初中复习资料

平面几何

醴陵县教学辅导站
醴陵县一中初中数学教研组 编

初中复习资料

平面几何

醴陵县教学辅导站
醴陵县一中初中数学教研组
编

初中平面几何复习资料

例1　在$\triangle ABC$中，$AB=BC$，CD平分$\angle C$，$\angle ADC=150^\circ$，求$\angle B$.

解　设$\angle B=x$，

则　$\angle BCA=\frac{1}{2}(180^\circ-x)$，

$\therefore$　$\angle BCD=\frac{1}{4}(180^\circ-x)$，

由外角定理，

$$\angle ADC=\angle B+\angle BCD,$$

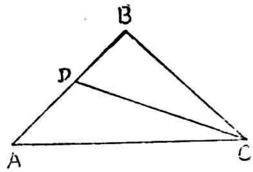

图 1

即　$x+\frac{1}{4}(180^\circ-x)=150^\circ$，　解得　$x=140^\circ$.

答：$\angle B=140^\circ$.

例2　在四边形$ABCD$中，已知$\angle B=70^\circ$，$\angle C=90^\circ$，$AB=DB=10$，$CD=5$，求$\angle A$.

解　$\because$　$BD=10$，$CD=5$，

$\angle C=90^\circ$，

$\therefore$　$\angle DBC=30^\circ$，

故　$\angle ABD=70^\circ-30^\circ$

$=40^\circ$，

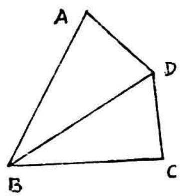

图 2

又$\because$　$AB=BD$，

$\therefore$　$\angle BDA=\angle A=\frac{1}{2}(180^\circ-40^\circ)=70^\circ$，

答：$\angle A=70^\circ$.

例 3 在圆内接四边形$ABCD$中，$\angle A:\angle B:\angle C=1:2:3$，求它的四个内角.

解 设$\angle A=x°$，

则 $\angle B=2x°$，

$\angle C=3x°$.

由内角和定理，

$x+2x+3x+\angle D=360°$，

即 $6x+\angle D=360°$， ①

又由圆内接四边形对角互补，故得，

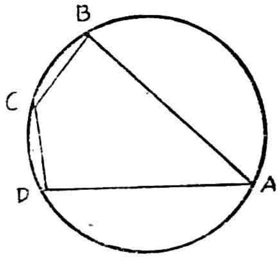

图 3

$2x+\angle D=180°$， ②

由①、②解得 $x=45°$， $\angle D=90°$，

故 $\angle B=90°$， $\angle C=135°$

答：$\angle A=45°$，$\angle B=90°$，$\angle C=135°$，$\angle D=90°$.

例 4 在圆O中，设$\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CD}:\overset{\frown}{DA}=3:2:13:7$，求$DA$，$CB$延长线的交角.

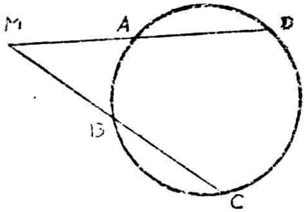

图 4

解 设$\overset{\frown}{AB}=x$，

则 $\overset{\frown}{BC}=2x$，

$\overset{\frown}{CD}=13x$，

$\overset{\frown}{DA}=7x$.

$\therefore$ $2x+3x+13x+7x=360°$，

故 $x=\dfrac{72°}{5}$.

$$\angle DMC=\frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{DC}-\overset{\frown}{AB}\right)=\frac{1}{2}(13x-3x)$$

$$=\frac{1}{2}\times 10\times\frac{5}{72^\circ}=72^\circ.$$

答：$\angle DMC=72^\circ$.

例 5 设AB是圆的直径，CE是$\overset{\frown}{AB}$上两点，且$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，$\overset{\frown}{AC}=60^\circ$，$\overset{\frown}{BE}=20^\circ$，求$\angle D$.

解 延长DF、DG，交圆于C_1、E_1，

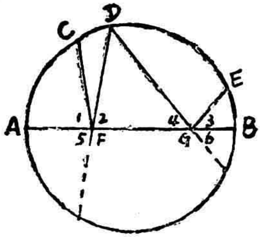

图 5

$\because$ $\angle 1=\angle 2$，

$\angle 2=\angle 5$，

$\therefore$ $\angle 1=\angle 5$，

故 $\overset{\frown}{AC_1}=\overset{\frown}{AC}=60^\circ$，

又$\because$ $\angle 3=\angle 4$，

$\angle 4=\angle 6$，

$\therefore$ $\angle 6=\angle 3$，

故 $\overset{\frown}{BE_1}=\overset{\frown}{BE}=20^\circ$，

故 $\overset{\frown}{C_1E_1}=180^\circ-(\overset{\frown}{AC_1}+\overset{\frown}{BE_1})=100^\circ$，

$\therefore$ $\angle D=\frac{1}{2}\overset{\frown}{C_1E_1}$的度数， 即 $\angle D=50^\circ$.

答：$\angle D=50^\circ$.

练 习 一

1. D是$\triangle ABC$的BC上一点，$AD=BD$，又$AB=AC=CD$，求$\angle BAC$.

2. $\triangle ABC$的两高AD，CE相交于M，$\angle A=$[illegible]，$\angle C=75^\circ$，求$\angle AMC$.

3. 等腰三角形一腰上的高与另一腰的夹角为18°，求等腰三角形的各角.(注意：有两种情况)

4. 三角形两内角的比为$5:7$，第三角比第一角大$\frac{360^\circ}{19}$，求第三角.

5. 菱形$ABCD$中，作$AE\perp BC$，$AF\perp CD$，又如果E、F是BC、CD的中点，求菱形的各角.

6. 在梯形$ABCD$中，$AB=AD=DC$，$AD\parallel BC$，$BD\perp CD$，求各内角.

7. 四边形顺次各角之比为：

(1) $2:4:5:3$,

(2) $5:7:8:9$,

这四边形是否内接于一圆.

8. 五边形五内角的比为$2:3:4:5:6$，求它的各角.

9. 四边形前两角之比为$5:7$，第三角等于这两角的差，第四角比第三角少$\frac{360^\circ}{11}$，求它的各角.

10. 正多边形的每一个外角等于正三角形的内角，求它的边数.

11. 在矩形$ABCD$中，$AE\perp BD$，$\angle DAE:\angle BAE=3:1$，求$\angle EAC$.

12. 一个多边形内角和为它的外角和的3倍，求它的边数.

13. $ABCD$是圆内接四边形，各顶点分四弧的比为

2∶3∶4∶6，求四边形的各内角.

14. 等腰$\triangle ABC$的顶角$\angle A=40°$，以AC为直径作圆，交BC、AD于D、E，求$\overset{\frown}{AD}$，$\overset{\frown}{ED}$，$\overset{\frown}{DC}$的度数.

15. 二弦AC、BD相交于M，$\overset{\frown}{AB}=m°$，N是$\overset{\frown}{CD}$上一点，$\angle CMD=\angle CND$，求$\overset{\frown}{CD}$.

16. 如图6，ABC、ADE与小圆相切于B、D，$\overset{\frown}{BmD}=130°$，求$\overset{\frown}{CnE}$.

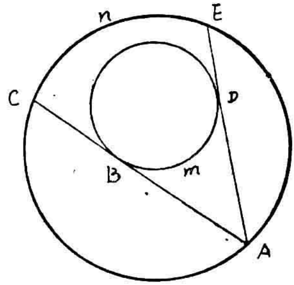

图 6

17. 如图7，弦CAE、DBF切小圆于A、B，$\overset{\frown}{AmB}=154°$，$\overset{\frown}{EPF}=70°$，求$\overset{\frown}{CnE}$.

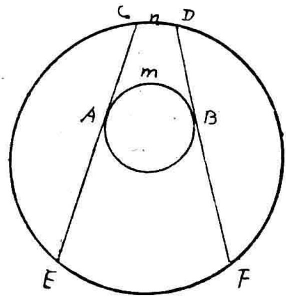

图 7

18. 等腰梯形的下底角为50°，过这底角的顶点的腰与对角线的夹角为40°，问外接圆的圆心在梯形内还是在梯形外.

例 6 矩形$ABCD$的两对角线相交于O，$AE\perp BD$，$OF\perp AD$，$BE∶ED=1∶3$，$OF=2m$，求AC的长.

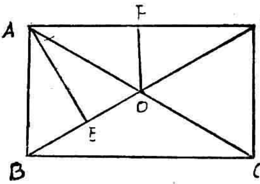

图 8

解 设$BE=x$，

则 $DE=3x$，故此$BD=4x$，

∴ $OB=2x$，$OE=x$，

又∵ $AE\perp OB$，

∴ $\triangle ABO$为等腰三角形，$AB=OA=OB$。

∴ $\angle BAO=60°$，$\angle FAO=30°$，

又$\triangle AFO$为直角三角形，

∴ $OA=2OF=4$，又$AC=2OA=8$。

答：$AC=8m$。

例 7 设A、B为直线MN两侧的点，C为AB的中点，AD、CF、BE分别垂直于MN，$AD=10$，$BE=4$，求CF。

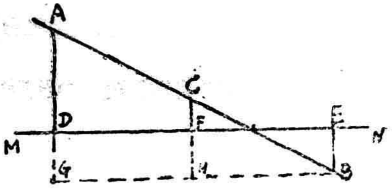

图 9

解 过B作MN的平行线，交$ADCF$的延长线于G、H，

∵ $CH\parallel AG$，

∴ $DGBE$是矩形，

∴ $\triangle BAG\sim\triangle BCH$，又$C$为$AB$的中点，

∴ $$CH=\frac{1}{2}AG=\frac{1}{2}(AD+DG)=\frac{1}{2}(AD+BE)$$

$$=\frac{1}{2}\times 14=7.$$

$$CF=CH-FH=CH-BE=7.$$

答：$CF=7$。

例 8 过▱$ABCD$的对角线的交点O作一直线交BC、AD于E、F，已知$BE=2$，$AF=2.8$，求BC和AD。

解 在$\triangle OEB$和$\triangle OFD$中，

$\angle 1 = \angle 2$,

$\angle 3 = \angle 4$,

$OB = OD$,

∴ $\triangle OBE = \triangle OFD$,

∴ $DF = BE = 2$,

$DF + AF = AD$

$= BC$,

∴ $AD = BC = 2 + 2.8 = 4.8$.

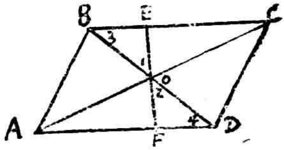

图10

答：$BC = AD = 4.8$.

例 9 在等腰直角三角形内，作一正方形，使它的一边在斜边上，其他两个顶点，分别在两直角边上已知斜边为 3，求正方形的边长。

解 过A作BC上的高AH，交GD于K.

∵ $\triangle ABC$是等腰直角三角形，

∴ $\angle HAB = 45°$,

故 $AH = BH = \frac{1}{2}BC = 1.5$.

设正方形的边长为x,

又 $GD \parallel BC$,

∴ $\triangle ADG \sim \triangle ABC$,

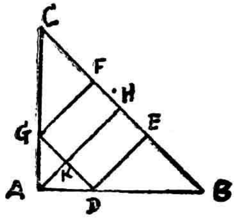

图11

∴ $\frac{BC}{DG} = \frac{AH}{AK}$, 故 $\frac{3}{x} = \frac{1.5}{1.5 - x}$,

解得$x = 1$.

答：正方形的边长为1.

例10. ⊙O的两条互相平行的弦，$AB = 40$，$CD = 48$，中间的距离为22，求⊙O的半径。

解 连OA，OC，设$OA=x$，

$OE=y$，

则 $OF=22-y$，

$AE=20$，

$CF=24$。

故 $x^2=20^2+y^2$，

$x^2=24^2+(22-y)^2$，

解此方程组得 $y=15$，

∴ $x=25$。

答：圆的半径为25。

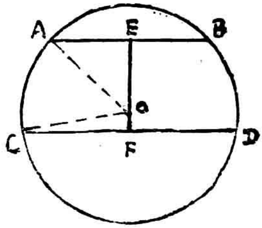

图12

例11 在$\triangle ABC$中，$\angle A$是钝角，$BC=16$，AB在AC上的射影$AD=3$，AC在AB上的射影$AE=2$，求AB和AC。

解 设$AB=x$，

$AC=y$，

由射影定理：

$$\begin{cases}16^2=x^2+y^2+2\cdot3\cdot y & ①\\16^2=x^2+y^2+2\cdot2\cdot x & ②\end{cases}$$

由①②解得

$x=12$，

$y=8$。

答：$AB=12$，$AC=8$。

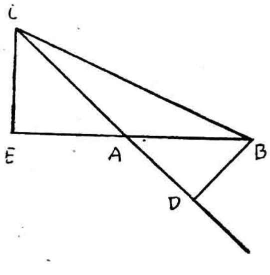

图13

练 习 二

1. 等腰$\triangle ABC$底边上的高是BD，$\triangle ABC$的周长是50，$\triangle ABD$的周长是40，求BD。

2. 等腰$\triangle ABC$一腰的垂直平分线DE交另一腰BC于E，已知$AB=14$，$\triangle AEC$的周长为24，求AC。

3. 过$\square ABCD$的对角线交点O作一直线，交BC、AD于E、F，已知$BE=2cm$，$AF=2.8cm$，求BC。

4. 三角形各边的比为$3:4:6$，又连结三边中点所成的三角形的周长为$5.2cm$，求原三角形的边长.

5. 等边三角形ABC的两高为AD、BE，作$DF\perp BE$，若$AD=6cm$，求EF和AC。

6. 正方形的内接矩形的各边平行于正方形的对角线，矩形的一边二倍于另一边，已知正方形的对角线为$12cm$，求矩形的各边和对角线.

7. 等腰直角三角形的斜边长为45，内接矩形的一边在斜边上，其邻边之比为$5:2$，求矩形的各边长.

8. 等腰梯形$ABCD$的二底边为AD、BC，高$AE=DF=10cm$，$AC\perp BD$，求中位线GH的长.

9. 在直角梯形$ABCD$中，$\angle D=45°$，底$AD=9$，作CD的垂直平分线EF，交BA的延长线于F，求BF。

10. 等腰梯形内接于$\odot O$，$AD\parallel BC$，$\angle B=30°$，中位线$EF=1m$，求$\odot O$的半径.

11. 扇形的中心角为$60°$，半径$OA=R$，求扇形内切圆的半径.

12. $\odot O$的二弦$AB\perp AC$，它们的中点分别为D、E，又$OE=10$，$OD=6$，求AB和AC。

13. $\odot O$的弦CD，交直径AB于E，$\angle BED=30°$，$AE=2$，$BE=6$，作$OF\perp CD$，求OF之长.

14. $\odot O$的半径为10，二切线$MA\perp MB$，过劣弧$\overset{\frown}{AB}$上

一点C，作切线交MA、MB于D、E，求$\triangle MDE$的周长。

15．AOB是$\odot O$的直径，切线DE切圆于C，AD、BE垂直于DE，又$AD=1.6$，$BE=0.6$，求AB。

16．两圆的内外公切线互相垂直，其切点的弦长为$3cm$和$5cm$，求连心线之长。

17．两等圆P、Q互相外切，且各内切于$\odot O$，$\triangle OPQ$的周长为18，求圆O的半径。

18．在$\triangle ABC$中，$AB=25$，$AC=30$，BC上的高$AD=24$，求BC。

19．相离两圆，圆心距离为65，外公切线为63，内公切线为25，求两圆的半径。

20．$\odot O$的切线AB与割线ACD垂直，$AB=12cm$，$CD=5cm$，求圆的半径。

21．直角梯形$ABCD$的一腰AB垂直于底，$AD=6$，$BD=CD=a$，求AC。

22．扇形AOB的中心角$\angle AOB=90°$，$OA=2cm$，以OA为直径作半圆C，又以OB上的一部分BE为直径作半圆，与$\odot C$相切于F，求BE。

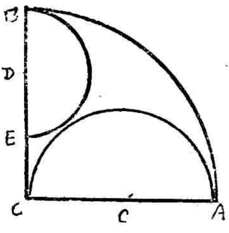

图14

23．三角形的两边为$41cm$和$50cm$，这两边在第三边上的射影的比为$3:10$，求第三边上的高。

24．已知$\square ABCD$的$BC=51$，对角线$BD=74$，求高A

25．在$\triangle ABCD$中，$AB-BC=1cm$，$BC-AC=1c$，AB在BC上的射影为$9cm$，求三角形的各边。

26. 在$\triangle ABC$中，$\angle A=60°$，$BC=21cm$，$AB:AC=3:8$，求AB、AC。

27. 在$\triangle ABC$中，$AB=44$，$BC=37$，$CA=15$，在AB上取$AD=14$，求CD。

28. 在$\triangle ABCD$中，$\angle B$、$\angle C$的平分线BD，CE相交于O，已知$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，求$OB:OD$。

29. 设$\triangle ABC$的外接圆$\overset{\frown}{BC}$的中点为D，过D作直线DOE，连结EA，延长交BC的延长线于F，又$BC=36$，$CA=15$，$AB=39$，求BF、CF。

30. 在$\triangle ABC$中，$AB=51$，$BC=85$，$AB=104$，在AC上取一点D，以D为圆心，作一圆，切其他两边，求AD、CD之长。

31. 等腰$\triangle ABC$中，$AB=AC=60$，内切圆心O分高AD为$AO:OD=12:5$，求底边BC。

32. 在等腰$\triangle ABC$中，$AB=BC=a$，$AC=b$，$\angle A$、$\angle C$的平分线交对边于M、N，求MN。

33. 直角三角形直角的平分线分斜边为15cm和20cm两，求二直角边。

34. 等腰直角$\triangle ABC$，腰$AB=AC=a$，$\angle B$的平分线D，求AD和CD。

例12设$\triangle ABC$的$\angle A$与其内接形$ADEF$的$\angle A$公共，E在BC上，$AC=b$，$AB=C$，求菱形的边长。

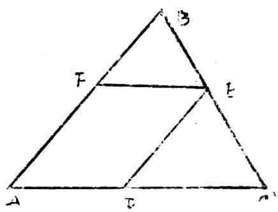

图15

解 设$AF=x$，

则 $EF=x$，

$ADEF$为菱形，

$\therefore\quad EF \parallel AC,$

$\therefore\quad \triangle ABC \sim \triangle FBE,$

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BF}{EF}, \qquad \frac{C}{b}=\frac{C-x}{X},$$

故 $x=\dfrac{bc}{b+c}.$

答：菱形的边长为$\dfrac{bc}{b+c}.$

例13 扇形的孤所对的弦长为a，内切圆的半径为r，求扇形的半径.

解 $\because \odot D$是扇形AOB的内切圆，故C是$\overset{\frown}{AB}$的中点，D在$\angle AOB$的平分线上，故O、D、C三点在一直线上，$\triangle ODE$和$\triangle OPB$有公共角$\angle POB$，又都为直角三角形，

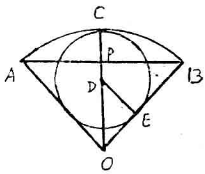

图16

$\therefore\quad \triangle ODE \sim \triangle OBP,$

$$BP=\frac{1}{2}a, \qquad DC=r,$$

设扇形的半径为R， 故 $OD=R-r,$

$$\therefore\quad \frac{OB}{OD}=\frac{BP}{DE}, \qquad \frac{R}{R-r}=\frac{\frac{1}{2}a}{r},$$

$$\therefore\quad R=\frac{ar}{a-2r}.$$

答：扇形的半径为$R=\dfrac{ar}{a-2r}.$

例14 在直角$\triangle ABC$中，CD是斜边上的高，$AD=m$，$BD=n$，求AC和BC.

解 设$AC=x$，$BC=y$、

$$\therefore \begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2}=\dfrac{m}{n}, & ① \\ x^2+y^2=(m+n)^2, & ② \end{cases}$$

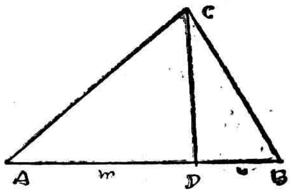

图17

解此方程组得：

$$x=\sqrt{m(m+n)},$$

$$y=\sqrt{n(m+n)},$$

答：$AC=\sqrt{m(m+n)}$，$BC=\sqrt{n(m+u)}$.

例15 在直角△ABC中，二直角边之比为：$BC:AC=3:7$.斜边上的高$CD=42m$，求BD和DA.

解 $\dfrac{BD}{AD}=\dfrac{BC^2}{AC^2}=\dfrac{9}{49}$，

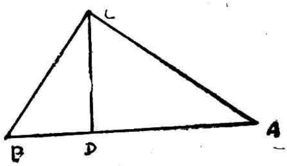

图18

$\therefore$ $BD=\dfrac{9}{49}AD$，

又 $CD^2=BD\cdot AD$

$=\dfrac{9}{49}AD^2$，

$\therefore$ $AD^2=\dfrac{49\times42^2}{9}$，

故 $AD=98$， $\therefore$ $BD=18$，

答：$BD=18$，$AD=98$.

例16 从圆外一点A所引的切线$AB=20cm$，割线$ACD=40cm$，弦心距$OF=8cm$，求圆的半径.

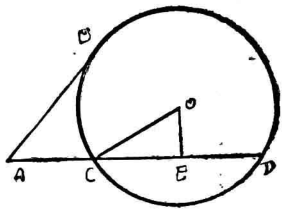

图19

解 设$AC=x$，$CD=40-x$，

$\therefore$ $AB^2=AC\cdot AD$

$=x(40-x)$，

故　$x^2-40x+400=0$,

解得　$x=20$,

故　$CD=20$,　　$CE=10$,

$\therefore$　$OC=\sqrt{10^2+8^2}=2\sqrt{41}$.

答：圆的半径$OC=2\sqrt{41}\ cm$。

练　习　三

1. BD是$\triangle ABC$的高，AE是$\angle A$的平分线，作$EF\perp AC$，已知$BD=30$；$AB:AC=7:8$，求EF。

2. 在$\square ABCD$中，对角线相交于O，作$OE\perp BC$，交AB的延长线于F，已知ABa，$BC=b$，$BF=C$，求BE。

3. $\odot O$的半经为r，过弦AB的一端点A引切线AC，从B作$BC\perp AC$，设$BC=a$，求AB。

4. 菱形的对角线为14和48，求它的高。

5. 直角梯形的二底$AD=17$，$BC=25$，斜腰$AB=10$，AB的垂直平分线EF与BC的延长线相交于F，求EF。

6. $\triangle ABC$的内接$\square DEFG$，DF在BC上两对角线平行于AC、AB，已知$BC=45$，$AB=39$，$AC=48$，求平行四边形的各边的长。

7. 直角$\triangle ABC$斜边BC上的高CD，已知$AD=m$，$BD=n$，求AC和BC，

8. 在ABC中，$BC=39$，$CA=42$，$AB=45$，作CA的垂线与AB的延长线相交于D，求BD和CD。

9. 以直角三角形斜边上的高为直径作圆，在二直角边上截得的二弦的长为12和18，求二直角边。

10. 以直角三角形的直角顶点为圆心，短直角边为半径作圆，截斜边为二部分，圆内部分为98，圆外部分为527，求二直角边.

11. 在直角三角形中，直角边$AC=15$，$BC=20$，CD是斜边上的高，CE、CF平分$\angle ACD$和$\angle BCD$，求EF.

12. 以直径AB的一端A作弦AD，延长交过B的切线于C，已知$AD=32cm$，$DC=18cm$，求圆的半径.

13. 直角$\triangle ABC$斜边上的高CD，引$DE\perp AC$，$DF\perp BC$，已知$AC=75cm$，$BC=1m$，求DE、DF.

14. 直角$\triangle ABC$的直角边$AC=24$，$BC=7$在斜边AB的延长线上取一点D，使$BD=7$，求CD.

15. 直角$\triangle ABC$的斜边$AB=10cm$，一直角边$BC=6m$，$\angle B$及其外角的平分线交AC及其延长线于D、E，求DE.

16. 直角$\triangle ABC$的二直角边$BC=15$，$AC=20$，CD是斜边上的高，CE平分$\angle C$，求AF、DB.

17. 在直角$\triangle ABC$中，二直角边之比为$BC:AC=5:4$，斜边上的高是CD，从D作$DE\parallel BC$，交AB于E，求$CE:EA$.

18. 在直角$\triangle ABC$中，直角的平分线CD交斜边于D，$AD=7:9$，作高CE，求$AE:EB$.

19. 直径AOB的延长线上一点C，作圆的切线CD，已知$AC=5$、$CD=2$，求圆的半径.

20. 圆外一点A作切线$AB=4$，割线$ACD=8$，圆心与ACD的距离$OE=12$，求OA.

21. 从圆外一点A作切线AB，割线ACD，AC比AB短5，CD比AB长5，求AB.