

穹顶网壳的稳定计算

胡学仁

穹顶网壳的稳定计标

胡学仁
(同济大学)

提要

正三角形网壳组成的网壳壳体可以化称为一个各向同性薄壳,它具有二个独立的参数:一个抵抗壳体薄膜变形的刚度和一个抵抗弯曲和扭曲的刚度[1]。本文论述这类网壳稳定计标的基本方程,给出网壳失稳的上边界荷载计标公式;考虑壳体的大挠度变形,用能量法计标网壳的下边界荷载,并给出相应的计标公式。同时对国外现有的计标公式作了分析比较。最后提出一个穹顶网壳稳定计标的公式,供设计参考。

一. 概述

按照杆系结构的分析方法,理论上不难把网壳结构的各种失稳模式分析清楚。然而结构设计师还比较习惯于把网壳的稳定分析分为单独构件的失稳、局部区域的失稳和整体失稳[2]。虽然这一概念不够严密,但是构件繁多的大型网壳正要作为空间刚架的力学模型来分析其稳定性,即使当今计标机如此发展,还属少见。而少量节点空间铰接桁架和刚架的失稳模式分析也还是不久前才有讨论的课题[3][4]。因此用发现的方法来探讨网壳的失稳仍具有实用意义,它介决网壳的整体失稳计标。而少数杆件形成的空间杆系结构可用为介决网壳局部稳定的分析。这两种计标都具有跳跃失稳的特征,要求考虑结构的高阶微小变形的影响。单独杆件的失稳分析,其主要问题是研究网壳杆件二端点的约束影响,作为结构设计的简化为二端铰支来考虑也是无可非议的。

1963年布加勒斯特一个穹顶网壳在大雪下的崩坏是属于壳体的整体失稳。壳面形状发生变化是其主要特征,因此采用连续体薄壳的理论分析其稳定性。

是一条比较简便的途径,也为目前国际上常用的方法。

穹顶壳体的稳定分析有长久的历史和丰富的试验资料。经典的线性理论是由 Zocchi 1915年提出的。大量的试验资料中,其破坏荷载仅达到线性理论值的 $1/2 \sim 1/4$ 。因此线性理论计算得到的临界荷载是壳体失稳的上临界点。由于壳体形状的偏差或荷载微小扰动等,上临界点是很难达到的。安全的设计应考虑结构的大幅度变形,兼采用由此得出的壳体失稳的下临界点下临界荷载的分析是1939年 von Karman 和钱学森得到的。

网壳穹顶的稳定分析都引用筒壳的成果。由于网壳化简为筒壳的理论不尽相同,其结果也有差异。目前国外流行的稳定计算分别由1965年 Wright, D.F. [5]、1976年 Buchert, K.P. [6] 和1979年 del Pozo, F.F., del Pozo, V.F. [7] 等提出的。本文将根据比较严格的壳量筒壳理论,探讨网壳穹顶的上临界荷载和下临界荷载,并提出相应的计算公式。

二. 三角形网壳球形扁网壳稳定计算的线性理论

本文[1]中应用广义虎克定理得出扁网壳的基本方程是

$$\begin{cases} \nabla_k^2 \Phi + \lambda_1(w) - 2 = 0 \\ -\nabla_k^2 w + \lambda_2(\Phi) = 0 \end{cases} \quad (1a)$$

式中 $\nabla_k^2 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} (k_2 \frac{\partial}{\partial \alpha}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (k_1 \frac{\partial}{\partial \beta})$

$$\begin{aligned} \lambda_1(w) = & D_{\alpha}^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + 3 D_{\alpha\beta}^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + 2(D_{\alpha}^2 + 2D_{\alpha\beta}^2) \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} \\ & + 3 D_{\alpha\beta}^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha \partial \beta^3} + D_{\beta}^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \beta^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_2(\Phi) = & a_{\beta}^2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} - 2 a_{\beta}^2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + (2 a_{\alpha}^2 + a_{\alpha\beta}^2) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} \\ & - 2 a_{\alpha\beta}^2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta^3} + a_{\alpha}^2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \beta^4} \end{aligned}$$

k_1, k_2 为网壳的主曲率

$D_{\alpha}^2, D_{\beta}^2, D_{\alpha}^2, D_{\alpha\beta}^2, D_{\alpha\beta}^2, D_{\alpha\beta}^2$ 网壳在 α, β 方向抗弯刚度

$a_{\alpha}^2, a_{\beta}^2, a_{\alpha}^2, a_{\alpha\beta}^2, a_{\alpha\beta}^2, a_{\alpha\beta}^2$ 网壳在 α, β 方向薄膜柔度

设所研究的球面网壳具有曲率半径 R , 並以式 (1) 所 [3] 列的对三角形网壳的物理参数代入 (1) 式, 得出:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{R} \nabla^2(\Phi) + \frac{\sqrt{3}}{4L} (3EI + GI_d) \nabla^2 \nabla^2(w) - Z = 0 \end{aligned} \right. \quad (2a)$$

$$\frac{\sqrt{3}L}{2EA} \nabla^2 \nabla^2(\Phi) - \frac{1}{R} \nabla^2(w) = 0 \quad (2b)$$

上式中: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \quad (2c)$

A, I, I_d 为网壳杆件的截面面积、惯矩和抗扭惯矩;

E, G 为网壳杆件的材料弹性模量和抗剪模量;

Z 为作用在网壳表面的分布压力。

为了简化 (2) 式的写法, 采用一个薄膜变形的刚度 Et_m , 和一个弯曲和扭曲变形的圆柱刚度 D , 其值为:

$$Et_m = \frac{2EA}{\sqrt{3}L}, \quad D = \frac{\sqrt{3}}{4L} (3EI + GI_d) \quad (3)$$

则 (2) 式可写为:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{R} \nabla^2(\Phi) + D \nabla^2 \nabla^2(w) - Z = 0 \end{aligned} \right. \quad (4a)$$

$$\frac{1}{Et_m} \nabla^2 \nabla^2(\Phi) - \frac{1}{R} \nabla^2(w) = 0 \quad (4b)$$

采用应力函数 F , 使:

$$\Phi = + \frac{Et_m}{R} \nabla^2(F), \quad w = \nabla^2(F) \quad (5)$$

则 (4b) 将自动满足, 因而 (4) 式将归结为:

$$\frac{Et_m}{R} \nabla^2 \nabla^2(F) + D \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2(F) - RZ = 0 \quad (6a)$$

或 $\nabla^2 \nabla^2(w) + \frac{Et_m}{R^2 D} w - \frac{1}{D} Z = 0 \quad (6b)$

当网壳在壳面法线方向承受均匀压力时, 可以认为壳体处于薄膜应力状态; 当达到临界荷载时, 壳面的有矩应力状态和薄膜应力状态都有可能, 出现了 3 种平衡形式的分枝点。薄膜应力引起的法向荷载是:

$$Z = n_\alpha^\circ x_\alpha + n_\beta^\circ x_\beta + 2n_{\alpha\beta}^\circ x_{\alpha\beta} \quad (7)$$

上式中, $n_\alpha^\circ, n_\beta^\circ, n_{\alpha\beta}^\circ$ 是横向力 q 作用下的薄膜内力, 其值为

$$\pi_a^0 = \pi_b^0 = \frac{qR}{2}, \quad \pi_{ab}^0 = 0 \quad (8)$$

把(7),(8)式代入(6a)式, 得:

$$D \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 (F) + \frac{qR}{2} \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 (F) + \frac{E t_m}{R^2} \nabla^2 \nabla^2 (F) = 0 \quad (9)$$

$$\text{应用特征函数:} \quad \nabla^2 (F) = \lambda^2 F \quad (10a)$$

$$\text{可得:} \quad \lambda^2 F \left[D \lambda^2 + \frac{E t_m}{R^2} + \frac{qR}{2} \lambda \right] = 0 \quad (10b)$$

(10b)式中括号内的函数, 故为具有实用意义, 因此有

$$D \lambda^2 + \frac{E t_m}{R^2} + \frac{qR}{2} \lambda = 0 \quad (11)$$

$$\text{简化得:} \quad q = -\frac{2D}{R} \lambda - \frac{2E t_m}{R^2 \lambda} \quad (12)$$

为求 q 的最大值, 取 $dq/d\lambda = 0$ 得:

$$\lambda = -\frac{qR}{4D} \quad (13)$$

将(13)代入(12)式, 得三角形网格壳线性理论计得的临界荷载为:

$$q_{cr} = \frac{4}{R^2} \sqrt{E t_m D} \quad (14)$$

(14)具有简洁的表达式和比较明确的物理考虑, 它给出网壳的上临界荷载, 其讨论详见于第五节中。

三. 三角形网格穹顶格壳计得的非线性理论

格壳计得的非线性理论须要计及结构三阶变形微量, 探求结构变形后的各种平衡位置和平衡形式。在壳格壳定计得中, 一般都会有从上临界荷载跳跃到下临界荷载。下临界荷载是能够满足平衡条件和连续条件的最大荷载。Borshchov 曾采用能量法介绍一个受均布法向荷载的球壳的各种平衡位置, 从中求得比较精确的下临界荷载[8]。这里采用他的方法, 并引用本文提出的当量刚度和当量厚度, 求取穹顶网壳的下临界荷载。

假定球面网壳呈对称屈曲, 壳格具有如下变形方程

$$w = f \left(1 - \frac{r^2}{c^2} \right)^2 \quad (15)$$

上式中, f, c 为曲面变形的凹陷深度和区域半径 (各1)

r, w 为曲面上的位置和相应的法向变位。

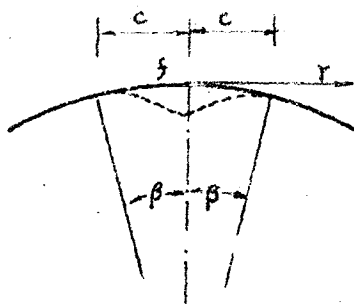


图 1

在以后的计算中,采用应力函数法,以极坐标系 r, θ 表示的径向和环向应力 σ_r 为:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \quad (16a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{d^2\Phi}{dr^2} \quad (16b)$$

壳体夹持区域的边界上,假定不发生线变位和转动,引用上述应力函数后,边界条件的写法则为:

$$r=0 \quad \frac{d\Phi}{dr} = 0 \quad (17a)$$

$$r=c \quad \left(\frac{d^2\Phi}{dr^2} - \frac{\mu}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right) = 0 \quad (17b)$$

穹顶网壳在均布径向荷载 q 作用下的势能由三部份组成:壳体薄膜变形的应变能 Π_m , 壳体弯曲变形的应变能 Π_b , 以及荷载 q 对相应壳面变位所作的功 W_e 的负值。总势能的表达式为:

$$\Pi = \Pi_m + \Pi_b - W_e \quad (18)$$

应用变位函数 (15) 及前述边界条件 (17), 写出相应于上述各项能量的表达式, 薄膜变形的应变能 Π_m 为:

$$\begin{aligned} \Pi_m &= \frac{t_m}{2E} \int_0^c \left[(\nabla^2 \Phi)^2 - 2(1+\mu) \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \frac{d^2\Phi}{dr^2} \right] 2\pi r dr \\ &= \frac{(23-9\mu)\pi}{126(1-\mu)} E \frac{t_m}{C^2} f^4 - \frac{(3-4)\pi}{9(1-\mu)} E \frac{t_m}{R} f^3 + \frac{(7-2\mu)\pi}{75(1-\mu)} E \frac{t_m C^4}{R^2} f^2 \\ &\quad - \frac{\pi}{3} q R f^2 + \frac{\pi}{3} q C^2 f + \frac{(1-\mu)\pi}{4} q^2 \frac{R^2 C^2}{E t_m} \end{aligned} \quad (19)$$

弯曲变形的应变能 Π_b 为

$$\Pi_b = \frac{D}{2} \int_0^c \left[(\nabla^2 w)^2 - 2(1-\mu_b) \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \frac{d^2w}{dr^2} \right] 2\pi r dr \quad (20)$$

上式方括号中第二次积分为 0, 引入弯曲变形的泊松比 μ_b , 以及抗弯曲和扭曲的截面厚度与薄膜变形截面厚度之比值 $\alpha = t_b/t_m$, 得出:

$$\Pi_b = \frac{\pi^2}{9} \pi D \left(\frac{f}{C} \right)^2 = \frac{8}{9} \frac{\pi E \alpha^3 t_m^3}{(1-\mu_b^2)} \left(\frac{f}{C} \right)^2 \quad (21)$$

荷载 q 对于壳面变位所作的功应包括对夹持面变位 w_0 和夹持以后的变位 w 所作的功。因为夹持面处于薄膜应变状态, 其变位为:

$$w_0 = \frac{q R^2}{2 E t_m} (1-\mu) \quad (22)$$

应用 (15) 和 (22) 并标出符 (1) 的总功为:

$$W = \int_0^L q (w + w_0) 2\pi r dr$$

$$= \frac{1}{2} q f c^2 + \frac{q R^2}{E t_m} (1 - \mu) \frac{c^2}{2} \quad (23)$$

为3使后面的计算简化, 引入下列无量纲参数:

$$\hat{r} = \frac{r}{R} \quad , \quad \hat{c} = \frac{c}{R} = \frac{R \beta}{t_m}$$

$$\hat{s} = \frac{s}{t_m} \quad , \quad \hat{G} = \frac{q R^2}{2 E t_m} = \frac{G R}{E t_m} \quad (24)$$

并采用下列函数

$$C_1 = \frac{7-2\mu}{30(1-\mu)} \quad , \quad C_2 = \frac{4}{3(1-\mu)}$$

$$C_3 = \frac{23-9\mu}{84(1-\mu)} \quad , \quad C_4 = \frac{2}{3(1-\mu)}$$

$$C_5 = \frac{3-\mu}{4(1-\mu)} \quad (25)$$

则总势能 $\hat{\Pi}$ 的表达式为:

$$\hat{\Pi} = \frac{C_2}{\hat{c}} \hat{s}^4 - \frac{2}{3} C_5 \hat{s}^3 + \frac{C_3}{\hat{c}} \hat{s}^2 + C_1 \hat{s}^2 - \hat{G} \hat{s}^2 - \frac{R}{C_4} \hat{G}^2 \quad (26)$$

应用里茨法研究壳体的平衡问题, 取总势能 $\hat{\Pi}$ 对壳体变形的参数 f, c 的变分为 0, 即:

$$\frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \hat{s}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \hat{c}} = 0 \quad (27)$$

由此得出 2 个非线性方程, 经化简归併为一个方程:

$$\left[(C_1 C_4 - \frac{G C_4 \alpha^3}{R^2}) - \frac{C_2 C_4}{R^2} \hat{s}^2 \right] \frac{1}{2} \hat{s} + (C_5 - \frac{2 C_2}{R} \hat{s}) \hat{c} - (C_1 R + \frac{\alpha^3 C_2}{R}) = 0 \quad (28)$$

式 (28) 为穹顶网壳考虑大挠度变形时的平衡方程, 其主要参数有: (1) 网壳抗弯刚度厚度与薄膜变形与厚度之比 α , 它取决于杆件截面形式; (2) 网壳薄膜变形时的泊桑比 μ 和弯曲变形时的泊桑比 μ_b ; (3) 网壳的凹陷深度 β ; (4) 网壳的凹陷范围 R , 对于一定形式的网壳 (1), (2) 二项为定值, 因此可从 (28) 式得出 $\hat{s}$ 以使壳体对一定荷载 q 维持平衡的 $\hat{c}$ 和 $\hat{s}$ 值。其相应的荷载可采用无量纲参数 q^* 来表示:

$$q^* = \frac{q R^2}{E t_m} \quad (29)$$

q^* 可以从求出的 $\hat{s}, \hat{c}$ 值代入 (27) 中任意一式求 (3) 相当于 (27) 之第一式为

$$q^* = 2 \left(C_1 \frac{q}{R} + \frac{C_2 q^3}{R} - C_3 \frac{q}{R} + 2 \frac{C_4}{R} q^2 \right) \quad (30)$$

壳体稳定性计算的下临界荷载是所有满足平衡状态的荷载中的最小值, 因此从 (30) 式求出的 q^* 中, 选其最小值为 q_{cr}^* , 其相应的临界荷载由 (29) 式求出:

$$q_{cr} = q_{cr}^* \frac{E t_m^2}{R^2} \quad (31)$$

(31) 式是穹顶网壳下临界荷载公式。 q_{cr}^* 可采用对不同的 α 值制成曲线或表格, 以适应不同类型的扁球形网壳验算其稳定性。

四. 扁球穹顶网壳稳定性计算示例

某扁球形穹顶网壳的直径跨度 $D = 88 \text{ m}$ 。由估材料最佳经济条件, 认为球面的曲率半径 R 与 D 相接近时较为合理, 因此选用 $R = 88 \text{ m}$, 此时相径矢与跨度之比 $f/D = 1/5$ 。网壳以直径跨度 24 等分, 并在水平面上作正三角形网格, 投影到球面求出网壳的节点。空间杆件长度的变化范围为 $367 \sim 41 \text{ m}$, 在以后把网壳化杆为连续体时近似取 $L = 4 \text{ m}$ 。设计时采用屋面总荷载 $q = 190 \text{ kg/m}^2$ 。由强度计算 (从略) 求出杆件截面可采用中 220×4 的单层网壳。除边界上个别杆件预作一些调整外, 其他部位采用同一截面是较安全。因此须要验算其稳定性。

1. 单层网壳

截面中 220×4 的截面特性: $A = 27.65 \text{ cm}^2$, $I = 1580 \text{ cm}^4$, $L = 400 \text{ cm}$ 。

当量薄壳特征 [1]: 薄膜变形当量厚度 $t_m = \frac{2A}{\sqrt{3}L} = 0.0785 \text{ cm}$ 。

弯曲和扭曲当量刚度 $D = 1.62 \frac{EI}{L} = 134 \cdot 10^6 \text{ kg cm}$ 。

网壳的上临界荷载由 (14) 式: $q_{cr}^* = \frac{4}{R^2} \sqrt{EI t_m D} = 0.0768 \text{ kg/cm}^2 \quad (768 \text{ kg/m}^2)$

安全的设计必须满足网壳的下临界荷载

网壳抗弯曲和扭曲的当量厚度 [1] $t_b = \left(11.2 \sqrt{3} \frac{I}{L} \right)^{1/3} = 4.247 \text{ cm}$ 。

$\alpha = t_b / t_m = 54.1$,

薄膜变形的泊松比和弯曲扭曲的泊松比 [1]

$\mu = 1/3$

$\mu_b = 1/5$

由 (25) 式求出: $C_1 = 0.316667$, $C_2 = 1.389286$,

$$C_3 = 0.257143, \quad C_4 = 1, \quad C_5 = 1$$

由(28)式, 以设计最大变位的平衡方程

$$\left[\left(0.31667 - \frac{21.206311 \cdot 10^4}{E^2} \right) - \frac{0.257143}{E^2} \right] \frac{1}{3} + \left(1 - \frac{0.714286}{E} \right) \frac{1}{3} - \left(0.31667 \frac{1}{E} + \frac{21.206311 \cdot 10^4}{E} \right) = 0$$

由上式及(30)式可求出表1

表1

E	1500	3500	3650	3800	4000	10000
β	1164580	32025975	374770	3492561	3695263	9783232
q^*	195.316	118.978	118.802	118.26	119.25	187.146

上表可求出各2中曲线②, q_{cr}^* 为其最大值, 是118.802.

由(31)式求出下临界荷载

$$q_{cr}^* = q_{cr}^* \frac{E t_m^3}{R^3} = 118.802 \frac{21 \cdot 10^6 \cdot 0.0785^3}{8800^3} = 0.01985 \text{ kg/cm}^2 (198 \text{ kg/m}^2)$$

对于下临界荷载的安全系数:

$$K = \frac{198}{190} = 1.04 \quad (\text{不够安全})$$

2. 双层网壳

为了增加网壳对稳定的安全性, 采用桁架构件成为双层网壳. 设网壳尺寸大小不变, 桁架构件高度 h 取用50、100、200 cm三种方案. 假定桁架上下弦横截面积相等, 且其总和等于单层网壳时构件截面积 A . 桁架构件的惯性矩考虑其矩形影响系数0.8, 求出

$$I = 2 \cdot \frac{A}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 \cdot 0.8 = 0.2 A h^2$$

双层网壳的当量刚度和当量抗弯厚度 t_b , 及其泊松比 μ 及 μ_b [7].

$$D = 1.3 \frac{E I}{L} \quad t_b = \left(8 \sqrt{\frac{I}{L}} \right)^{1/3} \quad \mu = \mu_b = 1/3$$

将上述数据代入(25), 可求出(28)式的有关系数. 对桁架高度变化的三种方案得到相互的平衡方程(28). 并求出各2中的③、④、⑤三条曲线. 其主要数据及临界荷载见表2

表2

	$h(\text{cm})$	$t_m(\text{cm})$	$I(\text{cm}^4)$	$D(\text{kg/cm})$	$t_b(\text{cm})$	α	$q_{cr}^* (\text{kg/cm}^2)$	q_{cr}^*	q_{cr}^*	K
I	50	0.0785	13600	928.5	7.78	991	0.203	312	40503	2.68
II	100	0.0785	54400	37110	12.85	1573	0.404	624	41010	5.32
III	200	0.0785	217600	148410	19.61	2498	0.808	1247	0.203	10.6

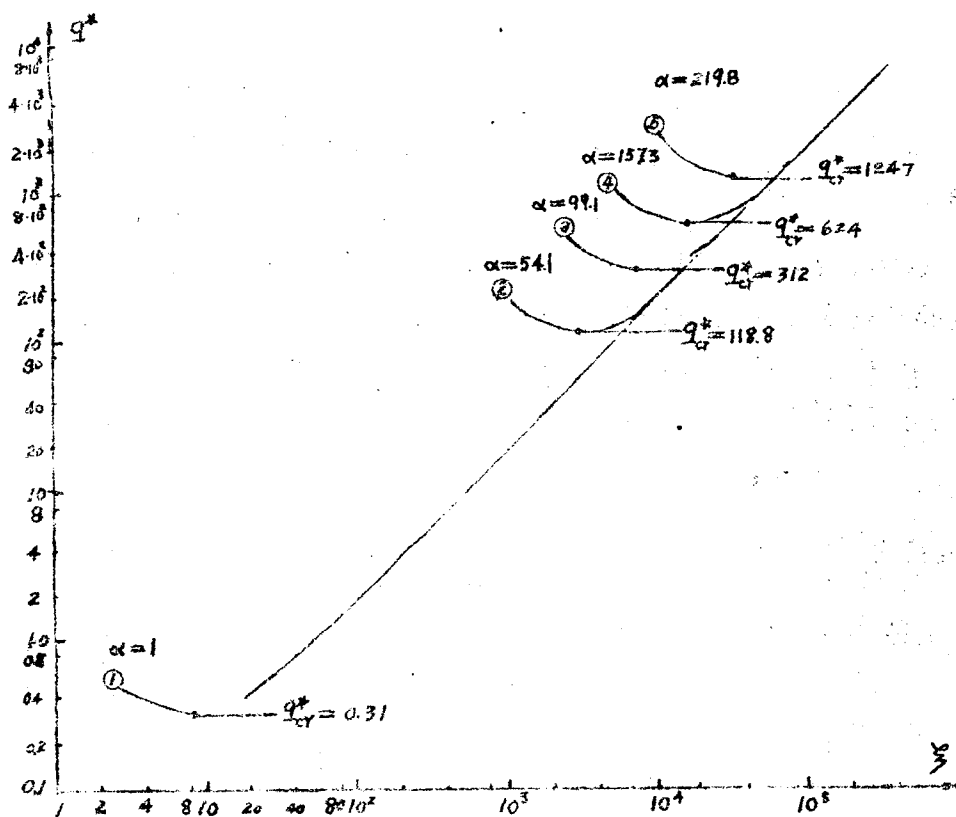


表 2 当量薄壳的下临界荷载

表 2 表示当量薄壳的下临界荷载 q_{cr}^* 位置, 表中的纵坐标和横坐标均采用对数坐标, 不同的当量薄壳以 $\alpha = t/t_m$ 来区别。 $\alpha=1$ 是实体薄壳, 它的结果与 Boussinesq 的结果相同。

五. 正三角网格穹顶稳定公式分析

本文给出的正三角形网格穹顶的上临界荷载的计算公式 (12) 为

$$q_{cr}^+ = \frac{4}{R^2} \sqrt{E t_m D} \quad (12)$$

上式中, $E t_m$ 为薄膜刚度, D 为弯曲刚度。若以 D 与当量抗弯刚度 t_b 和泊松比 μ_b 相联系

$$D = \frac{t_b^3}{12(1-\mu_b^2)} \quad (32)$$

给出上临界荷载的另一表达式为

$$q_{cr}^+ = \frac{2}{\sqrt{3}(1-\mu_b^2)} \frac{E}{R^2} t_m^{\frac{1}{2}} t_b^{\frac{3}{2}} \quad (33)$$

因此壳稳定验标公式可以采用(12)或(33)二种表达方式。

当计标壳体薄壳时, $t_m = t_b = t$, $\mu_b = 0.5$ 代入上列(12)、(33)式都给出:

$$q_{cr} = 1.21 \frac{E}{R^2} t^2 \quad (34)$$

(34)式说明壳体薄壳是壳稳定计标公式的特例。(34)给出的是线性理论稳定计标的经典计算结果,因此也是以说明(12)、(33)正确无误。

但是壳体稳定验标必须采用其下临界荷载才是安全的。壳体薄壳的下临界荷载的计标公式采用(34)形式,即改变系数。Von Karman和钱子鑫的计标结果系数取0.366, A.C. Bushup用能量法计算结果为0.31[5], Cyprian用能量法采用弹性边界,其系数为0.34[8]。而大量的试验资料给出的系数为0.3~0.7,其中对较扁平的球壳中也有不对称失稳,其系数低至0.92+1。由于壳体稳定对缺陷极为敏感,一般设计采用系数0.300。

壳稳定计标迄今有下列几种的计标公式,其比较表为(35)形式进行比较。

1) Wright [5] 公式

$$q_{cr} = C^W E \frac{A r_g}{t R^2}, \quad C^W = 1.6, \quad r_g = \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (35)$$

当 $\lambda_m = \frac{2A}{\sqrt{3}l}$, $t_b = q_m \frac{r}{l}$ 代入给出:

$$q_{cr} = 0.377 \frac{E}{R^2} t_m^{\frac{1}{2}} t_b^{\frac{3}{2}} \quad (36)$$

2) Buckert [6] 公式

$$q_{cr} = 0.365 \left(\frac{t_m}{R}\right)^2 \left(\frac{t_b}{\lambda_m}\right)^{\frac{2}{3}} = 0.365 \frac{E}{R^2} t_m^{\frac{1}{2}} t_b^{\frac{2}{3}} \quad (37)$$

3) del Pozo [7] 公式

$$q_{cr} = 0.228 \frac{E \alpha^{1.5}}{(1-\nu^2)^{0.7}} \left(\frac{t_m}{R^2}\right)^2 \quad (38)$$

当 $\alpha = \frac{\lambda_m}{t_m}$, $\nu = \frac{1}{2}$ 代入给出

$$q_{cr} = 0.247 \frac{E}{R^2} t_m^{\frac{1}{2}} t_b^{\frac{2}{3}} \quad (39)$$

4) 作者在1961~65历届毕业设计和指导时推荐公式

$$q_{cr} = \frac{1}{R^2} \sqrt{E \lambda_m D} \quad (40)$$

Al. Allen G. H. et al "Background to Buckling", $q/q_{cr} = 0.76$

单层网壳时 $D = 1.62 \frac{E\pi}{L}$, $t_b^3 = 11.2 \sqrt{\frac{\pi}{L}}$ 代入

$$q_{cr} = 0.29 \frac{E}{R^2} t_m^{1/2} t_b^{3/2} \quad (41)$$

双层网壳时 $D = 1.3 \frac{E\pi}{L}$, $t_b^3 = 8 \sqrt{\frac{\pi}{L}}$ 代入

$$q_{cr} = 0.306 \frac{E}{R^2} t_m^{1/2} t_b^{3/2} \quad (42)$$

上述四个公式的比较,可以通过第四节的例子说明(表3)。

表3

网壳	作者 (5)	Wright [5] (35)	Buchert [6] (37)	Pogo [7] (39)	本文公式 (40)	本文精确解
单层网壳		0.0225	0.0318	0.0147	0.0192	0.0199
双层网壳		0.0661	0.0640	0.0435	0.0505	0.0521
网壳		0.1321	0.1279	0.0863	0.1010	0.1043
网壳		0.2640	0.2560	0.1730	0.2020	0.2084

从表3可以看出,公式(40)仍不失为一个较好的验算穹顶网壳稳定性的公式,它在所有公式中更接近用能量法计算的理论值,而且其表达式简捷,物理概念也比较明确。

六 穹顶网壳稳定核设计公式的提议

壳件稳定性的研究至今还没有达到令人满意的程度,因为壳体的实际几何形状、荷载和边界条件等都有关系。许多壳体的破坏是荷载一开始就处于有缺陷状态,不属于第一类稳定问题,不存在平衡分枝点。试验值永远不能达到上临界值,由于对缺陷的敏感,还可能低于下临界值。因此壳体设计时,对稳定控制采用很大安全系数。混凝土壳的安全系数取上临界值的 $1/20$,构筑物中,如英国标准 BS 2654 (74),对杆接石油储罐壳体、球面壳也采用这一系数 [9]。看来在没有新的理由以前,对工程设计也祇能保留这一系数。

对穹顶网壳而言,根据第四节的论述,这一系数也就是取下临界值的 $1/5$,因此对公式(40)除以5,就成为穹顶网壳设计公式,它近似地适用于移动曲面的穹顶网壳,也用于圆形、方形或长方形的网壳。

对于球形曲面或二方向具有相同曲率时:

$$q_{cr} = \frac{1}{5R_1 R_2} \sqrt{E t m D} \quad (43)$$

对于二方向具有不同曲率的移动曲面网壳时:

$$q_{cr} = \frac{1}{5R_1 R_2} \sqrt{E t m D} \quad (44)$$

式(43)、(44)可作为设计时宏观的控制稳定性的公式,至于更精确的计称,目前只能依靠壳体的非线性理论分析。在上述例题中由表3可以看到,对于88m跨度的穹顶网壳用50cm的双层网格,已能满足这个稳定公式。

七. 结语

网壳的稳定分析可以采用增量薄壳及理论作为连续体计称。目前国际上流行的穹顶网壳稳定公式虽表达式不同,且有差异,但化称为连续体计称后则大致相同。本文提出的求穹顶网壳下临界值的公式和相应建议的设计公式更接近理论的精确解,可作为设计参考。

八. 参考文献

1. 胡学仁 “网壳结构的力学模型” 1984.3. 第二届空间结构学术交流会
2. Makowski, Z.S. "Modern Trends and Development in Steel space structures." 1982.
3. 中谷裕彦 “S2Lの屈曲” 昭和58年.
4. Jagannathan, D.S. et al., "Snap-Through Buckling of Reticulated shells" Proceeding of Structural Division ASCE Vol 91, 1965.
5. Wright, D.T. "Membrane Forces and Buckling in Reticulated Shells" Journal of structural Division, ASCE, Vol 91, No ST1, proc. paper 4224, 1965
6. Buckert, K.P. "Shell and Shell-like structures" Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures. 1976. ed. B.G. Johnson.
7. del. Pozo, F.F. and del. pozó V.F. "Buckling of Ribbed Spherical Shells" Proc. IASS. Congress. Madrid 1979.
8. A.L. 沃尔波尔 “薄板壳和薄壳” 1956. 科学出版社 (译本)
9. J. Rhodes. Developments in Thin-Walled Structures. 1. 1982.

