+\text{etc}.$$

于是

$$y_1-y=a^x(a^{x_1-x}-1)=a^x\{(x_1-x)(a-1)+\frac{(x_1-x)(x_1-x-1)}{1\cdot 2}(a-1)^2+$$

$$+\frac{(x_1-x)(x_1-x-1)(x_1-x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(a-1)^3+\text{etc}.\}.$$

$$\therefore \quad \frac{y_1-y}{x_1-x} \text{ 或 } \frac{\Delta y}{\Delta x}=a^x\{(a-1)+\frac{x_1-x-1}{1\cdot 2}(a-1)^2+$$

$$+\frac{(x_1-x-1)(x_1-x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(a-1)^3+\text{etc}.\}.$$

如果现在 $x_1=x$，则 $x_1-x=0$，我们就得到“**导数**”：

$$a^x\{(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3-\text{etc}.\}.$$

于是：

$$\frac{dy}{dx}=a^x\{(a-1)-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3-\text{etc}.\}.$$

如果我们把括弧中常数的和叫做 A，那末：

$$\frac{dy}{dx}=Aa^x;$$

然而，这个 $A=$ 根 a 的耐普尔对数，于是：

$$\frac{dy}{dx}\text{，或我们把 } y \text{ 的值代入：}\frac{da^x}{dx}=\log a\cdot a^x,$$

并且

$$da^x=\log a\cdot a^x dx.$$

补　　遗[⑨]

1）我们讨论过因子 (x_1-x) 在"**预备导数**"中，即有限差等式中只出现一次的情形，由此两边除以 x_1-x 就形成

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}\text{ 或 }\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

于是这同一个因子从 x 的函数中被消去了。

2）还讨论过（在 $d(a^x)$ 这例中）在形成 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 后，因子 (x_1-x) 仍留在 x 的函数中的情形。

3）还应当讨论因子 x_1-x 并**不直接**从第一个差的等式（"预备导数"）中产生出来的情形。

$$y=\sqrt{a^2+x^2},$$

$$y_1=\sqrt{a^2+x_1^2},$$

$$y_1-y=\sqrt{a^2+x_1^2}-\sqrt{a^2+x^2};$$

我们用 x_1-x 除 x 的函数，从而也除左边。于是

$$\frac{y_1-y}{x_1-x}\left(\text{或}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\frac{\sqrt{a^2+x_1^2}-\sqrt{a^2+x^2}}{x_1-x}.$$

为了消除分子的根号，分子和分母都乘以 $\sqrt{a^2+x_1^2}+\sqrt{a^2+x^2}$，得到

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{a^2+x_1^2-(a^2+x^2)}{(x_1-x)(\sqrt{a^2+x_1^2}+\sqrt{a^2+x^2})}=$$

$$=\frac{x_1^2-x^2}{(x_1-x)(\sqrt{a^2+x_1^2}+\sqrt{a^2+x^2})}.$$

但是

$$\frac{x_1^2-x^2}{(x_1-x)(\sqrt{a^2+x_1^2}+\sqrt{a^2+x^2})}=\frac{(x_1-x)(x_1+x)}{(x_1-x)(\sqrt{a^2+x_1^2}+\sqrt{a^2+x^2})},$$

从而：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_1+x}{\sqrt{a^2+x_1^2}+\sqrt{a^2+x^2}}.$$

如果 x_1 现在 $=x$，或 $x_1-x=0$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

于是

$$dy \text{ 或 } d\sqrt{a^2+x^2}=\frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

关于用符号 $\frac{dy}{dx}$ 代替 $\frac{0}{0}$

（一）

已经指出过，例如

1）当

$$y=x^m=f(x), \qquad y_1=x_1^m,$$

我们得到

$$\frac{dy}{dx} \text{ 或 } \frac{0}{0}=mx^{m-1}.$$

如前所述，导函数 $f'(x)$ 或 mx^{m-1} 是从原始的

$$f(x)=x^m$$

通过设 $x_1=x$，即 $x_1-x=0$ 而得到的。

但是同样设 $x_1-x=0$ 或 $x_1=x$ 就使得 $\frac{y_1-y}{x_1-x}$ 变为 $\frac{0}{0}$，并且我们用 $\frac{dy}{dx}$ 来代替它，是为了表明这是从哪里来的 $\frac{0}{0}$，即实际的差的什么样的比——在上述情形下是 $\frac{y_1-y}{x_1-x}$ ——最终变为 $\frac{0}{0}$.

这样做更为合理，因为我们得到

$$\frac{0}{0}=mx^{m-1}=f'(x),$$

这个结果 $\frac{0}{0}$ 是通过从右边的变量 x 出发的运动而在等式左边产生的。

$\frac{0}{0}$ 可以＝任意量 X，因为

$$0=X\cdot 0=0.$$

由于这里 $\frac{0}{0}$ 并不等于任意量 X，而 $=mx^{m-1}$，所以用 $\frac{dy}{dx}$ 或 $\frac{df(x)}{dx}$ 可以表明，符号 $\frac{0}{0}$

是由一个确定的 $f(x)$ 中的自变量 x 的什么样的运动产生出来的。

2）然而，在 $\frac{dy}{dx}$ 的含义一经确定之后，其特殊值自然随 $f(x)$ 本身的一定的形式而变化，并且一旦我们进入微分学的领域，问题便反过来了，我们要通过微分来求 $\frac{dy}{dx}$ 的特殊值，如在上例中 $=mx^{m-1}$，即它所相应的导函数。

（二）

比式

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ 或 } \frac{f(x+h)-f(x)}{x_1-x} \text{ 或 } \frac{y_1-y}{x_1-x} \text{ 或 } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

表示：$f(x)$ 原来的量和它增长后的量 $f(x+h)$ 之间的差，或者 x 的函数即 $f(x)$ 的增长程度，同变量 x 的增长程度之间的比，这里的 x 是函数的自变量。

这是 x 的函数的差和变量 x 本身的差之比。

在**分子**中我们有 x 的**函数**之间的**差**，在**分母**中是变量 x 本身原来的值和增长后的值之**差**；在分母中是 x 变化程度的大小，在分子中是函数变化程度的大小。

Δy 是 y 的第一级差，而 Δx 是 x 的第一级差。

如 $\Delta x=0$，则 $\Delta y=0$，因为当 x 变成 $=x+\Delta x$ 时，y 只能 $=y_1$。

我们在第一个和第二个表达式中看到：

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{x_1-x}=\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

当 h 变成 0 时，就有

$$\frac{f(x+0)-f(x)}{0}=\frac{f(x)-f(x)}{0}=\frac{0}{0}.$$

一旦 Δx 或 h 变成零，则 y_1-y 或 $\Delta y=0$，这是很明显的。

因为

$$x_1-x=(x+\Delta x)-x=\Delta x,$$

一旦 Δx 变成 0，则 Δy 变成 0。

也是明显的，这里 Δy 或 y_1-y 不仅变成 0，而且它变成 0 仅仅由于 Δx 变成零或者 x_1 变成 $=x$；因为 $x_1-x=\Delta x$，从而 $(x+\Delta x)-x=\Delta x$，所以，当 Δx 变成 0 时，左边只能变